Chapitre 4. Lois de Probabilité

Introduction

Il est toujours possible d'associer à une variable aléatoire une probabilité et définir ainsi une **loi de probabilité**. Lorsque le nombre d'épreuves augmente indéfiniment, les **fréquences observées** pour le phénomène étudié **tendent vers les probabilités** et les distributions observées vers les distributions de probabilité ou loi de probabilité.

Identifier la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire donnée est essentiel car cela conditionne le choix des méthodes employées pour répondre à une question biologique donnée (chapitre 5 et 6).

Lois discrètes

Loi de Uniforme

Une distribution de probabilité suit une **loi uniforme** lorsque toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont **équiprobables**. Si n est le nombre de valeurs différentes prises par la variable aléatoire, $\forall\, i, \quad P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$

Exemple :
La distribution des chiffres obtenus au lancer de dé (si ce dernier est non pipé) suit une loi uniforme dont la loi de probabilité est la suivante :

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

avec pour espérance : $E(X) = \dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = 3,5$ et pour variance $V(X) = \dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i^2 - E(X)^2 = 2,92$

où les valeurs x_i correspondent au rang i de la variable X dans la série.

Dans le cas particulier d'une **loi discrète uniforme** où les valeurs de la variable aléatoire X correspondent au rang $x_i = i$ $(\forall\, i \in [1, n])$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$ **Démonstration**.

En effet

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 + 2 + 3 + \ldots + n \\ n + (n-1) + \ldots + 1 \end{bmatrix} = \frac{n(n+1)}{2}$$

d'où

$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n} = \frac{(n+1)}{2}.$$

Par ailleurs on a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

On doit donc montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} 12i^2 - 3n(n+1)^2 = n\left(n^2-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} 12i^2 = n\left[4n^2 + 6n + 2\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = n\left[\frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right]$$

Démonstration par récurrence

La formule

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n\left[\frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right]$$

est vraie pour n = 1.

Posons $S_n := \sum_{i=1}^{n} i^2$ **est supposons que**

$$S_n = n\left[\frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right]$$

on doit avoir

$$S_{n+1} = n\left[\frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right] + (n+1)^2$$

La formule est vraie pour n + 1 si

$$n\left[\frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right] + (n+1)^2 - (n+1)\left[\frac{(n+1)^2}{3} + \frac{(n+1)}{2} + \frac{1}{6}\right] = 0$$

d'où le résultat!

Loi de Bernoulli

Soit un univers Ω constitué de **deux éventualités**, S pour succès et E pour échec

$$\Omega = \{E, S\}$$

sur lequel on construit une variable aléatoire discrète, « *nombre de succès* » telle que au cours d'**une** épreuve, si S est réalisé, $X = 1$

si E est réalisé, $X = 0$

On appelle **variable de Bernoulli** ou variable *indicatrice*,
la variable aléatoire X telle que : $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$X(\Omega) = \{0,1\}$$

La **loi de probabilité** associée à la variable de Bernoulli X telle que,

$P(X = 0) = q$

$P(X = 1) = p$ avec $p + q = 1$

est appelée **loi de Bernoulli notée $\mathcal{B}(1, p)$**

L'**espérance** de la variable de Bernoulli est

car par **définition** $E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = (0 \text{ x } q) + (1 \text{ x } p) = p$

La **variance** de la variable de Bernoulli est $\boxed{V(X) = pq}$

car par **définition** $V(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 p_i - E(X)^2 = [(0 \text{ x } q) + (1 \text{ x } p)] - p^2$

d'où $V(X) = p - p^2 = p\,(1 - p) = pq$

Loi binomiale

Décrite pour la première fois par Isaac **Newton** en 1676 et démontrée pour la première fois par le mathématicien suisse Jacob **Bernoulli** en 1713, la **loi binomiale** est l'une des distributions de probabilité les plus fréquemment rencontrées en statistique appliquée.

Soit l'application $S_n : \Omega^n \to \mathbb{R}^n$

avec $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots + X_n$ où X_i est une variable de **Bernoulli**

La **variable binomiale**, S_n, représente le **nombre de succès** obtenus lors de la répétition de n épreuves **identiques et indépendantes**, chaque épreuve ne pouvant donner que deux résultats possibles.

Ainsi la loi de probabilité suivie par **la somme de *n* variables de Bernoulli** où la probabilité associée au succès est p, est la **loi binomiale** de paramètres n et p.

$$S_n : \Omega^n \to \mathbb{R}^n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \to \quad \mathcal{B}(n,p)$$

La probabilité que $S_n = k$, c'est à dire l'obtention de k succès au cours de n épreuves indépendantes est :

$$\boxed{P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

Démonstration

Il est facile de démontrer que l'on a bien une loi de probabilité car :

$$\sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1 \text{ car } p+q = 1$$

Remarque : Le développement du **binôme de Newton** $(p+q)^n$ permet d'obtenir l'ensemble des probabilités pour une distribution binomiale avec une valeur n et p donnée. Il existe également des tables de la loi binomiale où les probabilités sont tabulées pour des valeurs n et p données.

