STATISTIQUE DESCRIPTIVE

Abdelhak FAHSI

Département de Mathematiques
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia

Introduction générale

- Les statistiques = Collecte des données statistiques (Recensement ou sondage)
- La statistique = Traitement des données statistiques (méthodes mathématiques)

La statistique s’applique dans plusieurs domaines de différentes natures : démographie, économie, biologie, chimie, sociologie, médecine, pharmacie, agronomie, industrie, ...

La statistique comporte deux branches :

- La Statistique descriptive : Elle consiste à résumer, ordonner, présenter et analyser de façon claire des données statistiques relatives à une population donnée (échantillon) sous forme de tableaux, de graphiques ou de paramètres. (sans tirer de conclusion pour une population plus grande).

- La statistique mathématique : Elle permet graces aux méthodes mathématiques (lois de probabilité) de faire des prévisions et tirer des conclusions sur toute la population à partir des résultats recueillis sur un échantillon.

Étapes d'une étude statistique :

1. Collecte des données (les statistiques) :
   recueillir les informations adéquates sur un échantillon qui serviront de base à l'étude.
2. Traitement des données (la statistique) :
   - Statistique descriptive : techniques permettant de traiter les données recueillies, de les mettre sous forme de tableaux, de graphiques et de dégager les caractéristiques essentielles (moyenne, médiane, variance,...)
   - Statistique mathématique : techniques permettant de tirer des conclusions sur toute la population à partir de données partielles recueillis sur un échantillon.

Objectif du cours :

- Apprendre les principales techniques de la statistique descriptive à une dimension et à deux dimensions.
- Être capable de mettre en oeuvre ces techniques de manière appropriée dans un contexte donné.
- Manipuler les techniques de statistiques descriptives au moyen d'un language informatique (language R).

Plan du cours

1. Statistique descriptive à une dimension
   - I- Terminologie
   - II- Organisation des données
     - II.2- Tableaux statistiques
     - II.3- Représentations graphiques
   - III- Réduction des données
     - III.1- Paramètres de position
     - III.2- Paramètres de dispersion
     - III.3- Paramètres de forme
     - III.4- Paramètres de concentration
2. Statistique descriptive à deux dimensions
   - I- Tableau de contingence
   - II- Paramètres d'une série double
   - III- Ajustement linéaire

Chapitre 1
Statistique descriptive à une dimension

I- Terminologie

1. Population : Ensemble des personnes, objets ou éléments sur lesquels on veut effectuer l'étude.

2. Individu : Chacun des éléments de la population (unité statistique).

3. Echantillon : Groupe resreint d'individus prélevés dans la population définie au préalable.

Exemple

On veut étudier le poids de 100 enfants âgés de 1 à 5 ans.

- Population : les enfants âgés de 1 à 5 ans.
- Individu: chaque enfant âgé de 1 à 5 ans.
- Echantillon : les 100 enfants âgés de 1 à 5 ans.

4. Caractère (ou variable) : Caractéristique relative à chacun des individus de la population et sur laquelle on veut faire porter l'étude. Il est soit observé soit mesuré.

Les caractères (ou variables) sont désignés par une lettre X, Y, ...

Exemple
Le poids des enfants âgés de 1 à 5 ans
Le revenu mensuel des salariés d'une entreprise
La couleur des voitures vendues au Maroc en 2007
La puissance fiscale, etc ...

5. Série statistique : C'est une correspondance qui à chaque individu de la population étudiée fait associer une valeur du caractère étudié.

Les valeurs d'une série statistique pour un caractère X sont notées :

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(N)}$$

Exemple

On considère le caractère $X =$"état civil" de 20 personnes d'une entreprise.

On considère la codification : C=célibataire, M=marié(e), V=veuf(ve), D=divorcé(e).

On suppose la série statistique suivante :

M	M	D	C	C	M	C	C	C	M
c	M	V	M	V	D	C	C	D	M

On a : $x_{(1)} = M, x_{(2)} = M, x_{(3)} = D, \ldots, x_{(20)} = M,$

6. Modalités : Ce sont les différentes valeurs distinctes prises par le caractère.

Les modalités d'un caractère X sont notées :

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

k désigne le nombre de modalités du caractère.

Exemple

- le caractère "X =couleur" peut avoir comme modalités : noir, rouge, bleu, blanc, gris, autres.

- Le caractère "X =puissance fiscale (en CV)" peut avoir comme modalités : 6, 7, 8, 9, 10 et plus.

Remarque

Les modalités d'un caractère doivent être :

- Incompatibles : (chaque individu a une seule modalité).
- Exhaustives (tous les cas sont prévus).

On distingue deux types de caractère :

- Caractère qualitatif : C'est un caractère non mesurable. Les modalités ne sont pas des valeurs numériques.
- Caractère quantitatif : C'est un caractère mesurable. Les modalités sont toutes des valeurs numériques.

Pour chaque type de caractère, on distingue deux types :

Caractère qualitatif :

1. Caractère qualitatif ordinal : les modalités peuvent être ordonnées selon une certaine hiérarchie.
   Exemple
   Niveau d'étude: primaire, secondaire, supérieur.
   Etat mécanique d'une Voiture: mauvais, moyen, bon, excellent.

2. Caractère qualitatif nominal : les modalités ne peuvent pas être ordonnées: elles sont nommées mais pas ordonnées.
   Exemple
   Nationalité: marocaine, allemande, française
   Groupe sanguin: A, B, O, AB

Caractère quantitatif :

1. Caractère quantitatif discret : L'ensemble des valeurs possibles (modalités) est dénombrable. On dit aussi variable statistique discrète.
   Exemple
   Nombre d'enfants par famille, nombre d'étudiants par classe, . . .

2. Caractère quantitatif continu : L'ensemble des valeurs possibles (modalités) est continu. On dit aussi variable statistique continue.
   Exemple
   taille, poids, salaire, . . .

Remarque

- Lorsque le nombre des modalités d'un caractère quantitatif est élevé (supérieur à 15), on est généralement conduit à regrouper les modalités en classes de la forme

$$[x_i; x_{i+1}[, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

- Les classes $[x_i; x_{i+1}[$ peuvent avoir une même amplitude ou des amplitudes différentes.

Exemple

Le caractère "Revenus mensuels (en dh) des employés d'une entreprise" peut avoir comme modalités :
$[4000; 5000[$, $[5000; 6000[$, $[6000; 8000[$, 8000 et plus.

Règles de construction des classes

- Fixer un nombre de classes ni trop petit ni trop grand (généralement de 5 à 15).
- Choisir des bornes qui, autant que possible, permettront des calculs simples (de préférence, déterminer des classes d'amplitudes égales et multiples de 5, 10, 100, 1000).
- Considérer des classes adjacentes et, par convention, fermées à gauche et ouvertes à droite.

7. Effectif : L'effectif d'une modalité x_i, noté n_i, est le nombre d'individus présentant cette modalité.
L'effectif total, noté N, est le nombre total des individus de la population (appelé aussi taille de la population) :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = N$$

8. Fréquence ou proportion : La fréquence d'une modalité x_i, notée f_i, est le rapport $f_i = \dfrac{n_i}{N}$.

C'est la proportion des individus de la population présentant cette modalité.

Remarque

La fréquence f_i appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

Parfois, on note les fréquences en pourcentage (avec le symbole %) en les multipliant par 100.

La fréquence f_i en % appartient alors à l'intervalle $[0, 100]$.

Si le caractère est de type ordinal, on peut calculer les effectifs et les fréquences cumulés.

9. Effectif cumulé : L'effectif cumulé d'une modalité x_i, notée N_i, est le nombre d'individus de la population pour lesquels la valeur du caractère est inférieure ou égale à x_i :

$$N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j = N_{i-1} + n_i$$

On a $N_1 = n_1$ et $N_k = N$.

10. Fréquence cumulée : La fréquence cumulée d'une modalité x_i, notée F_i, est la proportion d'individus pour lesquels la valeur du caractère est inférieure ou égale à x_i :

$$F_i = \frac{N_i}{N} = \sum_{j=1}^{i} f_j = F_{i-1} + f_i$$

II- Organisation des données

II.1- Tableaux statistiques

Les tableaux statistiques consistent à résumer et présenter les données observées sous la forme numérique de distributions d'effectifs et/ou de fréquences :

Modalités	Effectifs n_i	Eff Cum N_i	Fréquences f_i	...
x_1	n_1	$N_1 = n_1$	f_1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_i	$N_i = N_{i-1} + n_i$	f_i	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_k	$N_k = N$	f_k	
Total	N		1	

Exemple1 : Dans un atelier de contrôle, on a enquêté sur l'état mécanique d'un échantillon aléatoire de 70 voitures.

Le contrôleur obtient la série statistique suivante :

Bon	Bon	Moyen	Bon	Bon	Mauvais
Excellent	Moyen	Bon	Bon	Excellent	Moyen
Moyen	Bon	Excellent	Mauvais	Bon	Bon
Bon	Mauvais	Excellent	Bon	Bon	Excellent
Bon	Moyen	Mauvais	Moyen	Excellent	Bon
Bon	Moyen	Excellent	Bon	Bon	Excellent
Mauvais	Moyen	Excellent	Bon	Bon	Moyen
Bon	Excellent	Bon	Moyen	Excellent	Bon
Moyen	Bon	Excellent	Bon	Mauvais	Moyen
Bon	Bon	Moyen	Bon	Bon	Moyen
Mauvais	Excellent	Bon	Moyen	Bon	
Bon	Moyen	Moyen	Bon	Excellent	

- Population étudiée : Echantillon de 70 voitures.
- Caractère étudié : État mécanique.
- Modalités : Mauvais, Moyen, Bon, Excellent.
- Type du caractère : Qualitatif ordinal.

Tableau statistique :

Etat Mécanique	Effectif n_i	Eff. cum. N_i	Fréquence f_i	Fréq. cum. F_i	...
Mauvais	7	7	0.1	0.1	
Moyen	17	24	0.24	0.34	
Bon	32	56	0.46	0.8	
Excellent	14	70	0.2	1	
Total	70		1		

Exemple2 : Dans un quartier composé de 50 familles, on enquête sur le nombre d'enfants par famille.
Les valeurs de la variable statistique sont :

1	0	5	2	2	1	2	1	2	4
4	7	1	3	2	5	4	6	3	1
1	6	1	3	8	1	3	5	2	3
3	0	3	4	6	4	1	7	2	0
2	0	1	2	2	3	2	5	6	2

- Population étudiée : Les 50 familles du quartier.
- Caractère étudié : nombre d'enfants.
- Modalités : 0, 1, 2, . . . ,8.
- Nature du caractère : Quantitatif discret.

Tableau statistique :

Nombre d'enfants	Effectif n_i	Eff. cum. N_i	Fréquence f_i	Fréq. cum. F_i	...
0	4	4	0.08	0.08	
1	10	14	0.2	0.28	
2	12	26	0.24	0.52	
3	8	34	0.16	0.68	
4	5	39	0.1	0.78	
5	4	43	0.08	0.86	
6	4	47	0.08	0.94	
7	2	49	0.04	0.98	
8	1	50	0.02	1	
Total	50		1		

Exemple3 : En mesurant la taille de 50 étudiants de la FST, on a obtenu les résultats suivants (en cm) :

152	151,5	160	165	170
159	168	161	164	156
158.5	167	157	170,5	161,5
169	156	158,5	160,5	152
156.5	166	152,5	170	165
154	170	165	155.5	166,5
162,5	152,5	168	169	158
157	161	154,5	162	158
153,5	157,5	163	155	153
160	169,5	154	161	162

- Population étudiée : Echantillon de 50 étudiants.
- Caractère étudié : La taille.
- Modalités : Le nombre des modalités observées étant élevé, il est donc nécessaire de les grouper en classes.
- Nature du caractère : Quantitatif continu.

On peut considérer les classes suivantes :

$[151; 155[$
$[155; 159[$
$[159; 163[$
$[163; 167[$
$[167; 171[$

Tableau statistique :

Taille (en cm)	Effectif n_i	Eff. cum. N_i	Fréquence f_i	Fréq. cum. F_i	...
$[151; 155[$	10	10	0.2	0.2	
$[155; 159[$	12	22	0.24	0.44	
$[159; 163[$	11	33	0.22	0.66	
$[163; 167[$	7	40	0.14	0.8	
$[167; 171[$	10	50	0.2	1	
Total	50		1		

II.2- Representations graphiques

- Bien qu'un tableau statistique résume toute l'information d'une distribution statistique, la représentation graphique permet de visualiser et de déceler les principales caractéristiques de la distribution statistique (tendance, symétrie, dispersion, concentration, . . .).

- La représentation graphique des données relatives à un caractère repose sur la proportionnalité des longueurs ou des aires aux effectifs (ou aux fréquences) des différentes modalités du caractère.

- Suivant le type du caractère étudié, on utilise différents modes de représentations graphiques.

1. Caractère qualitatif :

a. Diagramme en tuyaux d'orgue (ou en rectangles) :

On représente chaque modalité par un rectangle dont la hauteur est égale à l'effectif (ou à la fréquence) de la modalité et dont la base est constante

1. Caractère qualitatif :

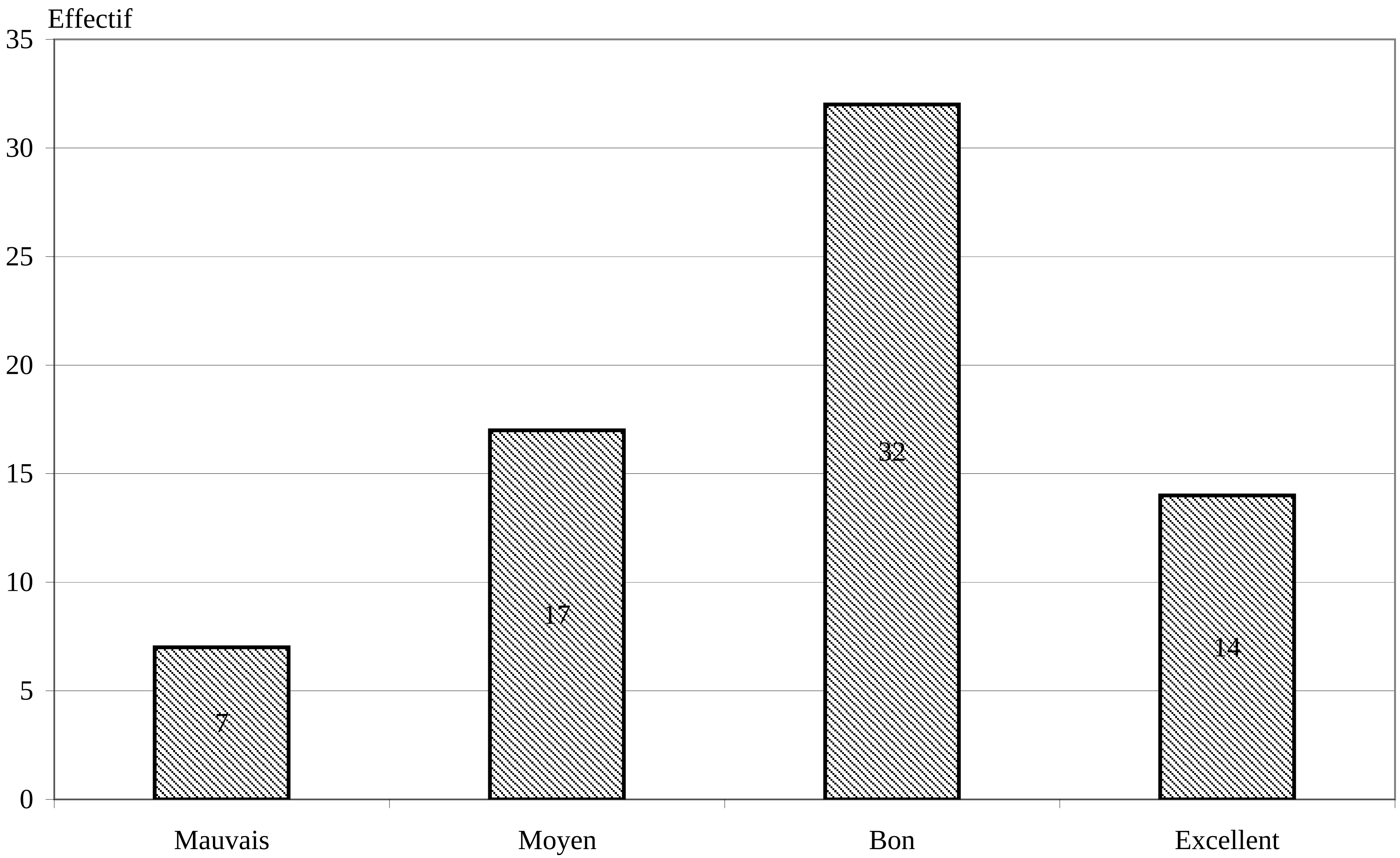
Exemple1 : état mécanique de 81 voitures

Etat Mécanique	Effectif n_i	Fréquence f_i
Mauvais	7	0.1
Moyen	17	0.24
Bon	32	0.46
Excellent	14	0.2
Total	70	1

1. Caractère qualitatif :

Voir GraphExcel1

Figure: Diagramme en "tuyaux d'orgue".


Effectif
35
30
25
20
15
10
5
0
7
17
32
14
Mauvais
Moyen
Bon
Excellent

1. Caractère qualitatif :

b. Diagramme circulaire (ou sectoriel) :

Chaque modalité est représentée par un secteur dont l'angle est proportionnel à l'effectif correspondant. La totalité de la circonférence (360°) correspond à l'effectif total.

