ELECTROSTATIQUE 1

PREAMBULE

• **L'électromagnétique** = une "branche" de la physique :

→ L'univers = une succession d'assemblages

→ Ces assemblages sont dus à des interactions

forces de gravitation (dues à la masse)	la plus familière et la plus visuelle longue portée ($1/r^2$), faible intensité toujours attractive
forces électromagnétiques (dues à la charge)	longue portée ($1/r^2$), forte intensité (10^{40} fois lus que la gravitation) attractive ou répulsive
- forces nucléaires (dues à la couleur)	faible portée ($1/r^7$) 2 types : forte et faible physique nucléaire

les forces électromagnétiques sont responsables de presque tous les phénomènes qui se produisent à notre échelle

• **L'électrostatique** : interaction entre corps chargés :

- au repos → électrostatique
- en mouvement uniforme → magnétostatique
- en mouvement quelconque → électromagnétique

1. La charge, l'électricité

• **On ne peut définir la charge que** :
- par l'effet qu'elle produit
- par ses propriétés

• **Qu'est-ce qu'on entend par 'particule chargée' ?**

- Les particules :

Particules	**Charge**	**Masse**
proton	+ 1,62 10^{-19} C	1672 10^{-30} kg
électron	- 1,62 10^{-19} C	0,911 10^{-30} kg

- La matière électrisée (corps chargé)

En général, la matière est neutre → mais elle peut être électrisée :

- **ionisation** : le nbre d'électrons est modifié (perte ou gain)
- **polarisation** : modification de la répartition des charges

• **Définition :**

charge ponctuelle = particule ou corps chargé dont les dimensions sont négligeables devant la distance d'interaction.

1.1. Effet des charges électriques

- **Mise en évidence expérimentale :**
  - 2 types d'effet : attractif - répulsif
  - effet à longue portée
  - effet 10^{40} fois plus important que la gravitation

1.2. Propriétés des charges

- **Quantification de la charge** : (Millikan 1868 - 1953)

- Au début du siècle : électricité = fluide

- Découverte de la structure atomique :

$\rightarrow$ idée de **la quantification de la charge**

- découverte de l'électron $\rightarrow$ Thomson en 1897

- charge de l'électron $\rightarrow$ Millikan ($e = 1.62\ 10^{-19}$ C)

- charge du proton : exactement l'opposée de celle de l'é

- **Conservation de la charge :**

'la charge totale d'un système isolé est constante'

aucun échange de matière avec l'extérieur

Exemple :

- désintégration d'un neutron : $n \rightarrow e + p + neutrino$

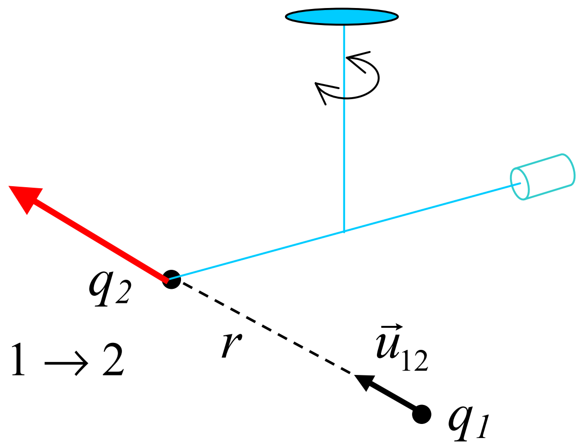
- matérialisation d'un photon : $\gamma \rightarrow e^- + e^+$

2. Interaction électrique

2.1. Loi de Coulomb

• L'interaction est caractérisée par une intensité et une direction $\rightarrow$ représentation vectorielle

• Coulomb, grâce à son pendule de torsion, va quantifier cette interaction



On considère :

- 2 charges q_1 et q_2

- $\vec{u}_{12}$ un vecteur unitaire dirigé de $1 \rightarrow 2$

- r la distance qui sépare les 2 charges.

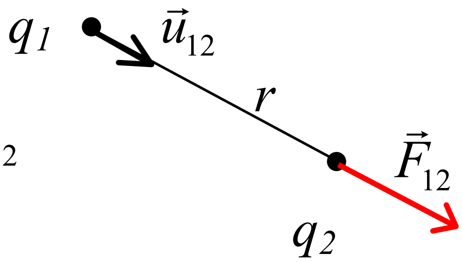
$\vec{F}_{12}$ est la force produite par q_1 et qui agit sur q_2 :

$$\boxed{\vec{F}_{12} = K.\frac{q_1 q_2}{r^2}.\vec{u}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

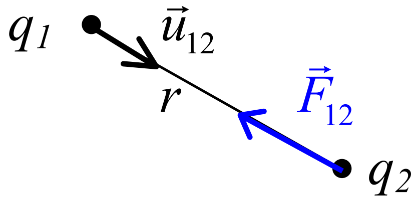
$$\boxed{\vec{F}_{12} = K.\frac{q_1 q_2}{r^2}.\vec{u}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

K > 0
r² > 0 $\Rightarrow$ c'est le produit q_1q_2 qui donne le sens de $\vec{F}_{12}$
$\vec{u}_{12}$ constant

$q_1q_2 > 0 \Rightarrow \vec{F}_{12}$ a le même sens que $\vec{u}_{12}$



$q_1q_2 < 0 \Rightarrow \vec{F}_{12}$ a le sens opposé à $\vec{u}_{12}$



Unités : MKSA

F Newton $\rightarrow$ défini en mécanique
r en mètre $\rightarrow$ défini en mécanique
q en Coulomb $\rightarrow$ défini à partir du courant : $q=\int i.dt$

$\rightarrow$ $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}9875.10^9$ S.I. $\rightarrow K \approx 9.10^9\ SI$

$\rightarrow$ ε_0 est la permittivité du vide $\rightarrow$ $\varepsilon_0 = 8{,}854 . 10^{-12}$

Finalement :
$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{u}_{12}}$$

REMARQUES

1 - La loi de Coulomb s'applique à **2 charges ponctuelles**

2 - La loi de Coulomb s'applique à 2 charges ponctuelles placées **dans le vide**

$\Rightarrow$ Un milieu matériel va modifier la valeur de ε_0 :

Air ≈ Vide	Eau	Verre	Silicium
ε_0	79 ε_0	9 ε_0	12 ε_0

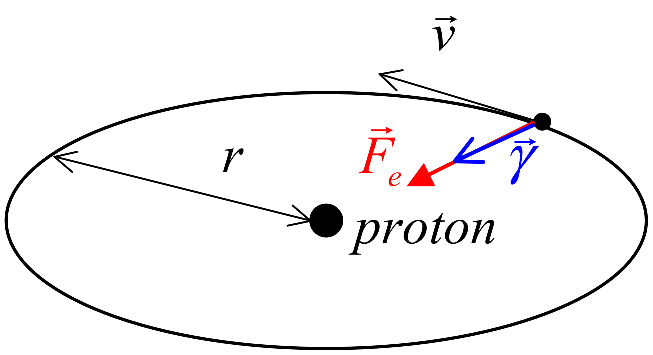
EXEMPLE : interaction entre un proton et un électron

Modèle de Bohr (atome d'hydrogène)

proton au repos + électron animé d'une vitesse $\vec{v}$

$$\vec{F}_e = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{N}$$

et $$\vec{\gamma} = \frac{v^2}{r}\vec{N}$$



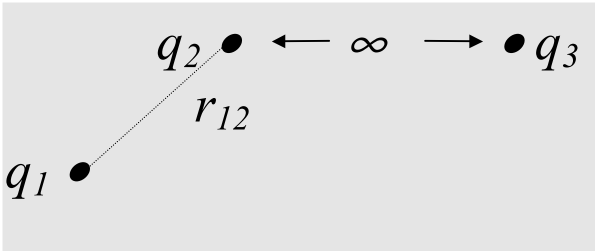
or $$\vec{F} = m_e\vec{\gamma} \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}}.e = 2.1\ 10^6 m/s$$

2.2. Principe de superposition

La force avec laquelle interagissent deux charges n'est pas affectée par la présence d'une troisième charge

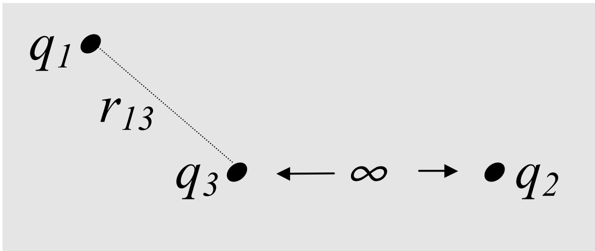
1ère configuration :

$$\vec{F}_{21} = K.\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}.\vec{u}_{21}$$