1. Caractère qualitatif :

Exemple1 : état mécanique de 81 voitures

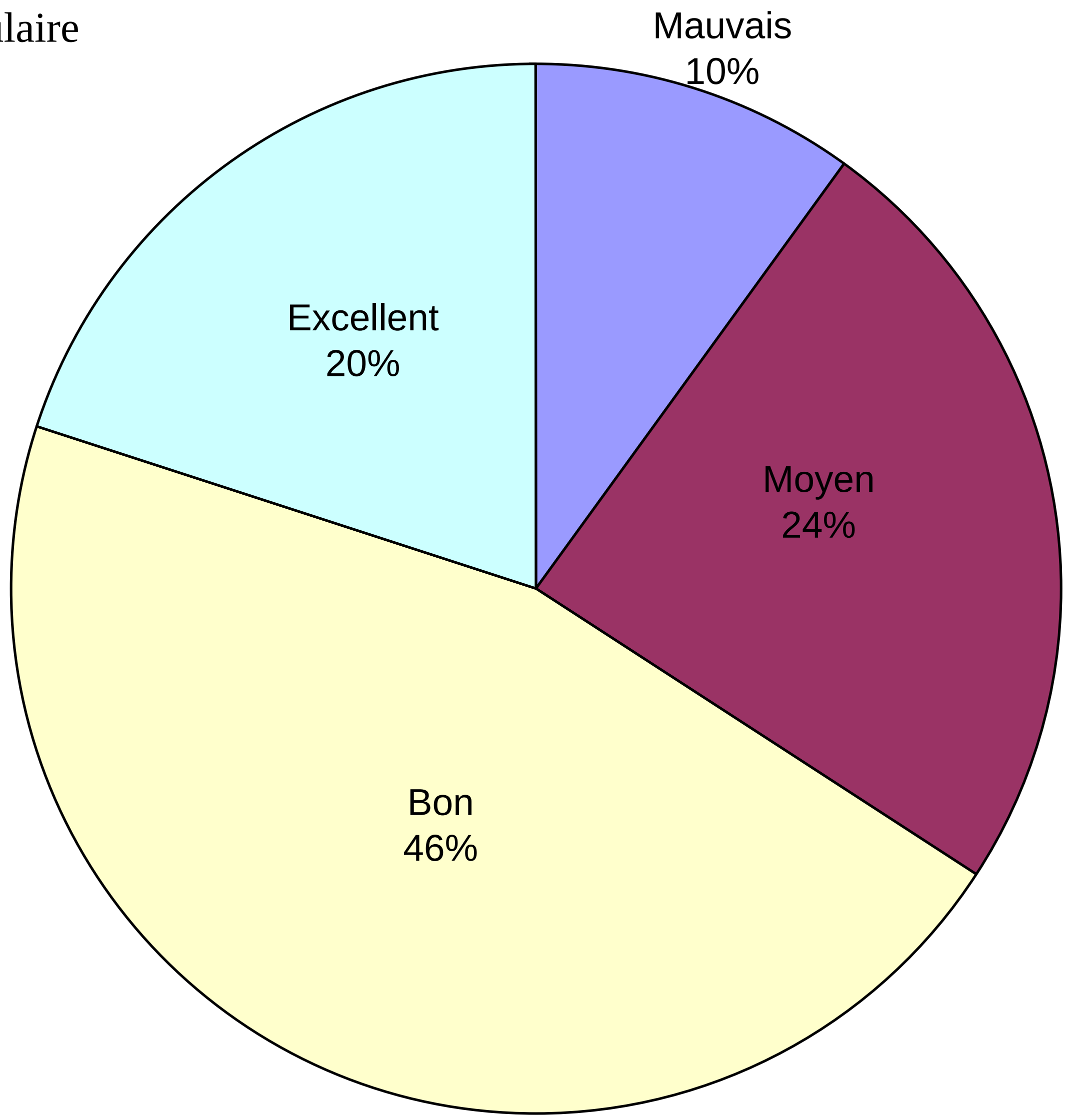
Etat Mécanique	Effectif n_i	Fréquence f_i	Angle $\alpha_i = 360 \times f_i$
Mauvais	7	0.1	36°
Moyen	17	0.24	87.4°
Bon	32	0.46	164.6°
Excellent	14	0.2	72°
Total	70	1	360°

1. Caractère qualitatif :

Voir GraphExcel2

Figure: Diagramme circulaire.

Diagramme circulaire



A. Fahsi

1. Caractère qualitatif ordinal

c. Diagramme en rectangles des effectifs cumulés :

Pour un caractère qualitatif ordinal, on peut tracer le diagramme en rectangles des effectifs cumulés :

Soit $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ les modalités ordonnées du caractère.

On représente chaque modalité par un rectangle dont la hauteur est égale à l'effectif cumulé (ou à la fréquence cumulée) de la modalité et dont la base est constante.

1. Caractère qualitatif ordinal

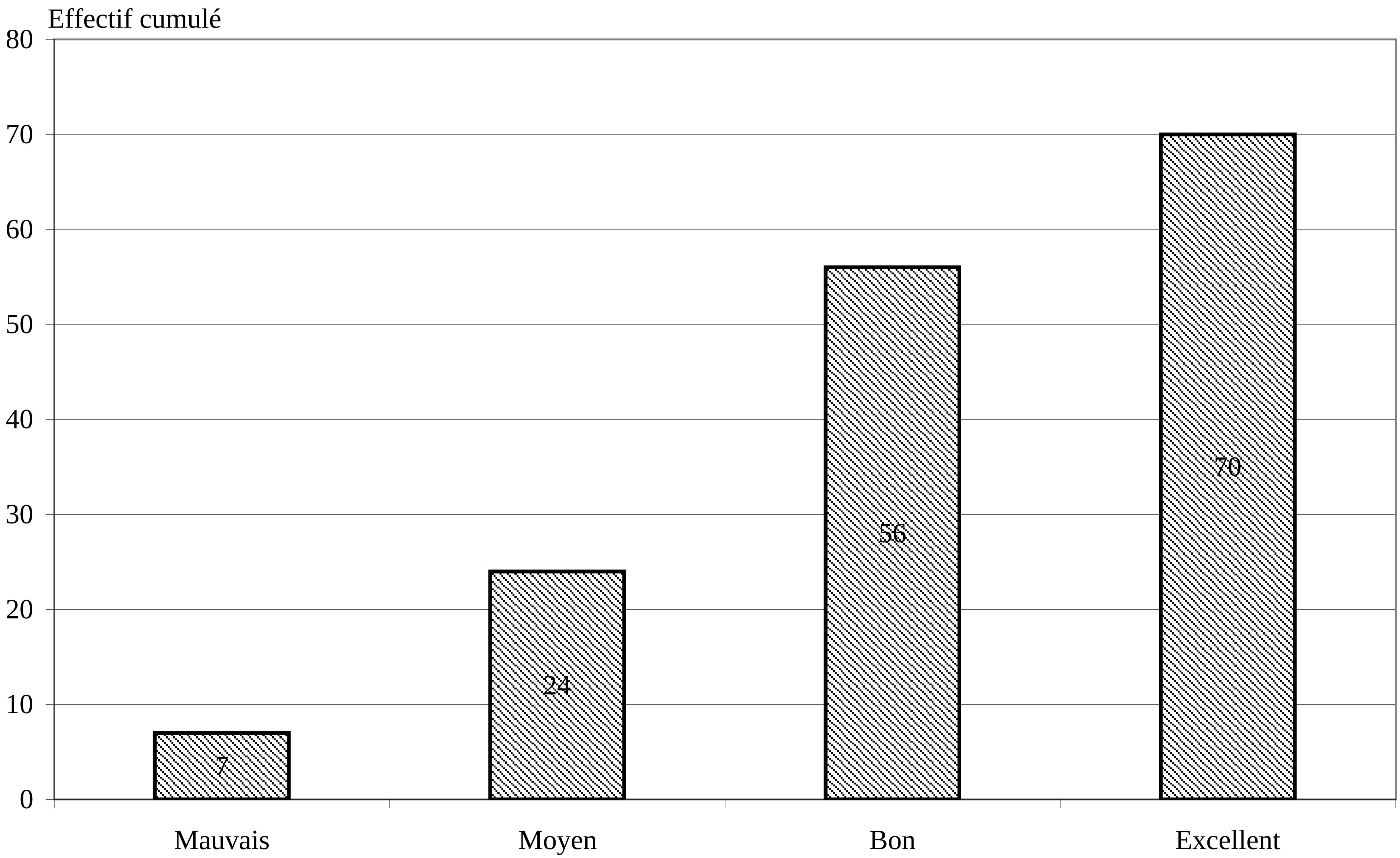
Exemple1 : état mécanique de 81 voitures

Etat Mécanique	Effectif n_i	Eff. cum. N_i	Fréquence f_i	Fréq. cum. F_i
Mauvais	7	7	0.1	0.1
Moyen	17	24	0.24	0.34
Bon	32	56	0.46	0.8
Excellent	14	70	0.2	1
Total	70		1	

1. Caractère qualitatif ordinal

Voir GraphExcel2

Figure: Diagramme en rectangles des effectifs cumulés.


Effectif cumulé
80
70
60
50
40
30
20
10
0
7
24
56
70
Mauvais
Moyen
Bon
Excellent

2. Caractère quantitatif discret :

a. Diagramme en bâtonnets :

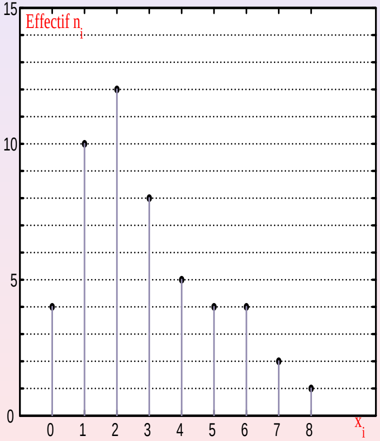
Chaque modalité est représentée par un trait vertical (bâtonnet) dont la hauteur est égale à l'effectif (ou à la fréquence) de la modalité.

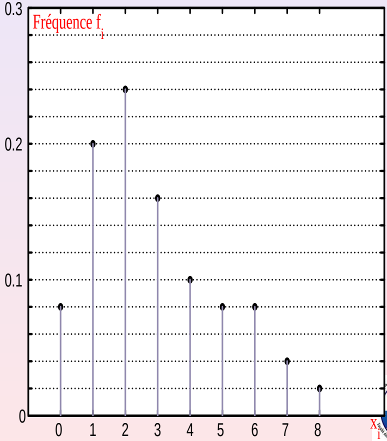
2. Caractère quantitatif discret :

Exemple2 : Nombre d'enfants par famille

Nombre d'enfants	Effectif n_i	Eff. cum. N_i	Fréquence f_i	Fréq. cum. F_i	...
0	4	4	0.08	0.08	
1	10	14	0.2	0.28	
2	12	26	0.24	0.52	
3	8	34	0.16	0.68	
4	5	39	0.1	0.78	
5	4	43	0.08	0.86	
6	4	47	0.08	0.94	
7	2	49	0.04	0.98	
8	1	50	0.02	1	
Total	50		1		

2. Caractère quantitatif discret :





2. Caractère quantitatif discret :

b. Polygone de fréquences :

Le polygone de fréquences est construit en joignant par des segments de droites les sommets des bâtons du diagramme en bâtons.

2. Caractère quantitatif discret :

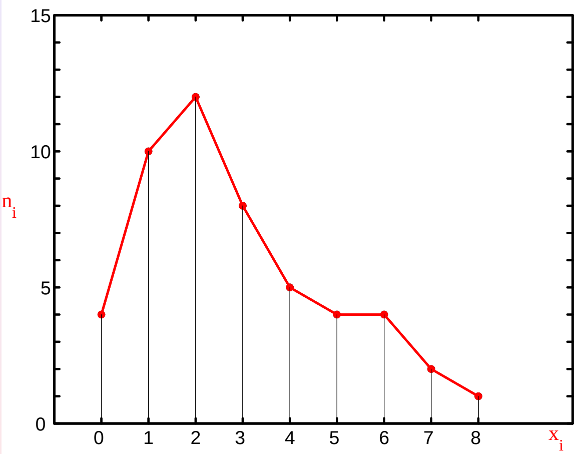


Figure: Polygone de fréquences.

2. Caractère quantitatif discret :

c. Courbe cumulative - Fonction de répartition :

Soient $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ les modalités ordonnées du caractère.

À partir des fréquences cumulées F_i, on définit la fonction de répartition $F(x)$, définie de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$, par :

$$\begin{array}{lll} F(x) = 0, & \text{si} & x < x_1 \\ F(x) = F_i, & \text{si} & x_i \leq x < x_{i+1} \quad (1 \leq i \leq k-1) \\ F(x) = 1, & \text{si} & x \geq x_k \end{array}$$

2. Caractère quantitatif discret :

La courbe cumulative (ou la courbe des fréquences cumulées) est la représentation graphique de la fonction de répartition $F(x)$.

2. Caractère quantitatif discret :

Remarque :

La courbe cumulative est aussi la représentation graphique des effectifs cumulés. On trace alors la fonction $G(x)$ définie de $\mathbb{R}$ vers $[0, N]$ par :

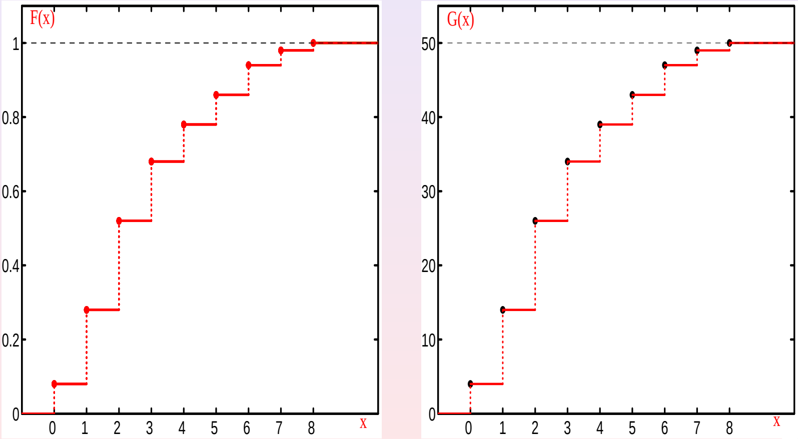
$$\begin{array}{lll} G(x) = 0, & \text{si} & x < x_1 \\ G(x) = N_i, & \text{si} & x_i \leq x < x_{i+1} \quad (1 \leq i \leq k-1) \\ G(x) = N, & \text{si} & x \geq x_k \end{array}$$

2. Caractère quantitatif discret :

Exemple2 : Nombre d'enfants par famille

Nombre d'enfants	Effectif n_i	Eff. cum. N_i	Fréquence f_i	Fréq. cum. F_i	...
0	4	4	0.08	0.08	
1	10	14	0.2	0.28	
2	12	26	0.24	0.52	
3	8	34	0.16	0.68	
4	5	39	0.1	0.78	
5	4	43	0.08	0.86	
6	4	47	0.08	0.94	
7	2	49	0.04	0.98	
8	1	50	0.02	1	
Total	50		1		

2. Caractère quantitatif discret :



2. Caractère quantitatif discret :

Remarque :

- $F(x)$ représente la proportion d'individus ayant une modalité inférieure ou égale à x.

- $G(x)$ représente le nombre d'individus ayant une modalité inférieure ou égale à x.

3. Caractère quantitatif continu :

a. Histogramme - Polygone des fréquences :

Les modalités sont présentées sous forme de classes $[x_i; x_{i+1}[$, $1 \leq i \leq k$.

Dans l'histogramme, chaque modalité $[x_i; x_{i+1}[$ du caractère est représentée par un rectangle dont la base a_i est égale à l'amplitude de la classe ($a_i = x_{i+1} - x_i$) et dont la hauteur h_i est telle que la surface $S_i = a_i \times h_i$ du rectangle est proportionnelle à l'effectif n_i (ou à la fréquence f_i) de la classe :

$$S_i = Cte \times n_i$$

$$S_i = Cte \times f_i$$

3. Caractère quantitatif continu :

Remarque :

On distingue deux cas :

1er cas : Toutes les classes ont une même amplitude a.

Dans ce cas, on représente chaque modalité par un rectangle dont la hauteur est égale à l'effectif (ou à la fréquence) de la modalité. La base de tous les rectangles étant la même (égale à l'amplitude a).

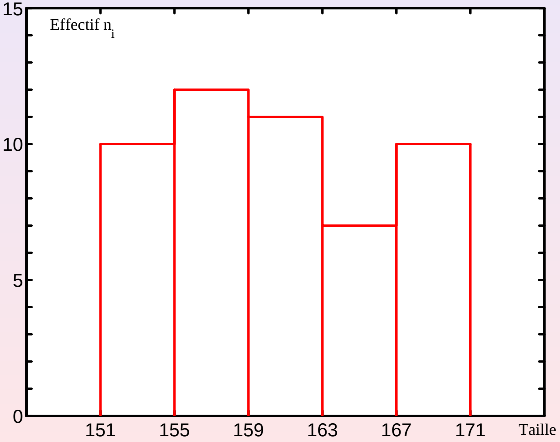
3. Caractère quantitatif continu :

Exemple : Taille des étudiants

Taille (en cm)	Effectif n_i	Eff. cum. N_i	Fréquence f_i	Fréq. cum. F_i	...
$[151; 155[$	10	10	0.2	0.2	
$[155; 159[$	12	22	0.24	0.44	
$[159; 163[$	11	33	0.22	0.66	
$[163; 167[$	7	40	0.14	0.8	
$[167; 171[$	10	50	0.2	1	
Total	50		1		

3. Caractère quantitatif continu :

Histogramme : Toutes les classes ont une même amplitude.