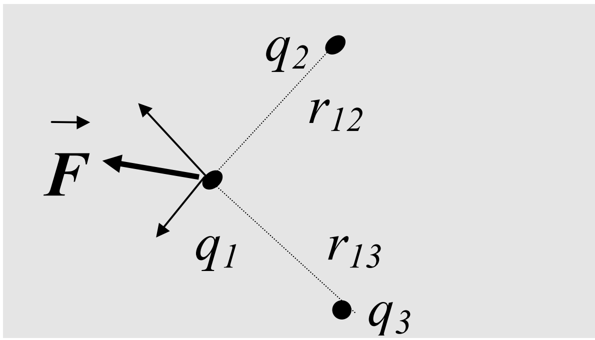
2ème configuration :

$$\vec{F}_{31} = K.\frac{q_1 q_2}{r_{13}^2}.\vec{u}_{31}$$



3ème configuration :

$$\vec{F} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$$

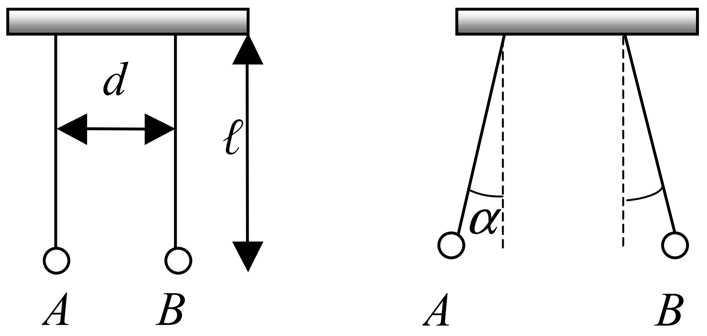


D'une manière plus générale : $\boxed{\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{i1}}$

→ ***loi de Coulomb et principe de superposition*** → ***base de l'électrostatique***

2.3. Exemples

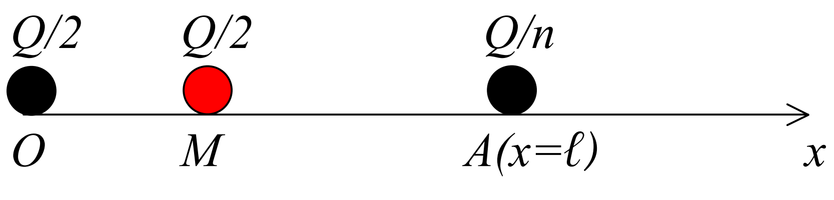
4.1 Pendule chargé $\rightarrow$ angle α de déviation à l'équilibre?



- angle α ?
- force sur A ?
- valeur de q ?

A.N.: $m = 0.1$g; $\ell = 10$cm ; $d = 1$cm ; $\alpha = 5°$

4.2 Equilibre des forces



- Force sur la boule M ?
- Equilibre ?

3. Le champ électrique

3.1. Charge ponctuelle

- on considère de nouveau le système de 2 charges q_1, q_2

- on exprime $\vec{F}_{12}$ à l'aide d'un nouveau vecteur :

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{u}_{12} = q_2.\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{u}_{12} = q_2\vec{E}}$$

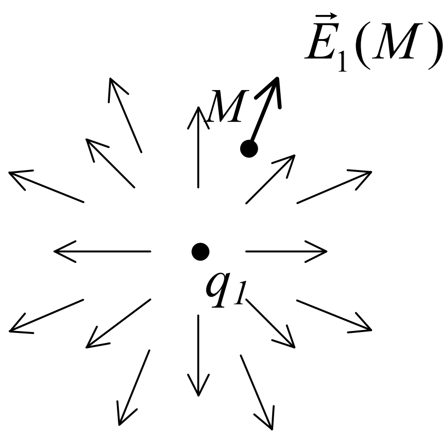
$\vec{E}_1$ représente le champ électrique créé par la charge q_1

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{u}_{12}}$$

---

la charge q_1 perturbe son environnement...

...le champ $\vec{E}_1$ caractérise cette perturbation



Si on place une charge q en M elle subit la force :

$$\vec{F} = q\vec{E}(M)$$

3.2. Système de *n* charges discrètes

ensemble de charges $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$
placées en des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$

Action de ce système sur une charge q_0 placée en $M\,(x, y, z)$?