3. Caractère quantitatif continu :

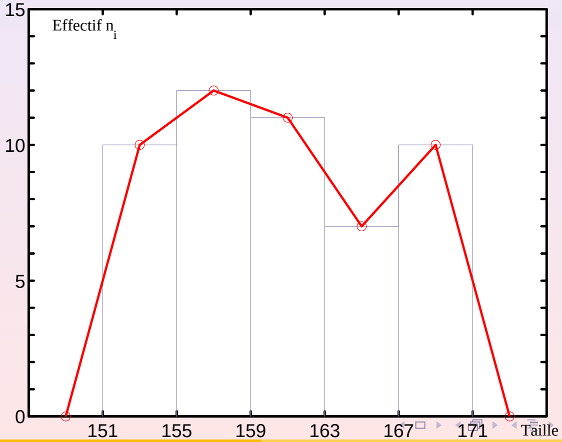
Polygone des fréquences :

Lorsque toutes les classes ont une même amplitude, le polygone des fréquences est construit en joignant par des segments de droites les milieux des côtés supérieurs des rectangles dans l'histogramme.

Les extrémités rejoignent l'axe des abscisses.

3. Caractère quantitatif continu :

Polygone des fréquences : Toutes les classes ont une même amplitude *a*.



3. Caractère quantitatif continu :

2ème cas : Les classes n'ont pas toutes la même amplitude.

Dans ce cas, on utilise les densités d'effectif

$$d_i^e = \frac{n_i}{a_i}$$

ou les densités de fréquence

$$d_i^f = \frac{f_i}{a_i}$$

3. Caractère quantitatif continu :

Les classes n'ont pas toutes la même amplitude :

Pour construire l'histogramme, chaque modalité $[x_i; x_{i+1}[$ est représentée par un rectangle dont la base est égale à l'amplitude a_i de la classe $[x_i; x_{i+1}[$ et dont la hauteur h_i est proportionnelle à la densité d'effectif d_i^e (ou à la densité de fréquence d_i^f) correspondante.

$$h_i = C \times \frac{n_i}{a_i}$$

ou

$$h_i = C \times \frac{f_i}{a_i}$$

3. Caractère quantitatif continu :

C est une constante de proportionnalité.

h_i est appelée effectif corrigé (ou fréquence corrigée) de la modalité $[x_i; x_{i+1}[$.

Le choix de la constante C est arbitraire (on peut prendre $C = 1$ par exemple).

Cependant, pour simplifier les calculs et/ou pour tracer le polygone des fréquences, il faut choisir C égale au plus grand diviseur commun des amplitudes a_i.

3. Caractère quantitatif continu :

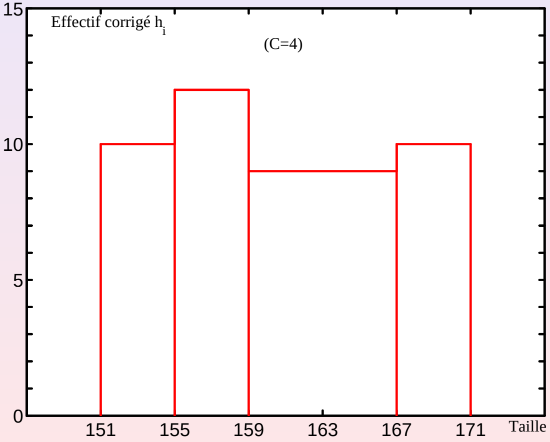
Exemple3 : Taille des étudiants (les classes n'ont pas toutes la même amplitude)

Taille (en cm)	a_i (en cm)	Effectif n_i	Eff. corrigé h_i	Fréq. f_i	Fréq. corrigée h_i
$[151; 155[$	4	10	10	0.2	0.2
$[155; 159[$	4	12	12	0.24	0.24
$[159; 167[$	8	18	9	0.36	0.18
$[167; 171[$	4	10	10	0.2	0.2
Total		50		1	

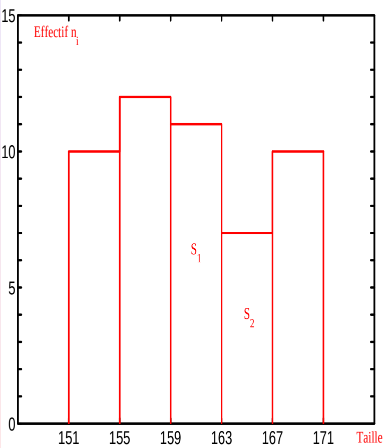
$$C = PGDC(a_i) = 4, \quad (h_i = C \times \frac{n_i}{a_i}).$$

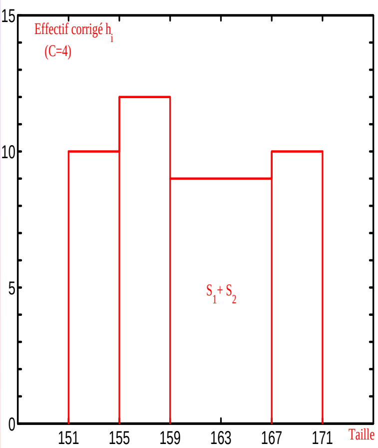
3. Caractère quantitatif continu :

2ème cas : Histogramme avec effectif corrigé.



3. Caractère quantitatif continu :





3. Caractère quantitatif continu :

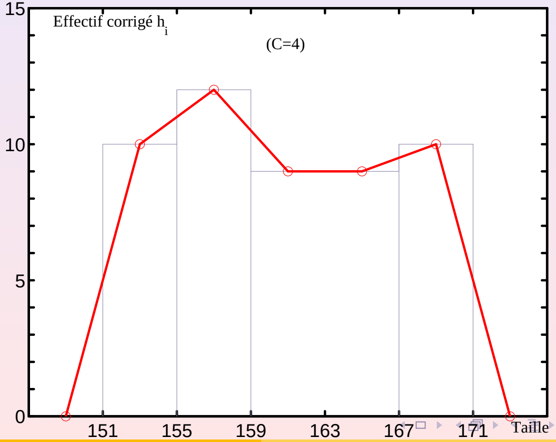
Polygone des fréquences : les classes n'ont pas la même amplitude.

Soit $C = PGCD(a_i)$.
Toutes les a_i sont des multiples de C ($a_i = k_i \times C$).

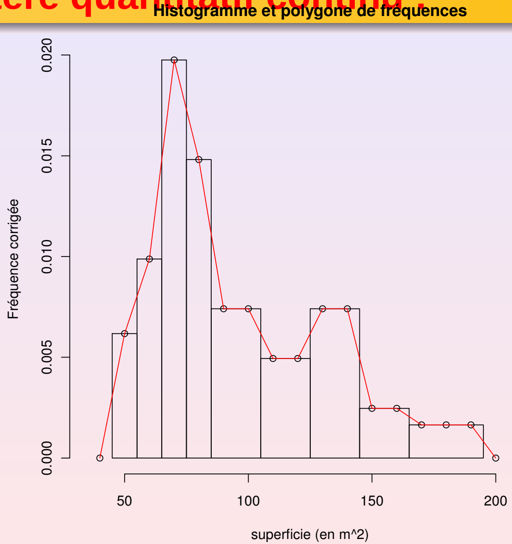
Pour construire le polygone des fréquences, on partage chaque classe d'amplitude $a_i = k_i \times C$ en k_i classes de même amplitude C. Puis, on trace les milieux des sommets des rectangles de base C et de hauteur h_i et on joint ces milieux par des segments de droites.
Les extrémités du polygone rejoignent l'axe des abscisses.

3. Caractère quantitatif continu :

Polygone des fréquences : Les classes n'ont pas la même amplitude.



3. Caractère quantitatif continu :



3. Caractère quantitatif continu

b. Courbe cumulative - Fonction de répartition :

La fonction de répartition, notée $F(x)$, est définie de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$, par :

$$
\begin{array}{lll}
F(x) = 0 & \text{si} & x \leq x_1 \\
F(x) = F_{i-1} + \dfrac{F_i - F_{i-1}}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) & \text{si} & x \in [x_i ; x_{i+1}[;\ 1 \leq i \leq k \\
F(x) = 1 & \text{si} & x \geq x_{k+1}
\end{array}
$$

avec $F_0 = 0$ et F_i est la fréquence cumulée de la modalité $[x_i ; x_{i+1}[, \quad 1 \leq i \leq k$.

3. Caractère quantitatif continu

Comme pour le cas discret, la courbe cumulative (ou la courbe des fréquences cumulées) est la représentation graphique de la fonction de répartition $F(x)$.

3. Caractère quantitatif continu

Remarque

- On a la fréquence cumulée F_i de la classe $[x_i ; x_{i+1}[$ est égale à la valeur de $F(x)$ au point x_{i+1}

$$F_i = F(x_{i+1})$$

- La courbe cumulative est construite en joignant par des segments de droites les points de coordonnées (x_{i+1}, F_i).

3. Caractère quantitatif continu

Remarque :

La courbe cumulative est aussi la représentation graphique des effectifs cumulés. On trace alors la fonction, notée $G(x)$, définie de $\mathbb{R}$ vers $[0, N]$ par :

$$\begin{array}{lll} G(x) = 0 & \text{si} & x \leq x_1 \\ G(x) = N_{i-1} + \dfrac{N_i - N_{i-1}}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) & \text{si} & x \in [x_i ; x_{i+1}];\ 1 \leq i \leq k \\ G(x) = 1 & \text{si} & x \geq x_{k+1} \end{array}$$

avec N_i = effectif cumulé de la modalité $[x_i ; x_{i+1}[$, $1 \leq i \leq k$.
$N_0 = 0$

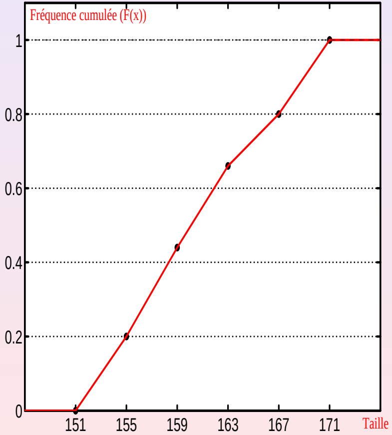
La courbe cumulative peut être construite en joignant par des segments de droites les points de coordonnées (x_{i+1}, N_i).

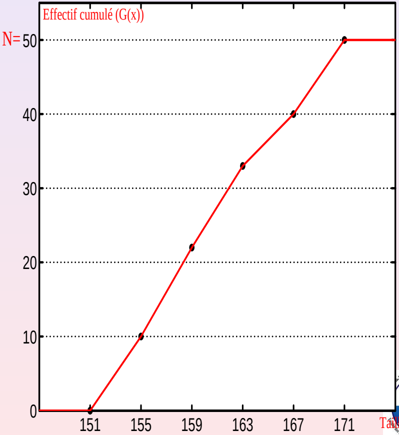
3. Caractère quantitatif continu

Exemple3 : Taille des étudiants

Taille (en cm)	Effectif n_i	Eff. cum. N_i	Fréquence f_i	Fréq. cum. F_i	...
$[151; 155[$	10	10	0.2	0.2	
$[155; 159[$	12	22	0.24	0.44	
$[159; 163[$	11	33	0.22	0.66	
$[163; 167[$	7	40	0.14	0.8	
$[167; 171[$	10	50	0.2	1	
Total	50		1		

3. Caractère quantitatif continu





3. Caractère quantitatif continu

Remarque

- La fonction de répartition $F(x)$, définie pour toute valeur de x, représente la proportion (ou la fréquence) des individus de la population pour lesquels la valeur du caractère est inférieure ou égale à x.
- La fonction de répartition des effectifs $G(x)$, définie pour toute valeur de x, représente le nombre des individus de la population pour lesquels la valeur du caractère est inférieure ou égale à x.
- $F(x)$ (resp. $G(x)$) est continue, croissante passant progressivement de 0 à 1 (resp. de 0 à N).
- $F(x) = \dfrac{G(x)}{N}$

III- Réduction des données statistiques

- Les tableaux statistiques et les représentations graphiques donnent une vue globale et détaillée de la distribution d'un caractère dans une population.
- Le but de la statistique descriptive est aussi de réduire et résumer les données d'une distribution à l'aide des paramètres ou synthétiseurs.

Il existe quatre types de paramètres :

1. Paramètres de position (ou de tendance centrale)
2. Paramètres de dispersion
3. Paramètres de forme
4. Paramètres de concentration

III- Réduction des données statistiques

III.1- Paramètres de position

Appelés aussi paramètres de tendance centrale ou de localisation, ils permettent de savoir autour de quelles valeurs se situent les valeurs d'une variable statistique.

1- Le mode

Définition

Le mode, noté M_o, est la valeur du caractère qui admet le plus grand effectif.
C'est la valeur du caractère la plus fréquente.

Remarque :

- Le mode peut être calculé pour tous les types de caractère.
- Pour un caractère continu, on définit d'abord la classe modale qui correspond à l'effectif corrigé le plus élevé.

Détermination pratique :

a. Cas d'un caractère qualitatif :

Le mode correspond à l'effectif le plus élevé.
Il correspond au maximum du diagramme en "tuyaux d'orgue".

Exemple1 :

Etat Mécanique	Effectif n_i
Mauvais	7
Moyen	17
Bon	32
Excellent	14
Total	70

L'effectif le plus élevé correspond à la modalité "Bon".
Donc, le mode est $M_o = Bon$.

b. Cas d'un caractère discret :

Le mode correspond tout simplement à l'effectif le plus élevé.
Il correspond au maximum du diagramme en bâtons.

Exemple2 :

Nombre d'enfants	Effectif n_i
0	4
1	10
2	12
3	8
4	5
5	4
6	4
7	2
8	1
Total	50

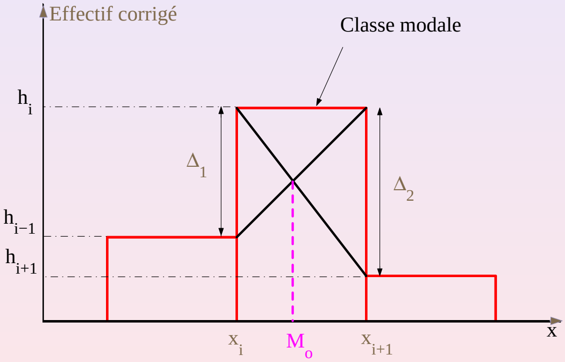
$$M_o = 2$$

c. Cas d'un caractère continu :

On définit d'abord la classe modale qui correspond à l'effectif corrigé le plus élevé.
La classe modale correspond donc au maximum de l'histogramme.

La classe modale $[x_i, x_{i+1}[$ étant déterminée, On détermine la valeur du mode M_o en tenant compte des effectifs corrigés des deux classes adjacentes à la classe modale par la méthode suivante :

Histogramme



On a :

$$M_o = x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

avec $\Delta_1 = h_i - h_{i-1}, \quad \Delta_2 = h_i - h_{i+1}$

Exemple3 : Taille des étudiants

Taille (en cm)	Effectif n_i
$[151; 155[$	10
$[155; 159[$	12
$[159; 163[$	11
$[163; 167[$	7
$[167; 171[$	10
Total	50

Dans cet exemple les classes ont toutes la même amplitude, on n'a pas besoin d'utiliser les densités. On utilise les effectifs :

La classe modale est : $[155, 159[$.
On a :

$$\Delta_1 = 12 - 10 = 2$$

$$\Delta_2 = 12 - 11 = 1$$

d'où $\quad M_o = 155 + 4\frac{2}{2+1} = 157.66 \text{ cm}$

Exemple3 : Taille des étudiants (les classes n'ont pas toutes la même amplitude)

Taille (en cm)	Effectif n_i	Amplitude a_i (en cm)	Eff. corrigé h_i
$[151; 155[$	10	4	10
$[155; 159[$	12	4	12
$[159; 167[$	18	8	9
$[167; 171[$	10	4	10
Total	50		

La classe modale est $[155; 159[$ (c'est la classe qui admet la plus grande densité). On a :

$$\Delta_1 = 12 - 10 = 2$$

$$\Delta_2 = 12 - 9 = 3$$

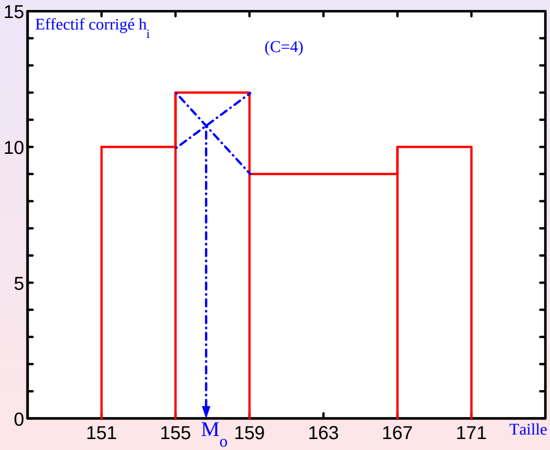
Donc

$$M_o = 155 + 4\frac{2}{2+3}$$

Le mode de cette distribution est donc :

$$M_o = 156.6\ cm$$

Détermination graphique :



2- La médiane

Définition

La médiane d'un caractère ordinal, notée M_e, est la valeur centrale de la série statistique ordonnée.

Cette définition n'a de sens que si les modalités sont toutes ordonnées par ordre croissant.

Remarque

- La médiane M_e partage la population en deux sous populations de même effectif : 50% de la population ont des modalités $\leq M_e$ et 50% de la population ont des modalités $\geq M_e$.
- $M_e = F^{-1}(\frac{1}{2}) = G^{-1}(\frac{N}{2})$
- La médiane peut être calculées sur des variables quantitatives et sur des variables qualitatives ordinales.

Détermination pratique :

a. Cas d'une variable discrète :

Soient $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ les valeurs, ordonnée par ordre croissant, d'une série statistique discrète

- Si N est impair, la médiane est la valeur centrale de rang $\frac{N+1}{2}$:

$$M_e = x_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}$$

- Si N est pair, On prend la moyenne entre les deux valeurs centrales de rang respectifs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$:

$$M_e = \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{N}{2}\right)} + x_{\left(\frac{N}{2}+1\right)}\right)$$

Autrement dit :

Si $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont les modalités, ordonnée par ordre croissant, du caractère.

- Si N est impair, la médiane est la modalité d'effectif cumulé $\frac{N+1}{2}$:
- Si N est pair, On prend la moyenne entre les deux modalités d'effectif cumulé respectifs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$:

Exemple :

Soit un échantillon de 10 personnes dont les poids (en Kg) sont :

$$45 - 68 - 89 - 74 - 62 - 56 - 49 - 52 - 63$$

La série ordonnée par ordre croissant :

$$\underbrace{45 - 49 - 52 - 55 - 56}_{5} \qquad \uparrow \qquad \underbrace{62 - 63 - 68 - 74 - 89}_{5}$$

médiane

La médiane est donc :

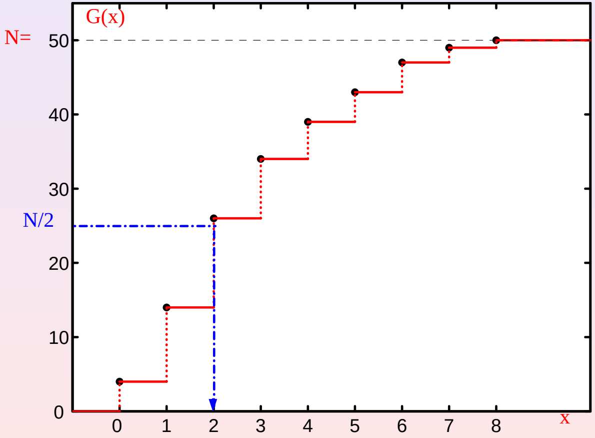
$$M_e = \frac{56+62}{2} = 59 \text{ Kg}$$

Exemple2 :

Nombre d'enfants	Effectif n_i	Eff. cum. N_i
0	4	4
1	10	14
2	12	26
3	8	34
4	5	39
5	4	43
6	4	47
7	2	49
8	1	50

$$M_e = \frac{1}{2}(x_{(25)} + x_{(26)}) = 2$$

Détermination graphique :



b. Cas d'une variable continue :

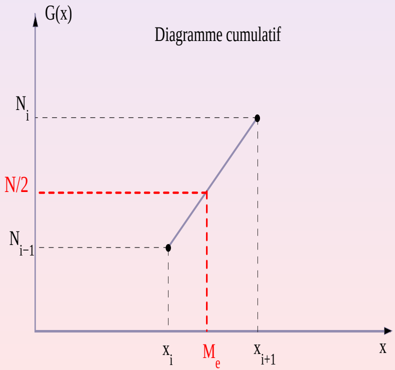
Pour des données groupées en classes, on situe d'abord la médiane à l'intérieur d'une classe $[x_i, x_{i+1}[$, appelée classe médiane :

$$x_i \leq M_e < x_{i+1} \Leftrightarrow F_{i-1} \leq 0.5 < F_i$$

$$\Updownarrow$$

$$N_{i-1} \leq N/2 < N_i$$

Dans la classe médiane, la médiane est calculée par interpolation linéaire :



La classe médiane $[x_i, x_{i+1}[$ étant déterminée, la médiane M_e vérifie :

$$x_i \longrightarrow N_{i-1}$$

$$M_e \longrightarrow N/2$$

$$x_{i+1} \longrightarrow N_i$$

D'où

$$\frac{M_e - x_i}{N/2 - N_{i-1}} = \frac{x_{i+1} - x_i}{N_i - N_{i-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$M_e = x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{N/2 - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}$$

ou

$$x_i \longrightarrow F_{i-1}$$

$$M_e \longrightarrow 0.5$$

$$x_{i+1} \longrightarrow F_i$$

D'où

$$\frac{M_e - x_i}{0.5 - F_{i-1}} = \frac{x_{i+1} - x_i}{F_i - F_{i-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$M_e = x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{0.5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}$$

Exemple3 : Taille des étudiants

Taille (en cm)	Effectif n_i	Eff. cum. N_i	Fréquence f_i	Fréq. cum. F_i
$[151; 155[$	10	10	0.2	0.2
$[155; 159[$	12	22	0.24	0.44
$[159; 163[$	11	33	0.22	0.66
$[163; 167[$	7	40	0.14	0.8
$[167; 171[$	10	50	0.2	1
Total	50		1	

La classe médiane est : $[159, 163[$.

On a :

$$159 \longrightarrow 22$$

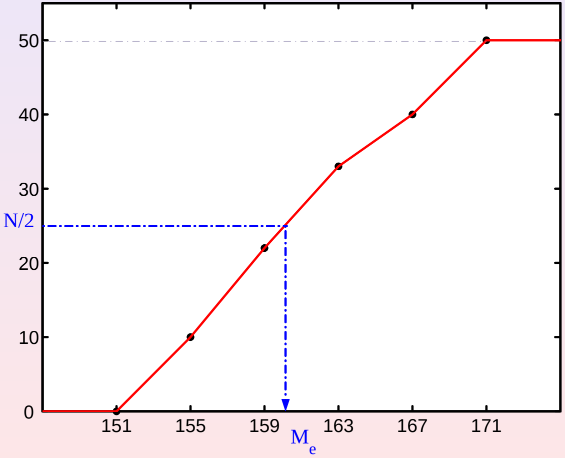
$$M_e \longrightarrow 25$$

$$163 \longrightarrow 33$$

d'où $M_e = 159 + 4\dfrac{25 - 22}{33 - 22} = 160.09\ cm$

50 % des étudiants ont une taille $\leq 160.09\ cm$ et 50 % des étudiants ont une taille $\geq 160.09\ cm$.

Détermination graphique :



3- La moyenne

Définition

La moyenne arithmétique d'une variable statistique X, qu'on appelle tout simplement moyenne, est égale à la somme des valeurs observées divisée par le nombre d'observations.

On la note $\overline{X}$.

Remarque La moyenne $\overline{X}$ n'est définie que pour une variable statistique quantitative.

Détermination pratique :

a. Cas d'une variable discrète :

Soit $(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}$ une variable statistique discrète à valeurs dans **R**, on a :

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i$$

b. Cas d'une variable continue :

Soit $([x_i, x_{i+1}[, n_i)_{1 \leq i \leq k}$ une variable statistique continue à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i c_i$$

avec $c_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2} =$ centre de la classe $[x_i, x_{i+1}[$.

Exemple

$[x_i, x_{i+1}[$	n_i	f_i (%)	c_i	$n_i \times c_i$
$[200, 300[$	8	9.88	250	2000
$[300, 400[$	26	32.10	350	9100
$[400, 500[$	12	14.81	450	5400
$[500, 600[$	10	12.35	550	5500
$[600, 700[$	15	18.52	650	9750
$[700, 800[$	5	6.17	750	3750
$[800, 900[$	3	3.70	850	2550
$[900, 1000[$	2	2.47	950	1900
Total	81	100		39950

Donc la moyenne est :

$$\overline{X} = \frac{39950}{81} = 493.21$$

Propriétés :

Soient $X = \{(x_i, n_i),\ 1 \leq i \leq k\}$ une variable statistique sur une population P et a, b deux constantes réelles. On a :

- $aX = \{(ax_i, n_i),\ 1 \leq i \leq k\}$ (resp. $X + b = \{(x_i + b, n_i),\ 1 \leq i \leq k\}$) est une variable statistique sur la population P.
- $\overline{aX} = a\overline{X}$
- $\overline{X + b} = \overline{X} + b$

- Si on pose $Y = aX + b$ (a et b deux constantes) alors $\overline{Y} = a\overline{X} + b$
- La somme des différences à la moyenne est nulle : $\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{X}) = 0$
- L'expression $\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - a)^2$ est minimale pour $a = \overline{X}$

Exemple : Distribution des salaires.

Effectuons le changement de variables $Y = \dfrac{X - 6500}{1000}$ pour simplifier les calculs :

Salaire en dh	n_i	c_i	$y_i = \dfrac{c_i - 6500}{1000}$	$n_i y_i$
$[3000, 5000[$	26	4000	-2.5	-65
$[5000, 6000[$	33	5500	-1	-33
$[6000, 7000[$	64	6500	0	0
$[7000, 8000[$	7	7500	1	7
$[8000, 10000[$	10	9000	2.5	25
Total	140			-66

$$\Downarrow$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_i y_i = -\frac{66}{140}$$

Et on a $X = 1000Y + 6500$

D'où

$$\overline{X} = 1000\overline{Y} + 6500 = 6028.57\ dh$$

Propriété :

Si une population P de taille N est composée de m sous-populations $P_1, P_2, \ldots, P_m$, de tailles respectives $N_1, N_2, \ldots, N_m$ et de moyennes respectives $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_m$. Alors la moyenne $\overline{X}$ de la population P est donnée par :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} N_i \overline{X}_i$$

4- Généralisation de la notion de moyenne

Exemple 1 : Moyenne harmonique

Un cycliste parcourt 4 étapes de 100 km. Les vitesses respectives pour ces étapes sont de 10 km/h, 30 km/h, 40 km/h et 20 km/h. Quelle a été sa vitesse moyenne v ?

Si on calcule la moyenne arithmétique des vitesses, on obtient :

$$\overline{X} = \frac{10 + 30 + 40 + 20}{4} = 25 km/h$$

Mais ce n'est pas la bonne vitesse moyenne !

Un raisonnement simple nous permet de répondre à la question :

Soit d $=$100 km la distance du parcours et t la durée totale des 4 étapes. On a :

$$v = \frac{4d}{t}$$

d'où

$$v = \frac{4}{(\frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{20})} = 19.2Km/h$$

v est une moyenne harmonique de la série statistique prenant les valeurs 10, 30, 40, 20.

Exemple 2 : Moyenne géométrique

On considère un crédit sur 10 ans avec des taux d'intérêt respectivement égales à $i_1 = 3\%$ pour une durée de 5 ans, $i_2 = 5\%$ pour une durée de 2 ans et $i_3 = 7\%$ pour une durée de 3 ans.
Quel est le taux d'intérêt moyen i ?

Si on calcule la moyenne arithmétique des taux, on obtient :

$$\overline{x} = \frac{5 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 7}{10} = 4.6\%$$

Mais ce n'est pas le bon taux moyen.

Soit S le montant initial du crédit. On a :

$$S \times (1+i)^{10} = S \times (1+i_1)^5 \times (1+i_2)^2 \times (1+i_3)^3$$

$$\Downarrow$$

$$(1+i) = \left((1.03)^5 \times (1.05)^2 \times (1.07)^3\right)^{1/10}$$

Après calcul, on trouve $i = 4.58\%$

$1 + i$ est une moyenne géométrique de la série statistique prenant les valeurs 1.03, 1.05, 1.07 avec les effectifs respectifs 5, 2, 3.

Généralisation

Soit $X = (x_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}$, une variable statistique quantitative discrète à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.
Soit $\varphi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une application monotone continue. Alors

$$(\varphi(x_i), n_i)_{1 \leq i \leq k}$$

est une variable statistique quantitative discrète à valeurs dans $\mathbf{R}$, notée $\varphi(X)$.

La moyenne arithmétique de $\varphi(X)$ est définie par :

$$\overline{\varphi(X)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i \varphi(x_i)$$

Définition

Comme φ est une bijection, il existe un unique $\overline{X_\varphi} \in \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\varphi(\overline{X_\varphi}) = \overline{\varphi(X)}$$

$\overline{X_\varphi} = \varphi^{-1}(\overline{\varphi(X)})$ est appelé la φ-moyenne de X.

Exemples de φ-moyennes :

a. Moyenne atithmétique :

Si φ est l'application identique définie par $\varphi(x) = x$, la φ-moyenne de X est la moyenne arithmétique de X.

b. Moyenne géométrique :

Si φ est définie par $\varphi(x) = \ln(x)$, la φ-moyenne de X, notée $\overline{X_g}$, est appelée moyenne géométrique de X. Elle est définie par :

$$\overline{X_g} = exp\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i \ln(x_i)\right)$$

La moyenne géométrique est égale à l'exponentielle de la moyenne arithmétiques des logarithmes.

On a :

$$\overline{X_g} = \left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}\right)^{\frac{1}{N}}$$

c. Moyenne quadratique :

Si φ est définie par $\varphi(x) = x^2$, la φ-moyenne de X, notée $\overline{X_q}$ et définie par

$$\overline{X_q} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}$$

est appelée moyenne quadratique de X.

La moyenne quadratique est égale à la racine carrée de la moyenne arithmétiques des carrées.

d. Moyenne harmonique :

Si φ est définie par $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, la φ-moyenne de X, notée $\overline{X_h}$ et définie par

$$\overline{X_h} = \frac{1}{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}}$$

est appelée moyenne harmonique de X.

La moyenne harmonique est égale à l'inverse de la moyenne arithmétiques des inverses.

e. Moyenne d'ordre r :

Si φ est définie par $\varphi(x) = x^r, \quad r \neq 0$, la φ-moyenne de X, notée $\overline{X_r}$ et définie par

$$\overline{X_r} = (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^r)^{\frac{1}{r}}$$

est appelée moyenne d'ordre r de X.

La moyenne d'ordre r est égale à la racine r^{ieme} de la moyenne arithmétiques des puissances r^{ieme}.

Remarque

- Les différentes moyennes d'une variable statistique X vérifient les inégalités suivantes :

$$\overline{X_h} \leq \overline{X_g} \leq \overline{X} \leq \overline{X_q} \leq \overline{X_3} \leq \dots$$

  Il y a égalité si, et seulement si, toutes les valeurs de X sont égales.

- Si on pose $Y = aX$ (a une constante positive) alors :

$$\overline{Y_\varphi} = a\overline{X_\varphi}$$

Exemple : Distribution des salaires

Effectuons le changement de variables $Y = \dfrac{X}{1000}$

$[x_i, x_{i+1}[$	y_i	n_i	$n_i y_i$	$n_i \ln(y_i)$	$n_i y_i^2$	$\frac{n_i}{y_i}$
$[3000, 5000[$	4	26	104	36.04	416	6.5
$[5000, 6000[$	5.5	33	181.5	56.26	998.25	6
$[6000, 7000[$	6.5	64	416	119.79	2704	9.85
$[7000, 8000[$	7.5	7	52.5	14.10	393.75	0.93
$[8000, 10000[$	9	10	90	21.97	810	1.11
Total		140	844	248.17	5322	24.39

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_i y_i = \frac{844}{140} \quad \Rightarrow \quad \overline{X} = 1000\overline{Y} = 6028.57$$

$$\overline{Y_g} = Exp(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_i \ln(y_i)) = Exp(\frac{248.17}{140}) = 5.88639$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{X_g} = 1000\overline{Y_g} = 5886.39$$

$$\overline{Y_q} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_i y_i^2} = \sqrt{\frac{5322}{140}} \quad \Rightarrow \quad \overline{X_q} = 6165.57$$

$$\overline{Y_h} = \frac{N}{\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{n_i}{y_i}} = \frac{140}{24.39} \quad \Rightarrow \quad \overline{X_h} = 5739.92$$

II.2- Paramètres de dispersion

Les paramètres de position ne donnent pas une information complète sur une variable statistique.

Deux variables qui ont les mêmes paramètres de position peuvent se présenter avec des dispersions très différentes.

Les polygone des fréquences donnent déjà une idée qualitative de la dispersion.

1- L'étendue

Définition

L'étendue ou l'intervalle de variation d'une variable statistique X est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur observées :

$$e = X_{max} - X_{min}$$

Ce paramètre présente un intérêt très limité du fait qu'il dépend uniquement des valeurs extrêmes, qui peuvent être des valeurs aberrantes.

2- Les quantiles

Définition

Le quantile (ou fractile) d'ordre p $(0 < p < 1)$, noté Z_p, d'une série statistique est la valeur telle que p est la proportion des individus ayant une modalité inférieure ou égale à Z_p. On écrit $F(Z_p) = p$ (ou $G(Z_p) = p \times N$).

Remarque

La médiane est le quantile d'ordre $p = 1/2$.

$$M_e = Z_{0.5}$$

Quantiles particuliers

1. Quartiles : avec, $p = 1/4$; $p = 2/4$; $p = 3/4$
on trouve les 3 quartiles respectifs, notés

$$Q_1 = Z_{0.25};\ Q_2 = Z_{0.5} = M_e;\ Q_3 = Z_{0.75}$$

2. Déciles : avec, $p = 1/10$; $p = 2/10$; $\ldots$, $p = 9/10$
on trouve les 9 déciles respectifs, notés

$$D_1 = Z_{0.1};\ D_2 = Z_{0.2};\ \ldots;\ D_9 = Z_{0.9}$$

3. Centiles : avec,
$p = 1/100$; $p = 2/100$; $\ldots$; $p = 99/100$
on trouve les 99 centiles respectifs, notés

$$C_1 = Z_{0.01};\ C_2 = Z_{0.02};\ \ldots;\ C_{99} = Z_{0.99}$$

Détermination pratique du quantile

a. Cas discret

Soit $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(N)}$ la série ordonnée d'une v.s.d.

– Si $p \times N$ est un nombre entier, alors

$$Z_p = \frac{1}{2}(x_{(pN)} + x_{(pN+1)})$$

– Si $p \times N$ n'est pas un nombre entier, alors

$$Z_p = x_{([pN])}$$

où $[pN]$ représente le plus petit nombre entier supérieur ou égal à pN.