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{0i}^2}.\vec{u}_{0i} \quad \Rightarrow \vec{F} = q_0 \,.\sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\, r_{0i}^2}.\vec{u}_{0i}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = q_0 .\sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i$$

$$\Rightarrow \vec{F} = q_0 .\, \vec{E}$$

$\rightarrow \vec{E}$ est le champ électrique (ou électrostatique)

du système de charges $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

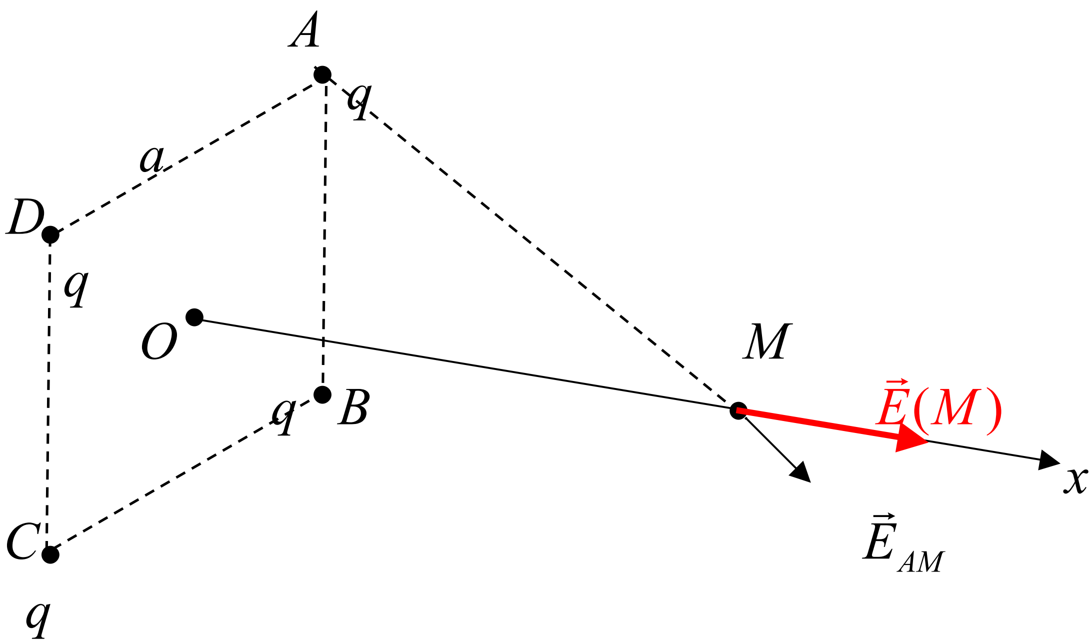
$$\boxed{\vec{E}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\, r_{0i}^2}.\vec{u}_{0i}}$$

système de charges $q_1, \ldots, q_n$ = **LA SOURCE** du champ électrique

3.3. Exemple

4 charges q placées aux 4 coins d'un carré imaginaire de côté a.
Champ électrique en M sur l'axe Ox ?

(axe $\perp$ au plan du carré et passant par son centre).



4. Le potentiel électrique

On peut caractériser la perturbation du milieu due à la présence de charges électriques par une fonction scalaire :

le potentiel électrostatique *V(x,y,z)*

4.1. • Potentiel créé par une charge *q*

ℓe potentiel en un point *M*,
situé à la distance r de la charge q est :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

4.2. • Potentiel créé par un système de *n* charges

ℓe potentiel en un point *M*
créé par ensemble de charges $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$
placées en des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ est :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_1^n \frac{q_i}{r_i}}$$

avec $r_i = \overline{M_iM}$

4.3. Relation entre potentiel et champ électrique

Champ électrique $\equiv$ variation du potentiel dans l'espace

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V}$$

définition

$$\boxed{\overrightarrow{grad}V : \left| \begin{array}{l} \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \\ \partial V / \partial z \end{array} \right.} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} : \left| \begin{array}{l} E_x = -\partial V / \partial x \\ E_y = -\partial V / \partial y \\ E_z = -\partial V / \partial z \end{array} \right.$$

Relation "inverse" :

• fonction potentiel

Si dans l'espace règne un champ électrique $\vec{E}(x, y, z)$
la fonction **potentiel** en un point $M(x,y,z)$ s'écrit :

$$\boxed{V(M) = -\int \vec{E}.d\vec{\ell}}$$

où $d\vec{\ell}$ est le vecteur "déplacement élémentaire" : $d\vec{\ell} : \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \qquad \vec{E}\bullet d\vec{\ell} = E_x.dx + E_y.dy + E_z.dz$$

$$\Rightarrow \qquad V(M) = -\int E_x.dx + E_y.dy + E_z.dz$$

Le calcul de V(M) fera apparaître une constante d'intégration :
$\Rightarrow$ le potentiel n'est défini qu'à une constante près