Exemple:
Soit la série statistique ordonnée 12, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 24, 25, 27. On a :

$$Q_1 = Z_{0.25} = x_{([2.5])} = x_{(3)} = 15$$

$$Q_2 = Z_{0.5} = \frac{(x_{(5)} + x_{(6)})}{2} = (18 + 19)/2 = 18.5$$

$$Q_3 = Z_{0.75} = x_{([7.5])} = x_{(8)} = 24$$

$$D_1 = Z_{0.1} = \frac{(x_{(1)} + x_{(2)})}{2} = 12.5$$

Exemple2 :

Nombre d'enfants	Effectif n_i	Eff. cum. N_i
0	4	4
1	10	14
2	12	26
3	8	34
4	5	39
5	4	43
6	4	47
7	2	49
8	1	50
Total	50	

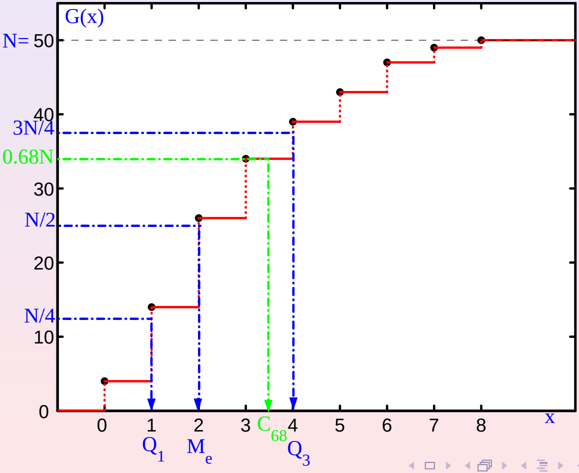
$$Q_1 = Z_{0.25} = x_{([12.5])} = x_{(13)} = 1$$

$$Q_2 = Z_{0.5} = \frac{(x_{(25)} + x_{(26)})}{2} = (2+2)/2 = 2$$

$$Q_3 = Z_{0.75} = x_{([37.5])} = x_{(38)} = 4$$

$$C_{68} = Z_{0.68} = \frac{(x_{(34)} + x_{(35)})}{2} = 3.5$$

Détermination graphique :



b. Cas continu

- Méthode d'interpolation : d'après le tableau statistique ou la courbe cumulative, on détermine d'abord la classe $[x_i, x_{i+1}[$ telle que :

$$N_{i-1} \leq p \times N < N_i$$

Puis, par interpolation linéaire dans $[x_i, x_{i+1}[$, on calcule Z_p tel que :

$$Z_p = x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{pN - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}$$

- Méthode graphique : On trace la courbe cumulative, et on détermine Z_p comme l'abscisse du point d'ordonnée $G(Z_p) = p \times N$ (ou $F(Z_p) = p$).

Exemple:

Taille (en cm)	Effectif n_i	Eff. cum. N_i	Fréquence f_i	Fréq. cum. F_i
$[151; 155[$	10	10	0.2	0.2
$[155; 159[$	12	22	0.24	0.44
$[159; 163[$	11	33	0.22	0.66
$[163; 167[$	7	40	0.14	0.8
$[167; 171[$	10	50	0.2	1
Total	50		1	

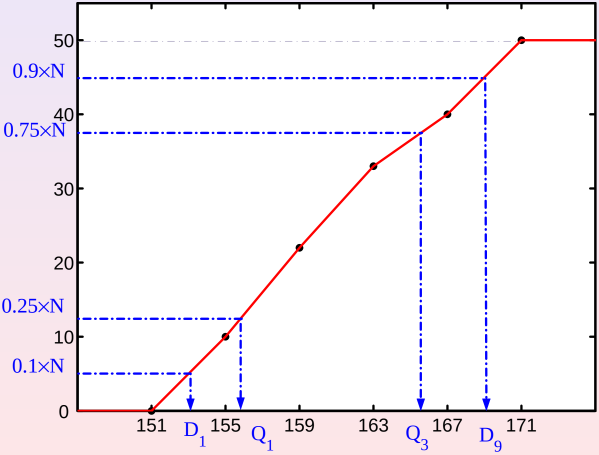
$$D_1 = 151 + 4\frac{5-0}{10-0} = 153\ cm$$

$$Q_1 = 155 + 4\frac{12.5-10}{22-10} = 155.83\ cm$$

$$Q_3 = 163 + 4\frac{37.5-33}{40-33} = 165.57\ cm$$

$$D_9 = 167 + 4\frac{45-40}{50-45} = 169\ cm$$

Détermination graphique :



L'écart interquantiles

Définition

L'écart interquantile est un paramètre de dispersion, donnée par la différence entre le premier et le dernier quantile. Ainsi, on a les écarts interquantile particuliers :

1. L'écart interquartile: $\Delta Q = Q_3 - Q_1$
2. L'écart interdécile: $\Delta D = D_9 - D_1$
3. L'écart intercentile: $\Delta C = C_{99} - C_1$

Intervalle interquantiles

Définition

L'intervalle interquantile est l'intervalle compris entre le premier et le dernier quantile. Ainsi, on a les intervalles interquantiles particuliers :

1. Intervalle interquartile: $[Q_1, Q_3]$
2. Intervalle interdécile: $[D_1, D_9]$
3. Intervalle intercentile: $[C_1, C_99]$

Plus l'intervalle interquantile est large, plus la série est dispersée.

3- L'écart absolu moyen

Définition

L'écart absolu moyen est la moyenne arithmétique des valeurs absolues des écarts à la moyenne arithmétique.

$$E_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i |x_i - \overline{X}|$$

4- Variance, Ecart-type

Définition

La variance, notée $V(X)$, est la moyenne arithmétique des carrés des écarts à la moyenne arithmétique.

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{X})^2$$

Définition

L'écart-type, notée $\sigma(X)$, est la racine carrée de la variance:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

L'écart-type est donc la moyenne quadratique des écarts à la moyenne arithmétique.

Remarque

La variance (ou l'écart-type) est un indicateur de la dispersion d'une série par rapport à sa moyenne. Plus il est élevé, plus la dispersion autour de la moyenne est élevée

Formule simplifiée de la variance :

Théorème

On a :

$$V(X) = \overline{X^2} - \overline{X}^2$$

La variance est égale à la différence entre la moyenne des carrées et le carré de la moyenne.

Preuve. On a

$$(x_i - \overline{X})^2 = x_i^2 - 2x_i\overline{X} + \overline{X}^2,$$

d'où

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - 2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \overline{X} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i \overline{X}^2$$

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - 2\overline{X}^2 + \overline{X}^2$$

et donc

$$V(X) = \overline{X^2} - \overline{X}^2$$

Propriétés :

- Contrairement à l'étendue et aux quantiles, la variance (ou l'écart-type) tient compte de toutes les valeurs d'une série statistique.
- Si la variance (ou l'écart-type) est faible, cela signifie que les valeurs sont assez concentrées autour de la moyenne.
- Si la variance (ou l'écart-type) est élevé, cela veut dire au contraire que les valeurs sont plus dispersées autour de la moyenne.

Si on pose $Y = aX + b$ (a et b deux constantes) alors :

- $V(Y) = a^2 V(X)$
- $\sigma(Y) = |a|\sigma(X)$

Exemple : Distribution des salaires.

Salaire	c_i	n_i	$y_i = \frac{c_i - 6500}{1000}$	$n_i y_i$	$n_i y_i^2$
$[3000, 5000[$	4000	26	-2.5	-65	162.5
$[5000, 6000[$	5500	33	-1	-33	33
$[6000, 7000[$	6500	64	0	0	0
$[7000, 8000[$	7500	7	1	7	7
$[8000, 10000[$	9000	10	2.5	25	62.5
Total	140			-66	265

Effectuons le changement de variables $Y = \frac{X - 6500}{1000}$ pour réduire les calculs :

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_i y_i = -\frac{66}{140}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X} = 1000\overline{Y} + 6500 = 6028.57$$

$$V(Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_i y_i^2 - \overline{Y}^2 = \frac{265}{140} - (\frac{66}{140})^2 = 1.670612$$

$$\Rightarrow \quad V(X) = 1000^2 V(Y) = 1670612$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1292,52$$

5- Coefficient de variation

Définition

On appelle coefficient de variation (ou de dispersion) d'une variable statistique réelle X, le rapport

$$C_v = \frac{\sigma(X)}{\overline{X}}$$

Remarque

Le coefficient de variation est un nombre sans dimension qui permet de comparer deux variables statistiques exprimées dans des unités différentes.

6- Moments

Définition

Soit X une variable statistique quantitative réelle. On appelle moment d'ordre r de X, la quantité :

$$m_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^r$$

C'est la moyenne arithmétique des puissance r^{ieme}.

Définition

On appelle moment centré d'ordre r de X, la quantité :

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{X})^r$$

C'est la moyenne des puissance r^{ieme} des écarts à la moyenne.

On a :

- $\mu_0 = 1$
- $\mu_1 = 0$
- $\mu_2 = V(X) = m_2 - m_1^2$

Définition

Une variable statistique est dite centrée si sa moyenne est nulle.
Une variable statistique est dite réduite si son écart-type est égal à 1.

Centrer et réduire une variable statistique X consiste à la remplacer par

$$X^* = \frac{X - \overline{X}}{\sigma(X)}$$

- Retrancher $\overline{X}$ pour la centrer (moyenne = 0)
- Diviser par $\sigma(X)$ pour la réduire (écart-type = 1).

D'une manière générale, les moments centrés d'ordre pair $\mu_4, \ \mu_6, \ldots$ sont des paramètres de dispersion (comme la variance μ_2). Par contre, les moments centrés d'ordre impair $\mu_3, \ \mu_5, \ldots$ sont des paramètres utilisés pour mesurer la symétrie, ils sont nuls pour les distributions symétriques.

III.3- Paramètres de forme

Les polygones de fréquences donnent une idée qualitative sur la forme d'une distribution statistique (aplatissement, symétrie, ...).

Il existe plusieurs paramètres permettant de mesurer la symétrie et l'aplatissement d'une distribution :

1- Coefficient d'asymétrie de Yule

Définition

Le coefficient d'asymétrie de Yule, noté s, est basé sur les écarts entre les quartiles. Il est défini par :

$$s = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

Remarque

- Si $s = 0$ alors la série est symétrique.
- Si $s > 0$ alors la série est étalée à droite.
- Si $s < 0$ alors la série est étalée à gauche.

2- Coefficient d'asymétrie de Pearson

Définition

Le coefficient d'asymétrie de Pearson, noté p, est défini par:

$$p = \frac{\overline{X} - M_o}{\sigma(X)}$$

Remarque

- Si $p = 0$ alors la série est symétrique.
- Si $p > 0$ alors la série est allongée vers la droite.
- Si $p < 0$ alors la série est allongée vers la gauche.

3- Coefficient d'asymétrie de Fisher

Définition

Le coefficient d'asymétrie de Fisher, noté δ, est défini par :

$$\delta = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Remarque

- Si $\delta = 0$ alors la série est symétrique.
- Si $\delta > 0$ alors la série est étalée vers la droite.
- Si $\delta < 0$ alors la série est étalée vers la gauche.

4- Coefficient d'aplatissement de Pearson

Définition

Le coefficient d'aplatissement de Pearson, noté a, est défini par :

$$a = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Remarque

- Le coefficient d'aplatissement de Pearson est sans dimension et il est supérieur ou égal à 1.
- Le coefficient d'aplatissement de Pearson d'une distribution normale est $a = 3$.
- Si $a > 3$, la série est plus aplatie qu'une série normale.
- Si $a < 3$, la série est moins aplatie (plus pointue) qu'une série normale.

Remarque

Dans un changement additif et multiplicatif $Y = aX + b$,

- Les paramètres de position sont affectés par le changement additif et multiplicatif.
- Les paramètres de dispersion sont affectés par le changement multiplicatif mais pas par le changement additif.
- Les paramètres de forme ne sont affectés ni par le changement multiplicatif ni par le changement additif.

Fin chapitre 1

PROBABILITÉ

Abdelhak FAHSI

Département de Mathematiques
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia

Introduction générale

Le calcul des probabilités intervient dans l'étude des phénomènes pour lesquels il existe des éléments d'incertitude et qui pour cette raison sont dits phénomènes aléatoires.

Il existe plusieurs manières de définir une probabilité :

- Probabilité expérimentale ou inductive :

  Exemple

  Sur une population de mille naissances, on compte 485 garçons et 515 filles.
  On en déduit que $P(\text{garçon}) = 48.5\%$.

- Probabilité théorique ou déductive :

  Exemple

  En jouant avec un dé parfait, on peut dire, sans avoir besoin de faire l'expérience, que
  $P(\text{obtenir un } 4) = 1/6$.

Le but principal de ce cours de probabilité est de se familiariser avec le raisonnement probabiliste.

Plan du cours

Chapitre 1
Calcul des Probabilités

I- Langage probabiliste

I.1- Expérience aléatoire

Définition

Une expérience aléatoire (on dit aussi épreuve), notée $\mathcal{E}$, est une expérience dont le résultat ne peut pas être prédis à l'avance (le résultat est aléatoire), mais dont l'ensemble de tous les résultats possibles est connu à l'avance.

Exemple

- On jette un dé non truqué,
- On choisi un individu au hasard et on observe son groupe sanguin.

Contre exemple

- Si on choisi un individu au hasard et on lui pose la question : "A quoi avez-vous pensé en premier lieu ce matin à votre réveil ?",

  Cette expérience n'est pas une expérience aléatoire.

I.2- Ensemble fondamental

Définition

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé ensemble fondamental (ou univers) associé à cette expérience. Il est noté Ω.

Un résultat possible d'une expérience aléatoire est noté ω.

Exemple

- On jette un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- On observe le groupe sanguin : $\Omega = \{A, B, AB, O\}$
- On jette deux pièces de monnaie :
  $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$

I.3- Notion d'événement

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et Ω son univers.

Définition

Un événement de $\mathcal{E}$ est une assertion logique sur $\mathcal{E}$.

Formellement, un événement de $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de Ω.

Exemple

- $\mathcal{E} =$ On jette un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  Soit l'événement $A =$ "obtenir un point pair".
  On a
  $$A = \{2, 4, 6\}$$
- $\mathcal{E} =$ On jette deux dés :
  $$\Omega = \{(i, j), \;\; 1 \leq i \leq 6, \;\; 1 \leq j \leq 6\}$$
  Soit l'événement $A =$ "la somme des points est supérieure à 10".
  On a
  $$A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

Définition

Chaque élément $\omega \in \Omega$, *c'est à dire chaque résultat possible de l'expérience aléatoire* $\mathcal{E}$, *forme un sous-ensemble* $\{\omega\} \subset \Omega$ *appelé événement élémentaire.*

Remarque

- On dit que l'événement A est réalisé si le résultat de $\mathcal{E}$ est un élément de A.
- L'ensemble des événements de $\mathcal{E}$ n'est autre que l'ensemble des parties de Ω que l'on note $\mathcal{P}(\Omega)$.
- L'ensemble Ω est appelé événement certain.
- L'ensemble vide $\emptyset$ est appelé événement impossible.

I.4- Opérations sur les événements

Sur les événements, on peut appliquer les opérations habituelles sur les ensembles :

Définition

L'union de deux événements A et B, notée $A \cup B$, est un événement qui est réalisé lorsque A ou B est réalisé.

Définition

L'intersection de deux événements A et B, notée $A \cap B$, est un événement qui est réalisé lorsque A et B sont réalisés simultanément.

Définition

Deux événements A et B sont dits incompatibles (ou mutuellement exclusifs) si la réalisation de l'un entraîne la non réalisation de l'autre. On note $A \cap B = \varnothing$

Exemple

On jette un dé et on considère les événements :
$A =$ "obtenir un point pair".
$B =$ "obtenir un point impair".
A et B sont incompatibles.

Définition

L'événement contraire (ou complémentaire) d'un événement A, noté $\overline{A}$, est un événement qui est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.
On dit que A et $\overline{A}$ sont deux événements contraires.

Remarque

- Deux événements contraires A et $\overline{A}$ sont incompatibles. De plus, leur union est égale à Ω. On dit qu'ils forment une partition de Ω.
- Deux événements incompatibles ne sont pas nécessairement contraires.

Définition

On dit que l'événement A implique l'événement B, on note $A \subset B$, si la réalisation de A implique la réalisation de B.

Définition

On dit que les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment un système (ou une famille) complet d'événements, s'ils constituent une partition de Ω, c'est à dire :

- *Tous les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ sont deux à deux incompatibles,*
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Remarque

On vient d'établir une correspondance entre le langage des événements (language probabiliste) et le langage des ensembles (langage ensembliste).

Le tableau suivant résume la correspondance de vocabulaire et de notations :

Voc. probabiliste	Voc. ensembliste	Notations
Evt. A	ss-ensemble A de Ω	$A \subset \Omega$
Evt. impossible	ensemble vide	$\emptyset$
Evt. certain	ens. de ts les résultats	Ω
ω réalise A	ω appartient à A	$\omega \in A$
Evt. A ou B	union de A et B	$A \cup B$
Evt. A et B	intersection de A et B	$A \cap B$
Evt. contraire de A	complémentaire de A	$\overline{A}$
A et B incompatibles	A et B sont disjoints	$A \cap B = \varnothing$
A implique B ($A \Rightarrow B$)	A inclu dans B	$A \subset B$

Exemple

$\mathcal{E} =$ On jette un dé non truqué : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
$\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \ldots, \Omega\}$,

Exemple

$\mathcal{E} =$ On jette un dé non truqué : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \Omega\}$,
(Rappel : $Card(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{Card(\Omega)}$)

Soit les événements :
$A =$ "obtenir un point ≤ 4".
$B =$ "obtenir un point ≥ 3".
On a :
$A \cap B =$
$A \cup B =$
$\overline{A} =$
$\overline{B} =$

Rappel

On a les relations :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

II- Définition de la probabilité

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire, Ω l'ensemble fondamental de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de $\mathcal{E}$.

L'objectif est d'associer à chaque événement A un nombre positif compris entre 0 et 1, noté $p(A)$, qui permet de mesurer la chance qu'à l'événement A pour se réaliser.

$p(A)$ est appelé probabilité de l'événement A.

II.1- Définition axiomatique

Définition

Une probabilité sur Ω est une application, notée p, définie de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant :

- $p(\Omega) = 1$
- *si A et B sont incompatibles alors* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ est appelé espace probabilisé.

Propriétés

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- $p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$
- si $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ alors
  $p(A) = p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + \ldots + p(\{\omega_k\}) = \sum_{\omega \in A} p(\{\omega\})$

II.2- Cas particulier : Univers fini et équiprobabilité

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ est fini ($Card(\Omega) = n$), alors la probabilité sur Ω est complètement déterminée par la donnée des valeurs $p_i = p(\{\omega_i\}), \;\; 1 \leq i \leq n$.

Si de plus, on a équiprobabilité (c'est à dire tous les événements élémentaires ont la même probabilité) alors on a :

$$\forall\, \omega_i \in \Omega;\;\; p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{Card(\Omega)}$$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition

Si Ω est fini et si on a équiprobabilité des événements élémentaires alors on a :

$$\forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega);\quad p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nobre de cas possibles}}$$

Exemple

$\mathcal{E} =$ On jette un dé non truqué.
On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est fini et on a équiprobabilité.
Donc

$$p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}, \quad \forall\, \omega_i \in \Omega$$

Soit l'événement $A =$ "obtenir un point pair".
On a $p(A) = p(\{2, 4, 6\}) = \dfrac{3}{6} = 0.5$

Exemple

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules rouges et 6 boules noires.
Soit $\mathcal{E} =$ tirer une boule au hasard (équiprobabilité) et noter sa couleur.

Soit les événements :
$A =$ "obtenir une boule blanche",
$B =$ "obtenir une boule rouge",
$C =$ "obtenir une boule noire".

On a $p(A) = \dfrac{3}{13}$; $\quad p(B) = \dfrac{4}{13}$; $\quad p(C) = \dfrac{6}{13}$.

Remarque

Les dénombrements des cas favorables et des cas possibles peuvent nécessiter des calculs d'analyse combinatoire rappelés au dernier paragraphe de ce chapitre.

Question

Le fait de savoir qu'un événement B est réalisé peut-il modifier la probabilité de réalisation d'un autre événement A ?

Question

Le fait de savoir qu'un événement B est réalisé peut-il modifier la probabilité de réalisation d'un autre événement A ?

La réponse est oui

III- Probabilité conditionnelle

Exemple

La répartition des étudiants de BCG selon la note du module de mathématique et le sexe est représentée dans le tableau suivant :

Sexe / Note de Math	Garçons	Filles	Total
$[0, 7[$	4	3	7
$[7, 10[$	17	15	32
$[10, 20[$	21	36	57
Total	42	54	96

Un étudiant est choisi au hasard.
Soit A l'événement : "l'étudiant choisi est un garçon". On a :

$$p(A) = \frac{42}{96}$$

Soit B l'événement : "l'étudiant choisi a validé le module".
On a :

$$p(B) = \frac{57}{96}$$

La réalisation de B modifie la probabilité de réalisation de l'événement A, On a :

$$p(A \text{ sachant } B) = \frac{21}{57} \neq p(A)$$

III.1- Définition

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ *un espace probabilisé et soient* A *et* B *deux événements tel que* $p(B) \neq 0$.

La probabilité de réalisation de l'événement A *sachant que l'événement* B *est réalisé, noté* $p(A|B)$*, est définie par :*

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

On l'appelle probabilité conditionnelle et on lit probabilité de A *sachant* B.

Exemple

On jette un dé non truqué.
On considère les 2 événements suivants :
$A =$ "avoir un nombre pair",
$B =$ "avoir un nombre ≥ 4".

Quelle est la probabilité de A sachant B ?

Propriétés

Soit B un événement tel que $p(B) \neq 0$.

- $p(\Omega|B) = 1$
- si A_1 et A_2 sont incompatibles alors $p((A_1 \cup A_2)|B) = p(A_1|B) + p(A_2|B)$
- **Formule des probabilités composées :**

$$p(A \cap B) = p(A|B) \times p(B) = p(B|A) \times p(A)$$

Exemple

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires.
On considère $\mathcal{E} =$ tirer une 1ère boule au hasard, noter sa couleur puis tirer une 2ème boule au hasard et noter sa couleur.
On suppose que les tirages sont effectués sans remise.

Soient les événements :
$A_1 =$ "la 1ère boule tirée est noire",
$A_2 =$ "la 2ème boule tirée est noire".

Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient noires ?

C'est $p(A_1 \cap A_2)$:

On a

$$p(A_1) = \frac{2}{5}$$

$$p(A_2|A_1) = \frac{1}{4}$$

donc

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_2|A_1) \times p(A_1) = \frac{1}{10}$$

- **Formules des probabilités totales :**

Proposition

- *Soit B un événement tel que $p(B) \neq 0$. Alors, pour tout événement A, on a :*

$$p(A) = p(A|B) \times p(B) + p(A|\overline{B}) \times p(\overline{B})$$

- *Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ est un système complet d'événements tel que $p(B_i) \neq 0$. Alors, pour tout événement A, on a :*

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A|B_i) \times p(B_i)$$

- **Formule de Bayes :**

Proposition

Soit $B_1, B_2, \ldots, B_n$ un système complet d'événements tel que $p(B_i) \neq 0$ et soit A un événement tel que $p(A) \neq 0$. Alors on a :

$$p(B_i|A) = \frac{p(A|B_i) \times p(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A|B_i) \times p(B_i)}$$

Exemple

Trois machines M_1, M_2 et M_3 de fabrication mécanique produisent respectivement 25%, 35% et 40% de la production totale.

5% des pièces produites par M_1 sont défectueuses
4% des pièces produites par M_2 sont défectueuses
3% des pièces produites par M_3 sont défectueuses

On choisi au hasard une pièce de la production.

1. Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit fabriquée par M_1 et qu'elle soit défectueuse ?
2. Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit défectueuse ?
3. Si la pièce choisie est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle soit fabriquée par M_1 ?

On considère les événements :

$M_i =$ "la pièce choisie est fabriquée par la machine M_i"
$D =$ "la pièce choisie est défectueuse"
$\overline{D} =$ "la pièce choisie n'est pas défectueuse"

On a :

$$p(M_1) = 0.25; \;\; p(M_2) = 0.35; \;\; p(M_3) = 0.40$$

et

$$p(D|M_1) = 0.05; \;\; p(D|M_2) = 0.04; \;\; p(D|M_3) = 0.03$$

1. $p(M_1 \cap D) = p(D|M_1) \times p(M_1) = 1,25\%$
2. $p(D) = \sum_{i=1}^{3} p(D|M_i) \times p(M_i) = 3,85\%$
3. $p(M_1|D) = \dfrac{p(D|M_1) \times p(M_1)}{p(D)} = 32,47\%$

On peut résumer ces données dans le tableau suivant :

	D	$\overline{D}$	Total
M_1	0.05×0.25	0.95×0.25	0.25
M_2	0.04×0.35	0.96×0.35	0.35
M_3	0.03×0.40	0.97×0.40	0.40
Total	0.0385	0.9615	1

III.2- Evénements indépendants

Définition

Deux événements A et B d'un même espace probabilisé sont dits indépendants si et seulement si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la probabilité de réalisation de l'autre. On a alors

$$p(A|B) = p(A)$$

et

$$p(B|A) = p(B)$$

.

Corollaire

Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Exemple

Un dé est lancé deux fois : $\Omega = \{(i,j), \quad 1 \leq i,j \leq 6\}$
Soit les événements :
$A =$ "obtenir un point pair au premier jet"
$B =$ "obtenir le point 1 ou 4 au deuxième jet".

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

On a :

$$p(A) = \frac{3 \times 6}{36} = \frac{1}{2}$$

$$p(B) = \frac{6 \times 2}{36} = \frac{1}{3}$$

$$p(A \cap B) = \frac{3 \times 2}{36} = \frac{1}{6} = p(A) \times p(B)$$

Remarque

- Il ne faut pas confondre événements indépendants et événements incompatibles :
  indépendants $\Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
  incompatibles $\Rightarrow p(A \cap B) = 0$
- Dans une suite de tirage avec remise, les tirages successifs sont indépendants.
- Dans une suite de tirage sans remise, les tirages successifs ne sont pas indépendants.
- si A et B sont indépendants, il en est de même pour les paires d'événements A et $\overline{B}$; $\overline{A}$ et B; $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exemple

On effectue une suite de tirages dans une urne qui contient n boules dont r boules rouges.

Quelle est la probabilité pour que la première boule rouge apparaisse au troisième tirage ?

On considère les événements suivants :

A_i : "la ième boule tirée est rouge".

A : "la première boule rouge apparaît au troisième tirage".

On veut calculer $p(A)$.

On a :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) \\ &= p(A_3/\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \times p(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \\ &= p(A_3/\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \times p(\overline{A_2}/\overline{A_1}) \times p(\overline{A_1}) \end{aligned}$$

Il faut préciser le type de tirage effectué (avec ou sans remise) :

- Tirage avec remise : Les tirages sont indépendants
  A chaque tirage, la probabilité de tirer rouge est $p = \frac{r}{n}$.
  On a donc :

$$p(A) = p(A_3) \times p(\overline{A_2}) \times p(\overline{A_1}) = \frac{r}{n}(1 - \frac{r}{n})^2$$

- Tirage sans remise : Les tirages ne sont pas indépendants
  Après chaque tirage, la probabilité de tirer rouge change. On a donc :

$$p(A) = \frac{r}{n-2}(1 - \frac{r}{n-1})(1 - \frac{r}{n})$$

III.3- Tableau de contingence

Considérons deux familles complètes d'événements $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ et $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ et notons :

$$p(A_i \cap B_j) = p_{ij}$$

$$p(A_i) = p_{i.}$$

$$p(B_j) = p_{.j}$$

On peut présenter ces probabilités dans un tableau à deux dimensions, appelé tableau de contingence :

A_i \ B_j	B_1	B_2	$\dots$	B_j	$\dots$	B_m	Total
A_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}	$p_{1.}$
A_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$	p_{2m}	$p_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}	$p_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nm}	$p_{n.}$
Total	$p_{.1}$	$p_{.2}$	$\dots$	$p_{.j}$	$\dots$	$p_{.m}$	1

Chaque case (ligne i et colonne j) du tableau indique la probabilité conjointe p_{ij} qui est la probabilité de l'événement $A_i \cap B_j$

La dernière colonne du tableau indique les probabilités marginales $p_{i.}$ qui sont les probabilités respectives des événements A_i

La dernière ligne du tableau indique les probabilités marginales $p_{.j}$ qui sont les probabilités respectives des événements B_j

On a :

$$p_{i.} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p(A_i)$$

$$p_{.j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p(B_j)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i.} = \sum_{j=1}^{m} p_{.j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

Application

Lors d'un test d'un vaccin anti-grippe, on a noté les observations suivantes :

Parmi les personnes vaccinées, 20% ont été grippées et parmi les personnes non vaccinées, 46% ont été grippées.

On suppose que 25% des individus testés sont vaccinés.

Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard soit grippé ?

Soient les événements :
$A =$ "vacciné";
$\overline{A} =$ "non vacciné";
$B =$ "grippé";
$\overline{B} =$ "non grippé".

On a

$$P(B/A) = 0.2$$

$$P(B/\overline{A}) = 0.46$$

$$P(A) = 0.25$$

$$P(\overline{A}) = 0.75$$

On en déduit le tableau de contingence :

	B	$\overline{B}$	Total
A	0.20×0.25 =0.05	0.80×0.25 =0.2	0.25
$\overline{A}$	0.46×0.75 =0.345	0.54×0.75 =0.405	0.75
Total	0.395	0.605	1.00

D'où $p(B) = 39.5\%$.

III.4- Arbre pondéré

Exemple

On lance une pièce de monnaie :

- Si on obtient "pile", on tire une boule dans une urne contenant une boule blanche et deux boules noires.
- Si on obtient "face", on tire une boule dans une urne contenant trois boules blanches et deux boules noires.

Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ?

On peut représenter cette expérience aléatoire par un arbre pondéré :

.

Règle de construction d'un arbre pondéré :

- La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilité des différentes branches composant ce trajet.

Remarque

L'arbre pondéré est indiqué lorsqu'on a une expérience aléatoire à plusieurs niveaux.

Dans l'exemple précédent, on a une expérience à deux niveaux : on lance une pièce de monnaie (premier niveau) et on tire une boule (deuxième niveau).

Pour une expérience à deux niveaux, on peut utiliser soit un tableau de contingence, soit un arbre pondéré.

Exemple2

On effectue trois lancers successifs d'un dé. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : "obtenir exactement une fois le chiffre 1"

B : "obtenir exactement deux fois le chiffre 1"

C : "obtenir exactement trois fois le chiffre 1"

IV- Dénombrement - Analyse combinatoire

On se place dans le cas Ω fini et équiprobabilité.
On a alors pour tout événement A :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nobre de cas possibles}} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Remarque

Le dénombrement des cas favorables et des cas possibles peut nécessiter des calculs d'analyse combinatoire.

Cardinal

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini E, noté $Card(E)$, est le nombre d'éléments de E.

Propriétés :

- Soient A et B deux parties de E. On a :
  $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$
  $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$
- Si les ensembles $A_1, A_2, ..., A_p$ constituent une partition de E, alors on a :

$$Card(E) = Card(A_1) + Card(A_2) + ... + Card(A_p)$$

- Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis. On a :

$$Card(E_1 \times E_2) = Card(E_1) \times Card(E_2)$$

Exemple

Dans un groupe de 85 étudiants, 62 ont validé le module de Math, 54 ont validé le module de Physique et 20 n'ont validé aucun module.

Combien d'étudiants ont validé les deux modules ?

Soient E l'ensemble des étudiants,
M l'ensemble des étudiants ayant validé le module de Math,
P l'ensemble des étudiants ayant validé le module de Physique.

On a :
$Card(E) = 85$; $Card(M) = 62$; $Card(P) = 54$ et
$Card(\overline{M} \cap \overline{P}) = 20$.

On cherche $Card(M \cap P)$.

On a

$$\overline{M} \cap \overline{P} = \overline{M \cup P}$$

$$Card(\overline{M} \cap \overline{P}) = Card(E) - Card(M) - Card(P) + Card(M \cap P)$$

D'où

$$Card(M \cap P) = Card(\overline{M} \cap \overline{P}) - Card(E) + Card(M) + Card(P) = 51$$

On a

$$\overline{M} \cap \overline{P} = \overline{M \cup P}$$

$$Card(\overline{M} \cap \overline{P}) = Card(E) - Card(M) - Card(P) + Card(M \cap P)$$

D'où

$$Card(M \cap P) = Card(\overline{M} \cap \overline{P}) - Card(E) + Card(M) + Card(P) = 51$$

Remarque : On peut procéder par tableau de contingence.

Principe multiplicatif

Si la réalisation d'un événement A se fait en k étapes présentant respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_k$ possibilités, alors le nombre total de possibilités de réalisation de A est égale au produit : $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$.

Exemple

Pour former un code, on choisit au hasard deux lettres de l'alphabet suivies de trois chiffres non nuls. Combien peut-on former de codes distincts ?

Exemple

Pour former un code, on choisit au hasard deux lettres de l'alphabet suivies de trois chiffres non nuls. Combien peut-on former de codes distincts ?

Les cinq étapes pour former un code présentent respectivement 26, 26, 9, 9, 9 possibilités.
Donc le nombre de codes possibles est :

$$Card(\Omega) = 26^2 \times 9^3 = 492804$$

p-liste

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Une p-liste de E est un p-uplet d'éléments de E.
C'est donc une suite ordonnée de p éléments de E.

Proposition

Le nombre des p-listes d'un ensemble E de cardinal n est égal à n^p.

En effet, l'ensemble des p-listes de E est l'ensemble produit cartésien $E \times E \times \ldots \times E$, p fois.

Exemple

On tire successivement avec remise 4 boules, d'une urne qui contient 10 boules numérotées de 0 à 9.

Exemple

On tire successivement avec remise 4 boules, d'une urne qui contient 10 boules numérotées de 0 à 9.

Chaque résultat possible de cette expérience est une 4-liste de l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.
Donc le nombre de résultats possibles est :

$$Card(\Omega) = 10^4$$

Exemple

Au loto sportif, on coche l'une des trois cases 1, N ou 2 pour chacun des 15 matches sélectionnés. Dénombrer le nombre de grilles possibles.

Exemple

Au loto sportif, on coche l'une des trois cases 1, N ou 2 pour chacun des 15 matches sélectionnés. Dénombrer le nombre de grilles possibles.

Chaque résultat possible est une 15-liste de l'ensemble $E = \{1, N, 2\}$. Donc le nombre de grilles possibles est :

$$Card(\Omega) = 3^{15} = 14348907$$

Astuce

On fait appel au nombre de p-listes, n^p, lorsqu'on dénombre le nombre de façon de choisir au hasard p éléments parmi n avec prise en compte de l'ordre et avec répétition.

Arrangement

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ $(p \leq n)$.
Un arrangement sans répétition de p éléments de E est un p-uplet d'éléments distincts de E.
C'est donc une suite ordonnée de p éléments distincts de E.

Proposition

Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments choisis parmi n éléments de E, noté A_n^p, est égal à :

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

exemple

On tire successivement sans remise 4 boules, d'une urne qui contient 10 boules numérotées de 0 à 9.

exemple

On tire successivement sans remise 4 boules, d'une urne qui contient 10 boules numérotées de 0 à 9.

Chaque résultat possible de cette expérience est une une suite ordonnée de 4 éléments distincts de l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Donc le nombre de résultats possibles est :

$$Card(\Omega) = A_{10}^{4} = 5040$$

.

Astuce

On fait appel au nombre d'arrangement, A_n^p, lorsqu'on dénombre le nombre de façon de choisir, au hasard p éléments parmi n avec prise en compte de l'ordre et sans répétition.

Permutation

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E.
C'est donc une suite ordonnée de n éléments distincts de E.