• Différence de potentiels

La différence de potentiels entre les points P_1 et P_2 s'écrit :

$$\boxed{\Delta V = V_{P_1P_2} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}.d\vec{\ell} = -(V_{P_2} - V_{P_1})}$$

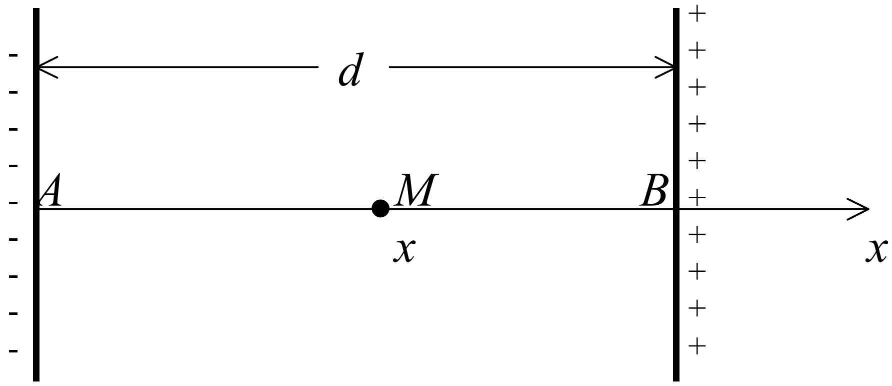
REM : pas de constante d'intégration

4.4. Exemples :

1. **Champ électrique entre 2 plans chargés**

- On montre que le champ électrique entre les 2 plans est homogène
- Par convention $\vec{E}$ est dirigé du **+** vers le **-** :

ici $\vec{E}$ est donc suivant -*Ax*: $\Rightarrow \quad \vec{E} = -E\vec{i}$



V_A $\qquad$ $V_B\ (>V_A)$

- Potentiel en *M(x)* :

$$V(M) = -\int \vec{E}.d\vec{\ell} = E.x + K$$

or $V(x=0) = V_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(M) = E.x + V_A}$

- Différence de potentiels entre les plaques :

$$V_{AB} = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{\ell} = \int_A^B E.dx \quad \Rightarrow \quad V_{AB} = E.d$$

---

2. un système de charges engendre : $V(x,y,z) = 3x^2 - y^3$

$$\vec{E} : \left| \begin{array}{l} E_x = -\partial V/\partial x = -6x \\ E_y = -\partial V/\partial y = 3y \\ E_z = -\partial V/\partial z = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{E} = -6x\vec{i} + 3y\vec{j}}$$

5. Energie potentielle d'interaction

5.1. Cas d'une source ponctuelle

Energie : capacité d'un système à fournir un travail
Travail : produit d'une force par le déplacement qu'elle engendre

On considère
- un espace repéré par (*Oxyz*)
- un champ électrique $\vec{E}(x, y, z)$
- une distribution de potentiels $V(x,y,z)$

ℓ'énergie potentielle d'une charge q placée en $M(x,y,z)$ est :

$$\boxed{U_P = q V(x,y,z)}$$

5.2. Cas d'une source ponctuelle

source du champ = charge ponctuelle $q_1 \rightarrow V_1(x,y,z)$ connue

$\rightarrow$ l'énergie potentielle d'une charge q_2 placée en $M(x,y,z)$ est :

$$\boxed{U_P(q_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}}$$

REMARQUE :
ℓ'énergie potentielle de la charge q_1 dans le champ créé par q_2 :

$$U_P(q_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_1}{r_{21}} = U_P(q_2)$$

On choisit d'écrire :
$$\boxed{U_P = \tfrac{1}{2} (q_1 V_2 + q_2 V_1)}$$

5.3. Energie potentielle d'un système de charges

Quelle énergie faut-il dépenser pour constituer le système de n charges ?

1ère charge q_1	$\rightarrow$	pas d'énergie		
2ème charge q_2	$\rightarrow$	énergie :	q_2V_1	ou q_1V_2
3ème charge q_3	$\rightarrow$	énergie :	$q_3(V_1+V_2)$	ou $V_3(q_1+q_2)$
- - - - - - - - - -	$\rightarrow$	- -		
nème charge q_n	$\rightarrow$	énergie :	$q_n(V_1+V_2+ \ldots +V_{n-1})$	
			ou $V_n(q_1+q_2+\ldots+q_{n-1})$	