Proposition

Le nombre de permutations de n éléments est égal à $n!$

exemple

On veut ranger 4 livres de math, 3 livres de physique et 5 livres de chimie dans 12 cases. On veut placer les livres de chaque catégorie les uns à coté des autres. Combien a-t-on de rangements possibles ?

exemple

On veut ranger 4 livres de math, 3 livres de physique et 5 livres de chimie dans 12 cases. On veut placer les livres de chaque catégorie les uns à coté des autres. Combien a-t-on de rangements possibles ?

La réponse est :

$$3! \times (4! \times 3! \times 5!) = 103680$$

Combinaison

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, ($p \leq n$).
On appelle combinaison de p éléments de E, tout sous-ensemble constitué de p éléments de E.
C'est donc une suite non ordonnée de p éléments distincts de E.

Proposition

Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n éléments, noté C_n^p*, est égal à :*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

exemples

- On tire simultanément 6 boules, d'une urne qui contient 49 boules numérotées de 1 à 49 :

  Chaque résultat possible de cette expérience est une une suite non ordonnée de 6 éléments distincts de l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, 49\}$.

exemples

- On tire simultanément 6 boules, d'une urne qui contient 49 boules numérotées de 1 à 49 :

  Chaque résultat possible de cette expérience est une une suite non ordonnée de 6 éléments distincts de l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, 49\}$.

  Donc le nombre de résultats possibles est :

$$Card(\Omega) = C_{49}^{6} = 13983816$$

- Quel est le nombre de droites que l'on peut tracer à partir de 7 points ?
- Dans un jeu de 52 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces 5 cartes s'appellent une "main").

1. Nombre de mains possibles ?
2. Nombre de mains qui contiennent exactement 3 as ?
3. Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as ?

Astuce

On fait appel au nombre de combinaison C_n^p lorsqu'on dénombre le nombre de façon de choisir, au hasard p éléments parmi n sans tenir compte de l'ordre et sans répétition.

Résumé des astuces des méthodes de dénombrement :

Méthode	Ordre	Répétition	Dénombrement
p-liste	Oui	Oui	n^p
Arrangement	Oui	Non	A_n^p
Combinaison	Non	Non	C_n^p

Chapitre 2
Variables aléatoires discrètes

Introduction

Le but de ce chapitre et du chapitre suivant est d'introduire des outils de calcul des probabilités avec les variables aléatoires (lois de probabilité).

Une variable aléatoire consiste à associer une valeur numérique à chaque résultat d'une expérience aléatoire.

I- Définition

Définition

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ un univers fini probabilisé. Toute application $X : \Omega \to \mathbf{R}$, qui à chaque événement élémentaire ω_i associe un nombre réel x_i, est appelée variable aléatoire discrète définie sur Ω.

On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, l'ensemble image de Ω par X. C'est l'ensemble des valeurs possibles prises par la variable aléatoire X.

Remarque :

- Chaque valeur x_i caractérise un événement A_i :
  $A_i = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\} = X^{-1}(x_i)$.
  L'événement associé à x_i est noté : $(X = x_i)$.

- Les événements $\{(X = x_i)),\ \ 1 \leq i \leq k\}$ forment une partition de Ω.

Exemples

- Soit l'expérience aléatoire : lancer deux fois une pièce de monnaie.
  On a $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$

  Soit X = nombre de faces obtenues.
  X est une variable aléatoire sur Ω.
  On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

  L'événement $(X = 1)$ correspond à l'événement
  $A = \{PF, FP\}$.

- On jette deux dés. On a $\Omega = \{(i,j), 1 \leq i,j \leq 6\}$.

  Soit X définie par $X(i,j) = i + j$.

  X est une variable aléatoire sur Ω.

  On a $X(\Omega) = \{2, 3, \ldots, 12\}$.

Remarque :

- L'ensemble des variables aléatoires définies sur Ω a une structure d'espace vectoriel réel et d'anneau commutatif et unitaire pour les opérations définies par :
  $\forall \omega \in \Omega, (X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$
  $\forall \omega \in \Omega, \forall \lambda \in \mathbf{R}, (\lambda X)(\omega) = \lambda X(\omega)$
  $\forall \omega \in \Omega, (XY)(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$

- Soit X une variable aléatoire et f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$: l'application composée foX, définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbf{R}$, est une variable aléatoire que l'on note usuellement $f(X)$.

II- Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition

Soit Ω un univers fini probabilisé et soit X une variable aléatoire discrète sur Ω.

On appelle loi de probabilité de X, l'application, notée p, définie de $X(\Omega)$ dans $[0,1]$ qui à chaque valeur $x_i \in X(\Omega)$ fait correspondre la probabilité $p(x_i)$ de l'événement $(X = x_i)$.

Remarque :

- Pour définir la loi de probabilité d'une v.a.d X, il faut et il suffit de connaître les valeurs $p_i = p(x_i), \ \forall x_i \in X(\Omega)$.
- Généralement, on représente la loi de probabilité d'une v.a.d. X sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$p(x_i)$	p_1	p_2	...	p_k

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$
- Graphiquement, la loi de probabilité d'une v.a.d. est représentée par un diagramme en bâtons.

Pour l'exemple précédent, on a :

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	0.25	0.5	0.25

Remarque :

On peut généraliser la notion de l'événement $(X = x_i)$ et définir pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, l'événement :
$(X \in I) = \{\omega \in \Omega / \ X(\omega) \in I\} = X^{-1}(I)$.

On a alors $p(X \in I) = \sum_{x_i \in I} p(x_i)$.

III- Fonction de répartition

Définition

Soit Ω un univers fini probabilisé et soit X une variable aléatoire discrète sur Ω.

On appelle fonction de répartition de X, l'application, notée F, définie de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ par :

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Propriétés :

- F est croissante,
- F est constante par intervalle (fonction en escalier),
- F est discontinue en x_i (continue à droite),
- $F(x)$ est définie par :

$$\begin{array}{lll} F(x) = 0, & \text{si} & x < x_1 \\ F(x) = F(x_i), & \text{si} & x_i \leq x < x_{i+1} \quad (1 \leq i \leq k-1) \\ F(x) = 1, & \text{si} & x \geq x_k \end{array}$$

- Le saut de discontinuité au point x_i est égal à $p(x_i)$.

IV- Paramètres d'une variable aléatoire

IV.1- Espérance mathématique

Définition

On appelle espérance mathématique de la v.a.d. X le nombre, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p(x_i)$$

Remarque :

Soit X une variable aléatoire et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application. Alors

$$E(f(X)) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i)p(x_i)$$

En particulier si $f(x) = x^r$, On obtient

$$E(X^r) = \sum_{i=1}^{k} x_i^r p(x_i)$$

$E(X^r)$ s'appelle le moment d'ordre r de X.

IV.2- Variance et écart-type

Définition

On appelle variance de X le nombre, noté $V(X)$ (ou $\sigma^2(X)$), défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 p(x_i)$$

Remarque : Formule simplifiée

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 p(x_i) - (E(X))^2$$

Définition

On appelle écart-type de X le nombre noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Propriétés :

Soient X et Y deux variables aléatoires et a et b deux constantes réelles, on a :

1. $E(aX+b) = aE(X)+b$
2. $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$
3. Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$
4. $V(aX+b) = a^2V(X)$
5. Si X et Y sont indépendantes alors $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$

Exemple

On lance un dé et on suppose que l'on gagne 10 dh si on obtient la face 1; 5 dh si on obtient la face 2 ou 3; 2 dh si on obtient la face 4 et on perd 5 dh si on obtient la face 5 ou 6.

On note X la v.a. qui représente le gain.

On a la loi de probabilité de X :

x_i	-5	2	5	10
p_i	1/3	1/6	1/3	1/6

L'espérance mathématique du gain est
$E(X) = -5 * 1/3 + 2 * 1/6 + 5 * 1/3 + 10 * 1/6 = 2$ dh.

La variance est donnée par :
$V(X) = 25 * 1/3 + 4 * 1/6 + 25 * 1/3 + 100 * 1/6 - 4 = 30.$

V- Couple aléatoire - Variables indépendantes

V.1- Loi d'un couple aléatoire

Définition

Soit Ω un univers fini probabilisé et Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω.
On appelle loi du couple (X, Y) ou loi conjointe de X et Y l'application, notée p, définie de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $[0, 1]$ par :

$$\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad p(x_i, y_j) = p((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

Si on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$; $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ et $p(x_i, y_j) = p_{ij}$, La loi conjointe et les lois marginales peuvent être représentées par un tableau à deux dimensions appelé tableau de contingence :

	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	Total
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}	$p(x_1)$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$	p_{2m}	$p(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}	$p(x_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	p_{k1}	p_{k2}	$\dots$	p_{kj}	$\dots$	p_{km}	$p(x_k)$
Total	$p(y_1)$	$p(y_2)$	$\dots$	$p(y_j)$	$\dots$	$p(y_m)$	1

On a :

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)$$

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i, y_j)$$

$$\sum_{i=1}^{k} p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1$$

V.2- Variables aléatoires indépendantes

Définition

Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si et seulement si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.

Corollaire

Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si et seulement si

$$\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad p(x_i, y_j) = p(x_i) \times p(y_j)$$

V.3- Covariance

Définition

On appelle covariance des variables aléatoires X et Y le nombre, noté $COV(X,Y)$ (ou σ_{XY}), défini par :

$$COV(X,Y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p(x_i, y_j) - E(X).E(Y)$$

Propriétés :

Soient X et Y deux v.a. et a et b deux constantes réelles, on a :

- $COV(X,X) = V(X)$
- Si X et Y sont indépendantes alors $COV(X,Y) = 0$
  La réciproque est fausse.
- $COV(X+a, Y+b) = COV(X,Y)$
- $COV(aX,bY) = ab.COV(X,Y)$

Remarque : Univers infini dénombrable

Dans le cas où $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ est infini dénombrable, une variable aléatoire X sur Ω peut prendre un nombre infini dénombrable de valeurs.

Dans ce cas, on dit que X est une variable aléatoire dénombrable.

Toutes les définitions et propriétés relatives aux variables aléatoires sur un univers fini restent valables sous réserve de convergence.

VI- Quelques lois de probabilité discrètes

VI.1- Loi de Bernoulli

Epreuve de Bernoulli

Définition

On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p toute expérience aléatoire n'ayant que deux résultats possibles : S appelé succès avec la probabilité p et $\bar{S}$ appelé échec avec la probabilité $q = 1 - p$ ($\Omega = \{S, \bar{S}\}$).

Exemples

- On lance une pièce de monnaie, $p = q = 0.5$.

- On lance un dé avec $S =$ point 5 $\Rightarrow p = \frac{1}{6}$.

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si et seulement si X représente le nombre de succès obtenus dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
On note $X \to \mathcal{B}(1, p)$.

On a $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
La loi de probabilité de X est donnée par :

$$P(X = k) = p^k q^{1-k}; \quad k = 0, 1$$

Caractéristiques

Si $X \rightarrow \mathcal{B}(1, p)$, alors

$$E(X) = p$$

et

$$V(X) = pq$$

VI.2- Loi binomiale

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p si et seulement si X représente le nombre de succès obtenus en répétant n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
On note $X \to \mathcal{B}(n, p)$.

On dit aussi que X est une variable binomiale de paramètre n et p.

Théorème

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors on a :

$$X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$$

et

$$\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Caractéristiques

Si $X \rightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors

$$E(X) = np$$

et

$$V(X) = npq$$

Exemple

la probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \frac{2}{3}$.
On suppose qu'il effectue n tirs ($n \geq 1$).
On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de succès obtenus.
On note A l'événement : "obtenir au moins un succès".

- Calculer $p(A)$.
- Combien de tirs faut-il effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins un succès soit supérieure à 0.9.
- On suppose $n = 10$. Calculer l'espérance et la variance de X.

Remarques

- Lorsque n est grand le calcul de la loi binomiale devient délicat; on peut utiliser des approximations avec d'autres lois (voir plus loin).

- L'expression de la loi binomiale est le terme général des coefficients du binôme de Newton

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1$$

d'où le nom de loi binomiale.

VI.1- Loi géométrique ou loi de Pascal

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique ou loi de Pascal de paramètre p si et seulement si X représente le nombre de répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p jusqu'à ce que le premier succès se réalise.
On note $X \rightarrow \mathcal{G}(p)$.

Théorème

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Pascal de paramètre p. Alors on a :

$$X(\Omega) = \boldsymbol{N}^*$$

et

$$\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = pq^{k-1}$$

Caractéristiques

Si $X \rightarrow \mathcal{G}(p)$, alors

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

et

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Remarque

Une variable aléatoire X qui suit une loi de Pascal est une variable aléatoire dénombrable ($X(\Omega) = \mathbb{N}^*$).

Exemple

Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires. On tire des boules au hasard et avec remise jusqu'à ce qu'on obtienne la première boule blanche (succès). Quelle est la probabilité que la première boule blanche soit tirée après 4 tirages ?

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de boules tirées jusqu'à l'obtention d'une boule blanche.

$$X \to \mathcal{G}(\frac{1}{3})$$

$$P(X = 4) = (\frac{2}{3})^3 \frac{1}{3}$$

VI.4- Loi hypergéométrique

Définition

Soit E un ensemble formé de N éléments et soit A un sous-ensemble de E formé de N_1 éléments.
On choisit au hasard simultanément n éléments à partir de E.
Soit X une variable aléatoire qui représente le nombre d'éléments choisis appartenant à A.

Alors on dit que la variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, N_1 et n.
On note $X \longrightarrow \mathcal{H}(N, N_1, n)$.

Théorème

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi hypergéométrique de paramètres N, N_1 et n. Alors on a :

$$X(\Omega) = [sup\{0,\ n - (N - N_1)\};\ inf\{n,\ N_1\}]$$

et

$$\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \frac{C_{N_1}^{k} C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}$$

Caractéristiques

Si $X \to \mathcal{H}(N, N_1, n)$, alors

$$E(X) = n\frac{N_1}{N} = np$$

et

$$V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

Exemple

Un joueur coche une grille de loto (il choisit 6 numéros parmi 49). Parmi les 49 numéros, on a 6 numéros gagnants (succès) et 43 numéros non gagnants.
1) Calculer la probabilité qu'a le joueur pour obtenir k numéros gagnants, ($k \in \{0, 1, \ldots, 6\}$).
2) En moyenne, combien de numéros gagnants obtient-on en jouant une grille de loto ?

L'univers Ω est l'ensemble des parties à 6 éléments de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, 49\}$. Donc $Card(\Omega) = C_{49}^{6}$.

Notons X la variable aléatoire correspondant au nombre de numéros gagnants.
On a $X \to \mathcal{H}(49, 6, 6)$, Donc

$$X(\Omega) = [0;\ 6]$$

et

$$P(X = k) = \frac{C_6^k C_{43}^{6-k}}{C_{49}^{6}}$$

On obtient :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	0.436	0.413	0.132	0.0177

k	4	5	6
$P(X=k)$	$9,69.10^{-4}$	$1,84.10^{-5}$	$7,15.10^{-8}$

On a $E(X)=np=6\frac{6}{49}\simeq 0.735$
Donc en moyenne, on obtient moins d'un numéro gagnant par grille cochée.

Remarques

- Si le choix de n éléments à partir de E se fait successivement et avec remise alors on a :

$$P(X=k)=C_n^k\frac{N_1^k(N-N_1)^{n-k}}{N^n}$$

- Si le choix de n éléments à partir de E se fait d'une manière successive et sans remise alors on a :

$$P(X=k)=C_n^k\frac{A_{N_1}^k A_{N-N_1}^{n-k}}{A_N^n}$$

VI.5- Loi de Poisson

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ ssi

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

et

$$\forall k \in X(\Omega) = \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

on note $X \to \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarques

Une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson est une variable aléatoire dénombrable ($X(\Omega) = \mathbb{N}$).

Caractéristiques

Si $X \rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors

$$E(X) = \lambda$$

et

$$V(X) = \lambda$$

Exemple

On admet que le nombre d'appels téléphoniques reçus par un standard, durant une période de temps T (en heures) suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10T$.
Donner la probabilité que le nombre d'appels reçus dans une période de 6 mn soit ≥ 4.

Soit N la variable aléatoire qui représente le nombre d'appels reçus dans une période $T = 6mn = 0.1heure$.
On a $N \to \mathcal{P}(1)$, Donc

$$P(N \geq 4) = 1 - P(N < 4) = 1 - \frac{8}{3e}$$

Remarque

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Si n est assez grand et p petit de telle sorte que le produit np soit de l'ordre de quelques unités ($np \leq 5$), alors on peut approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

Chapitre 3
Variables aléatoires continues

Dans ce chapitre, on suppose que l'ensemble Ω est infini non dénombrable.

I- Définition

Définition

Soit Ω un univers infini non dénombrable probabilisé.
On appelle variable aléatoire continue sur Ω toute variable aléatoire X définie sur Ω telle que l'ensemble $X(\Omega)$ est continu ($X(\Omega) = \mathbb{R}$ ou $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$).

Exemple :

On lance une flèche sur une cible matérialisée par un disque de rayon R.

On a $\Omega = \{M(x, y) \ / \ x^2 + y^2 \leq R\}$.

On note X la distance du point d'impact de la flèche au centre du disque.

X est une variable aléatoire continue : $X(\Omega) = [0, R]$.

II- Fonction de répartition d’une variable aléatoire continue

Définition

Soit Ω un univers infini non dénombrable probabilisé et soit X une variable aléatoire continue sur Ω. On appelle fonction de répartition de X, l'application, notée F, définie de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = p(X \leq x)$$

III- Densité de probabilité d'une variable aléatoire continue

Définition

Soit X une variable aléatoire continue et F sa fonction de répartition. On appelle densité de probabilité de X la fonction $f \geq 0$ vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Proposition

Une fonction f est une densité de probabilité ssi

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire continue, F sa fonction de répartition et f sa densité de probabilité. On a :

- F est croissante,
- F est continue sur $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1,$
- $f(x) = F'(x)$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

- $P(X \leq a) = P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt,$
- $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F(a) = \int_{a}^{+\infty} f(t)dt,$
- $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) =$
  $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)dt,$
- $P(X = a) = 0,$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer k et représenter $f(x)$.
2. Déterminer et représenter la fonction de répartition $F(x)$.
3. Calculer les probabilités des événements $(X \geq 2)$ et $(-1 \leq X < 2)$.

1) On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = k\int_{0}^{+\infty} e^{-2t}dt = \frac{k}{2}$
D'où $k = 2$.

2) On a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
D'où

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) $p(X \geq 2) = 1 - F(2) = e^{-4}$ et
$p(-1 \leq X < 2) = F(2) - F(-1) = 1 - e^{-4}$.

IV- Paramètres d'une variable aléatoire continue

IV.1- Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire continue et soit f sa densité de probabilité.

Définition

L'espérance mathématique de X (si elle existe) est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)dt$$

IV.2- Variance et écart-type

Définition

On suppose que l'espérance de X existe.
La variance de X (si elle existe) est définie par :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

avec

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$$

IV.2- Variance et écart-type

Définition

Si la variance de X existe, l'écart-type de X est défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Soient X et Y deux variables aléatoires continues et a et b deux constantes réelles. On a :

- $E(aX) = aE(X)$,
- $E(X + b) = E(X) + b$,
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$,
- Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$,
- Si φ est une fonction réelle continue, alors $$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f(t)dt,$$

- $V(aX) = a^2 V(X)$,
- $V(X + b) = V(X)$,
- Si X et Y sont indépendantes alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Exemple :

Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire de l'exemple précédent.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = 2\int_{0}^{+\infty} te^{-2t}dt.$$

Intégration par parties :

$$u(t) = t, \;\; v'(t) = e^{-2t} \Rightarrow u'(t) = 1, \;\; v(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}$$

D'où $E(X) = 2\left[-\frac{t}{2}e^{-2t}\right]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-2t}dt$

or $\left[-\frac{t}{2}e^{-2t}\right]_{0}^{+\infty} = 0$ et $\int_{0}^{+\infty} e^{-2t}dt = \frac{1}{2}$

Donc $E(X) = \frac{1}{2}$.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} t^2 e^{-2t} dt.$$

Intégration par parties :

$$u(t) = t^2, \;\; v'(t) = e^{-2t} \Rightarrow u'(t) = 2t, \;\; v(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}$$

D'où $E(X^2) = 2\left[-\frac{t^2}{2}e^{-2t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} te^{-2t} dt$

On a $\left[-\frac{t^2}{2}e^{-2t}\right]_0^{+\infty} = 0$ et $2\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt = E(X)$.

Donc $E(X^2) = \frac{1}{2}$.

Enfin, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{4}$ et

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{2}$.

Exercice :

Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{si } x \in [1, 2[\\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x \in [2, 4[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer la constante k.

2) Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$ de X.

3) Calculer les probabilités suivantes :
$p(X \geq 3)$, $p(1 < X < 3)$, $p(3 \leq X \leq 5)$.

4) Calculer l'espérance et la variance de X.

Soit Y une variable aléatoire définie par $Y = 4 - X$.

5) Déterminer la fonction de répartition et la fonction densité de probabilité de Y.

6) Calculer l'espérance et la variance de Y.

V- Lois de probabilité continues usuelles

V.1- Loi uniforme sur [a,b]

Définition

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ ssi sa densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a,b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On note $X \to \mathcal{U}([a,b])$.

La fonction de répartition est alors donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

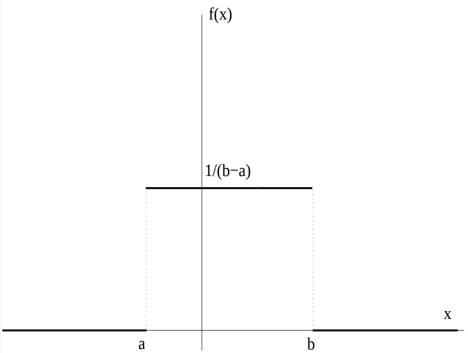


Figure: Densité de la loi uniforme.

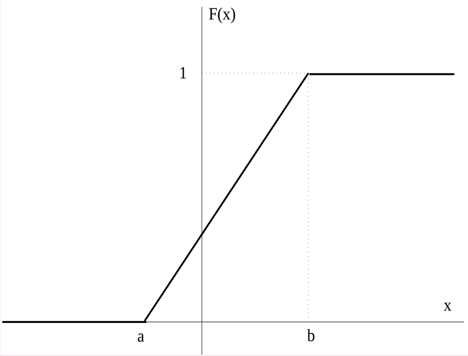


Figure: Fonction de répartition de la loi uniforme.

Caractéristiques

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ sont données par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

V.2- Loi exponentielle

Définition

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit la loi exponentielle de paramètre λ ssi sa densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On note $X \rightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

On a alors :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

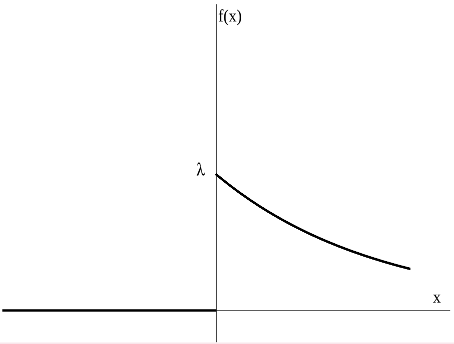


Figure: Densité de la loi exponentielle.

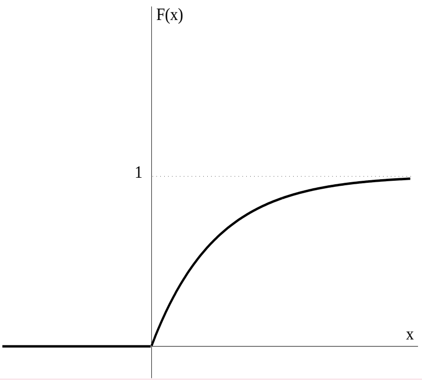


Figure: Fonction de répartition de la loi exponentielle.

Caractéristiques

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ sont données par :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

V.3- Loi Normale ou loi de Gauss

Définition

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit la loi normale de paramètres m et σ ssi sa densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On note $X \to \mathcal{N}(m, \sigma)$.

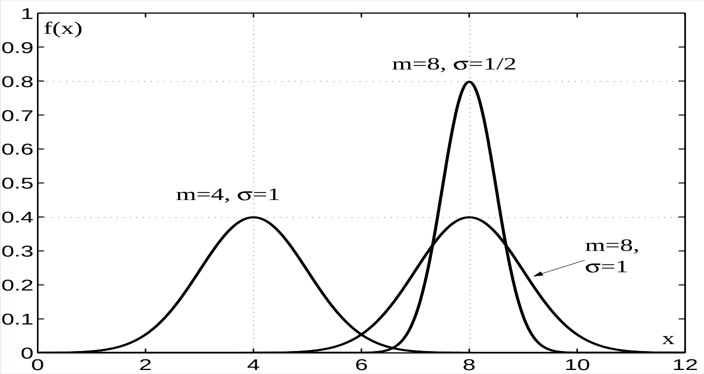


Figure: Densité de probabilité de la loi normale pour différentes valeurs de m et σ

Caractéristiques

Proposition

Si $X \rightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ alors l'espérance et la variance de X sont données par :

$$E(X) = m \; , \qquad V(X) = \sigma^2$$

Remarque

La fonction de répartition de la loi normale ne peut pas être exprimée à l'aide de fonctions élémentaires. Elle ne peut être calculée que numériquement.

Pour simplifier le problème, on utilise les propositions suivantes :

Proposition

Si $X \to \mathcal{N}(m, \sigma)$ alors la variable aléatoire centrée réduite $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

$\mathcal{N}(0, 1)$ est appelée loi normale centrée réduite.

- On note $\varphi(x)$ et $\phi(x)$, respectivement, la densité et la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad , \qquad \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$$

- On dispose de tables numériques donnant les valeurs $\varphi(x)$ et $\phi(x)$ pour x variant de 0 à 5.9

- Pour les valeurs négatives de x, on a :

$$\varphi(-x) = \varphi(x)$$

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x)$$

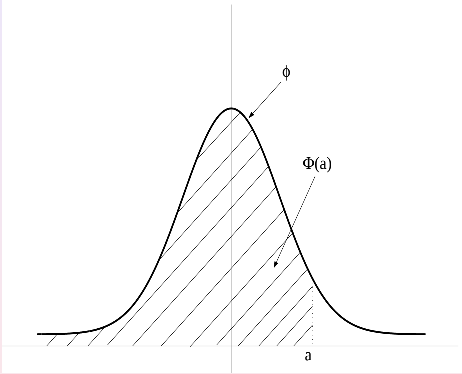


Figure: Densité et fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

Proposition

Si $X \rightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ alors les valeurs de la fonction de répartition $F(x)$ et de la fonction densité de probabilité $f(x)$ de X se déduisent de celles de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ à l'aide des relations suivantes :

$$F(x) = \phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

Utilisation de la table numérique de $\phi(x)$

- Pour les valeurs de x variant de 0 à 2.99, on lit les décimales dans les lignes de la première colonne et les centièmes dans les colonnes de la première ligne.

Utilisation de la table numérique de $\phi(x)$

- Pour les valeurs de x variant de 0 à 2.99, on lit les décimales dans les lignes de la première colonne et les centièmes dans les colonnes de la première ligne.

  Par exemple, la valeur de $\phi(1.34)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.3 et de la colonne 0.04

Utilisation de la table numérique de $\phi(x)$

- Pour les valeurs de x variant de 0 à 2.99, on lit les décimales dans les lignes de la première colonne et les centièmes dans les colonnes de la première ligne.

  Par exemple, la valeur de $\phi(1.34)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.3 et de la colonne 0.04

  On trouve $\phi(1.34) = 0.90988$

- Pour les valeurs de x comprises entre 3 et 5.9, la table donne $1 - \phi(x)$. On lit la partie entière dans les lignes de la première colonne et les décimales dans les colonnes de la première ligne. La notation $\{m; k\}$ signifie $m\ 10^{-k}$.

- Pour les valeurs de x comprises entre 3 et 5.9, la table donne $1-\phi(x)$. On lit la partie entière dans les lignes de la première colonne et les décimales dans les colonnes de la première ligne. La notation $\{m;k\}$ signifie $m\ 10^{-k}$.

  Par exemple, la valeur de $1-\phi(4.6)$ se trouve à l'intersection de la ligne 4 et de la colonne 0.6

- Pour les valeurs de x comprises entre 3 et 5.9, la table donne $1 - \phi(x)$. On lit la partie entière dans les lignes de la première colonne et les décimales dans les colonnes de la première ligne. La notation $\{m; k\}$ signifie $m\ 10^{-k}$.

  Par exemple, la valeur de $1 - \phi(4.6)$ se trouve à l'intersection de la ligne 4 et de la colonne 0.6

  On trouve $\{2.11; 6\}$, c'est à dire $\phi(4.6) = 1 - 2.11\ 10^{-6}$.

- Pour les valeurs de x comprises entre 0 et 5.9 avec plus de 2 chiffres après la virgule, on détermine $\phi(x)$ soit par arrondi soit par interpolation.

- Pour les valeurs de x comprises entre 0 et 5.9 avec plus de 2 chiffres après la virgule, on détermine $\phi(x)$ soit par arrondi soit par interpolation.

  Par exemple, la valeur de $\phi(1.3476)$ peut être soit approximée par $\phi(1.35)$ (on trouve 0.91149), soit calculée par interpolation à partir des valeurs de $\phi(1.34)$ et $\phi(1.35)$ (on trouve 0.91110).

- Pour les valeurs de x comprises entre 0 et 5.9 avec plus de 2 chiffres après la virgule, on détermine $\phi(x)$ soit par arrondi soit par interpolation.

  Par exemple, la valeur de $\phi(1.3476)$ peut être soit approximée par $\phi(1.35)$ (on trouve 0.91149), soit calculée par interpolation à partir des valeurs de $\phi(1.34)$ et $\phi(1.35)$ (on trouve 0.91110).
- Pour les valeurs négatives, on utilise $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$.

- Pour les valeurs de x comprises entre 0 et 5.9 avec plus de 2 chiffres après la virgule, on détermine $\phi(x)$ soit par arrondi soit par interpolation.

  Par exemple, la valeur de $\phi(1.3476)$ peut être soit approximée par $\phi(1.35)$ (on trouve 0.91149), soit calculée par interpolation à partir des valeurs de $\phi(1.34)$ et $\phi(1.35)$ (on trouve 0.91110).
- Pour les valeurs négatives, on utilise $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$.
- Pour les valeurs de $x > 5.9$, on considère que $\phi(x) \simeq 1$.

Utilisation de la table numérique de $\varphi(x)$

- Pour les valeurs de x comprises entre 0 et 2.99, on lit les décimales dans les lignes de la première colonne et les centièmes dans les colonnes de la première ligne.

Utilisation de la table numérique de $\varphi(x)$

- Pour les valeurs de x comprises entre 0 et 2.99, on lit les décimales dans les lignes de la première colonne et les centièmes dans les colonnes de la première ligne.

  Par exemple, la valeur de $\varphi(1.34)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.3 et de la colonne 0.04

Utilisation de la table numérique de $\varphi(x)$

- Pour les valeurs de x comprises entre 0 et 2.99, on lit les décimales dans les lignes de la première colonne et les centièmes dans les colonnes de la première ligne.

  Par exemple, la valeur de $\varphi(1.34)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.3 et de la colonne 0.04

  On trouve $\varphi(1.34) = 0.16256$

- Pour les valeurs de x comprises entre 3 et 5.9, on lit la partie entière dans les lignes de la première colonne et les décimales dans les colonnes de la première ligne. La notation $\{m; k\}$ signifie $m\ 10^{-k}$.

- Pour les valeurs de x comprises entre 3 et 5.9, on lit la partie entière dans les lignes de la première colonne et les décimales dans les colonnes de la première ligne. La notation $\{m; k\}$ signifie $m\ 10^{-k}$.

  Par exemple, la valeur de $\varphi(4.6)$ se trouve à l'intersection de la ligne 4 et de la colonne 0.6

- Pour les valeurs de x comprises entre 3 et 5.9, on lit la partie entière dans les lignes de la première colonne et les décimales dans les colonnes de la première ligne. La notation $\{m; k\}$ signifie $m\ 10^{-k}$.

  Par exemple, la valeur de $\varphi(4.6)$ se trouve à l'intersection de la ligne 4 et de la colonne 0.6

  On trouve $\{1.01; 5\}$, c'est à dire $\varphi(4.6) = 1.01\ 10^{-5}$.

- Pour les valeurs de x comprises entre 0 et 5.9 avec plus de 2 chiffres après la virgule, on détermine $\varphi(x)$ soit par arrondi soit par interpolation.

- Pour les valeurs de x comprises entre 0 et 5.9 avec plus de 2 chiffres après la virgule, on détermine $\varphi(x)$ soit par arrondi soit par interpolation.
- Pour les valeurs de $x > 5.9$, on considère que $\varphi(x) \simeq 0$.

- Pour les valeurs de x comprises entre 0 et 5.9 avec plus de 2 chiffres après la virgule, on détermine $\varphi(x)$ soit par arrondi soit par interpolation.
- Pour les valeurs de $x > 5.9$, on considère que $\varphi(x) \simeq 0$.
- Pour les valeurs négatives, on utilise $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Exemples

- Soit $X \to \mathcal{N}(3.5, 2)$. Calculer $P(X < 4)$.

On a

$$P(X < 4) = F(4) = \phi\left(\frac{4 - 3.5}{2}\right) = \phi(0.25) = 0.59871$$

- Soit $X \to \mathcal{N}(50, 4)$. Calculer $P(40 < X < 60)$.

On a

$$\begin{aligned} P(40 < X < 60) &= F(60) - F(40) \\ &= \phi\left(\frac{60-50}{4}\right) - \phi\left(\frac{40-50}{4}\right) \\ &= \phi(2.5) - \phi(-2.5) \\ &= 2\phi(2.5) - 1 \\ &= 0.98756 \end{aligned}$$

VI- Approximation des lois de probabilité discrètes par une loi normale

Soit $X \rightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
Pour n suffisamment grand ($n > 50$) et p et q pas trop proches de zéro ($np > 10$ et $nq > 10$), la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approximée par la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

Soit $X \to \mathcal{P}(\lambda)$.
Pour λ suffisamment grand ($\lambda > 20$), la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ peut être approximée par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Remarque (correction de continuité

Soit X une variable aléatoire discrète ($X \to \mathcal{B}(n,p)$ ou $X \to \mathcal{P}(\lambda)$).

Soit Y la variable aléatoire normale qui permet d'approximer la loi de X ($Y \to \mathcal{N}(m,\sigma)$).

Pour associer à un événement concernant X (v.a.d.) un événement concernant Y (v.a.c.), on introduit une correction de continuité de la façon suivante :

Événement associé à X	Événement associé à Y
$(X = k)$	$(k - 0.5 \leq Y \leq k + 0.5)$
$(X \geq k)$	$(Y \geq k - 0.5)$
$(X > k)$	$(Y \geq k + 0.5)$
$(X \leq k)$	$(Y \leq k + 0.5)$
$(X < k)$	$(Y \leq k - 0.5)$

Exemple

On jette un dé 6000 fois. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où on obtient la face 1 après les 6000 jets.

1) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

2) Justifier l'approximation de la loi de X par la loi de Gauss.

3) Calculer les probabilités suivantes :
- $p(980 \leq X \leq 1030)$,
- $p(980 < X < 1030)$.