énergie totale du système de charges :

$$U_P = \frac{1}{2}\sum_i q_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_j}{r_{ij}} \right)$$

ou encore

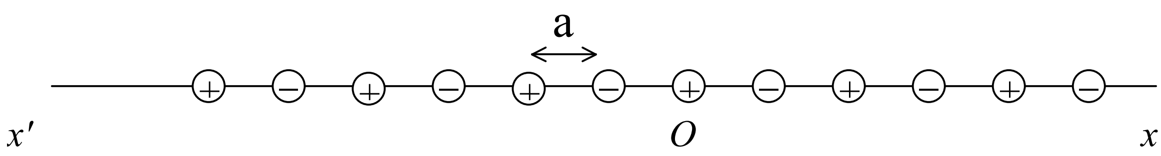
$$\boxed{U_P = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i}$$

V_i = pot. au pt P_i

5.4. Exemple

Chaîne quasi infinie d'ions régulièrement alignés

Chaque ion a un degré d'ionisation est de 1



- potentiel en O (sans l'ion) ?

développement de la fonction $\ln(1+x)=x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$

- énergie potentielle de l'ion placé en O ?

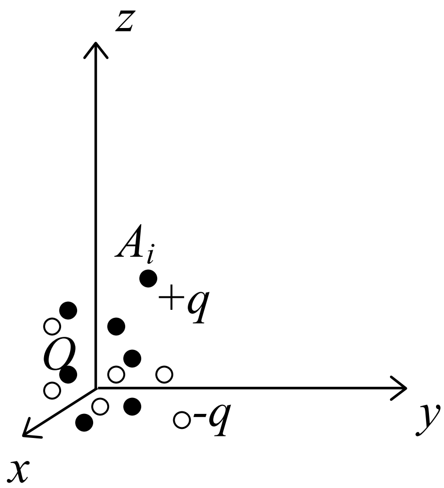
- énergie totale ?

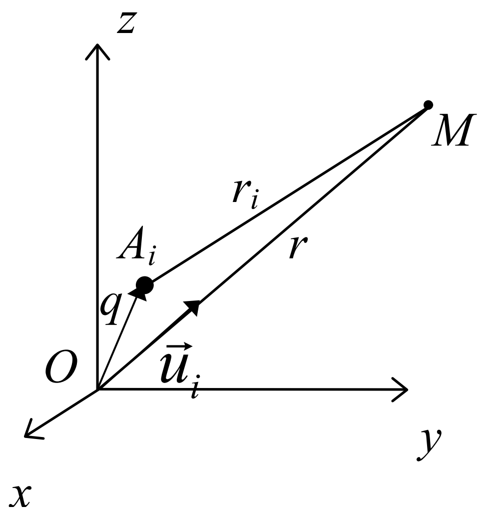
6. Dipôle électrostatique

6.1. Préambule

On considère :

- un ensemble de charges q_i (+ et -)
- placées en des points A_i,
- dans un volume fini,
- au voisinage d'un point O,





et 1 point M tel que :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_i$$

et $OM = r >> OA_i = a_i$

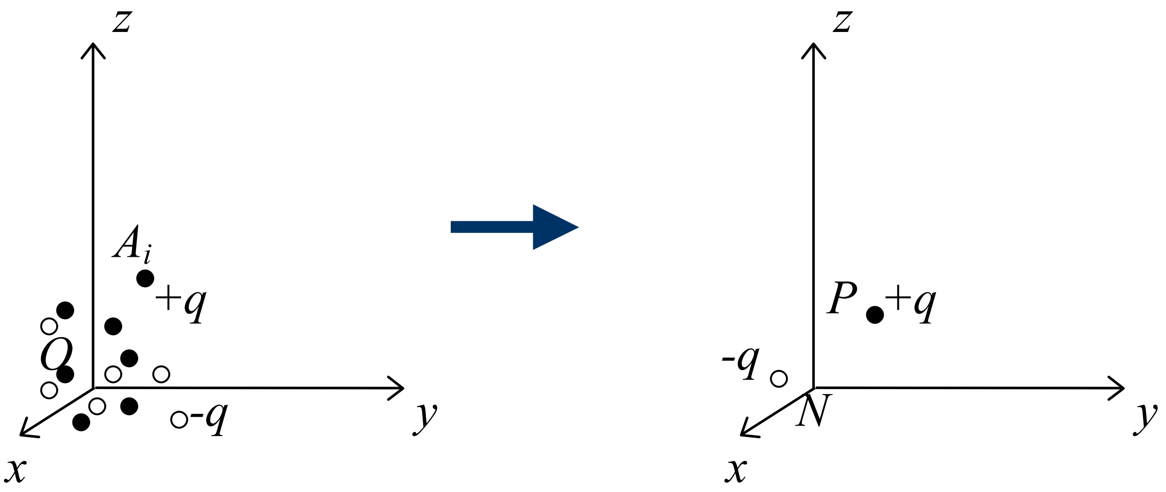
Potentiel *V(M)* ? : $V(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} . \sum_i \dfrac{q_i}{r_i}$

Si $\sum_i q_i = 0$ le problème se traite d'une façon particulière :

$\rightarrow$ $\boxed{\text{dipôle électrique}}$

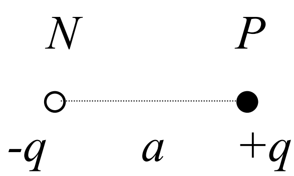
6.2. Moment dipolaire

Si $\sum_i q_i = 0$ on remplace le système de charges par 2 charges en N et P



On considère :

- un système de 2 charges $+q$ et $-q$
- $a = PN << PM$ ou NM



On définit : le **moment dipolaire** = le vecteur $\vec{p}$ défini par :

$$\boxed{\vec{p} = q\overrightarrow{NP}}$$

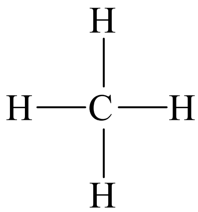
On note :

- le moment dipolaire s'exprime en $C.m$.

6.3. Dipôle moléculaire

Molécule à forte symétrie :

barycentre des charges + $\leftrightarrow$ barycentre des charges -



Molécule dans le cas général :

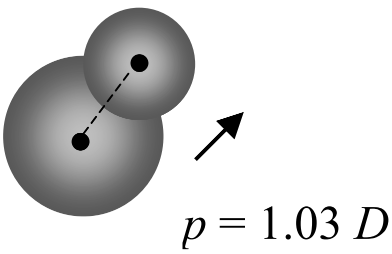
les 2 barycentres sont distincts, $\Rightarrow$ **molécules polaires**

$\rightarrow$ sont assimilables à des dipôles de moment dipolaire $\vec{p}$

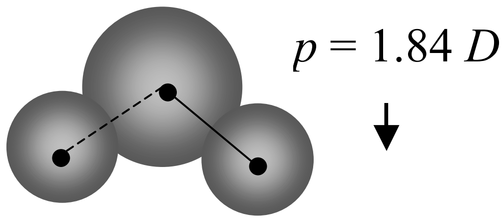
p s'exprime alors en *debye* (D) : $1\ D = 1/3\ .\ 10^{-29}\ C.m.$

Exemple :

Anhydride chlorhydrique



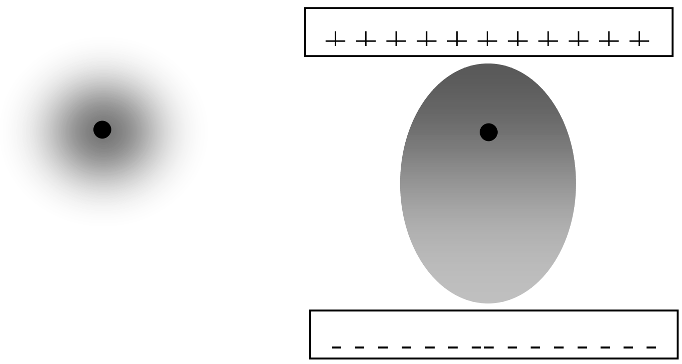
Eau



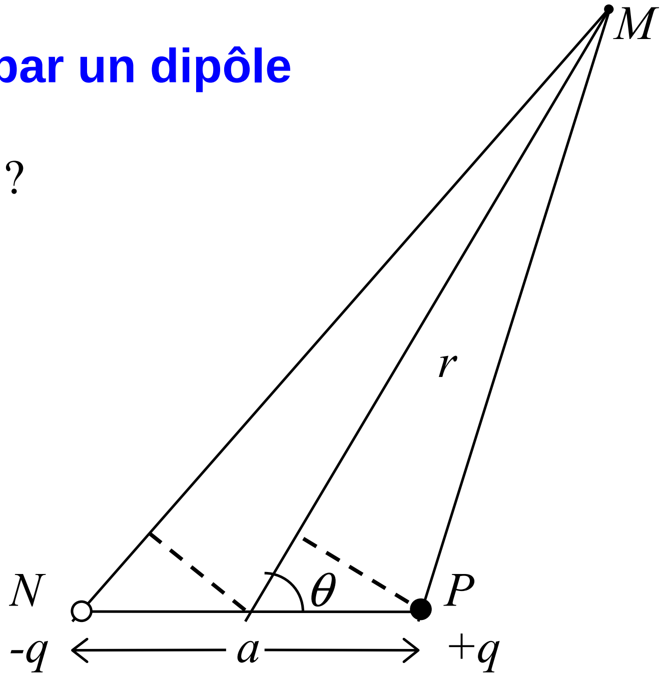
6.4. Moment dipolaire induit

Un champ électrique appliqué à une molécule non polaire

$\rightarrow$ **moment dipolaire induit**



6.5. Calcul du potentiel créé par un dipôle



Dipôle *NP* → potentiel en *M* ?

- coordonnées polaires
- origine en *O milieu de* NP
- droite *NP* = origine des angles

Définition du potentiel :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right)$$

Dans le cas d'un dipôle : $OM = r >> a$

$\Rightarrow \quad PM \approx r - (a/2)\cos\theta$

$\Rightarrow \quad PM \approx r(1 - (a/2r)\cos\theta)$

$\Rightarrow \quad NM \approx r + (a/2)\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad NM \approx r(1 + (a/2r)\cos\theta)$

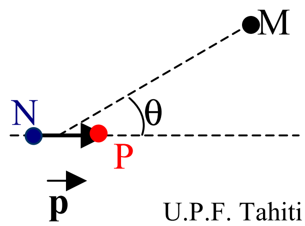
Taylor : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} + \ldots$ si x << 1 ⇒ D.L.

ici $a/r << 1 \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{a\cos\theta}{r^2}$ (*D.L.* au 1er ordre)

en introduisant $\vec{p}$ le moment dipolaire, on peut écrire :

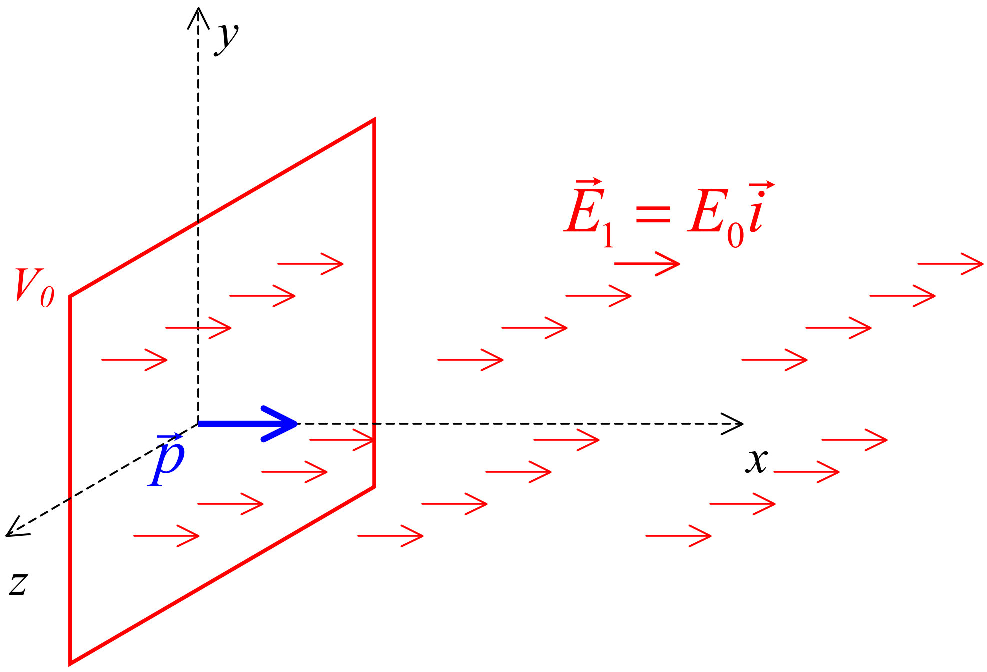
$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p\cos\theta}{r^2} \quad \text{soit} \quad \vec{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}.\vec{u}}{r^2}}$$

où ***u*** est le vecteur unitaire porté par *OM*.



6.6. Exemple : dipôle dans un champ uniforme.

- champ électrostatique uniforme $\vec{E}_1 = E_0\vec{i}$
- potentiel du plan yOz $(x = 0)$: $V = V_0$
- On place alors en O un dipôle de moment $\vec{p} = p\vec{i}$



- potentiel V en un point M de coordonnées (r, θ) ?

- de quoi se compose l'équipotentielle $V = V_0$?

- champ électrostatique total ***E ?***