Exemple :

Dans une expérience sur **le comportement du rat**, *rattus norvegicus*, on fait pénétrer successivement n rats dans un labyrinthe en forme de H. On étudie alors la probabilité que k rats empruntent la branche supérieure droite du H.

A chaque épreuve, deux évènements peuvent se produire : soit le rat suit l'itinéraire voulu (succès) soit il ne l'emprunte pas (échec). Sachant qu'il y a 4 itinéraires possibles (branches), la probabilité du succès $p = 1/4$.

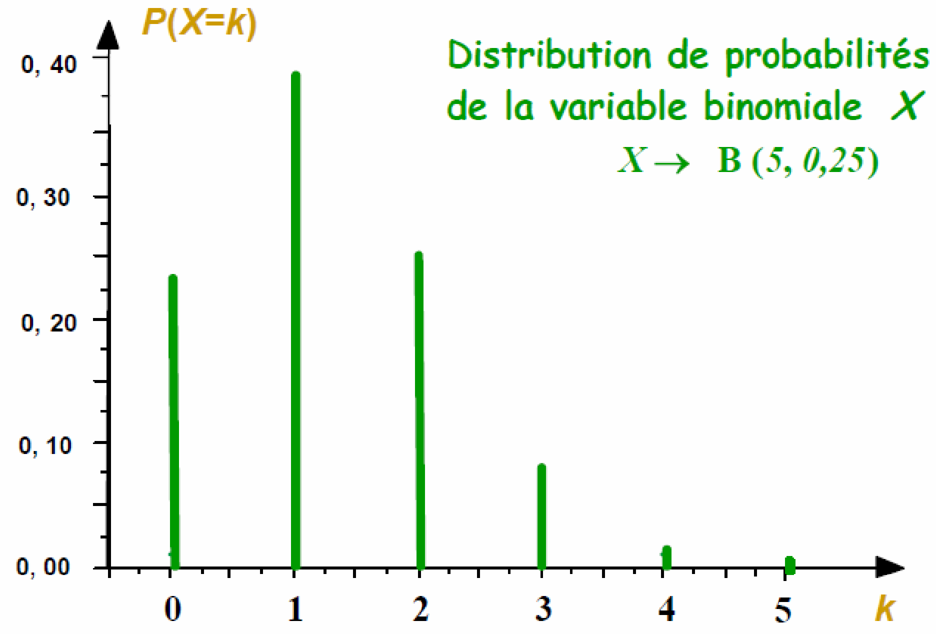
Hypothèse :

- si les rats n'ont pas été conditionnés,
- si la branche supérieure droite ne comporte aucun élément attractif ou répulsif,
- si le choix de l'itinéraire d'un rat n'affecte pas le choix du suivant (odeurs)

alors : la variable aléatoire X « itinéraire emprunté pour x rats » suit une loi binomiale

$$\boxed{X \to \beta(n, \frac{1}{4})}$$

dont la distribution des probabilités est la suivante si l'on étudie le comportement de **5 rats** :



Nombre de rats ayant empruntˇ la branche supˇrieure droite du labyrinthe.

k	$P(X=k)$
0	$C_5^0\left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0{,}237$
1	$C_5^1\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right) = 0{,}395$
2	$C_5^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0{,}264$
3	$C_5^3\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0{,}088$
4	$C_5^4\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^4 = 0{,}015$
5	$C_5^5\left(\frac{1}{4}\right)^5 = 0{,}001$

Espérance et variance pour la loi binomiale

L'**espérance** d'une variable binomiale S_n est égale à $\boxed{E(S_n) = np}$

en effet $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots + X_n)$

or $E(X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ **propriété de l'espérance**

et $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p$ avec $E(X_i) = p$ variable de **Bernoulli**

d'où $E(S_n) = np$

La **variance** d'une variable binomiale S_n est égale à $\boxed{V(S_n) = npq}$

en effet $V(S_n) = V(X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots + X_n)$

or $V(X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ **propriété de la variance**

et $V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq$ avec $V(X_i) = pq$ car variable de **Bernoulli**

d'où $V(S_n) = npq$

Stabilité de la loi binomiale

Théorème :
Si S_n et S_m sont deux variables **indépendantes** suivant des lois binomiales respectivement
$S_n \to \mathcal{B}(n,p)$ et $S_m \to \mathcal{B}(m,p)$ alors $S_n + S_m \to \mathcal{B}(n+m,p)$ **démonstration**

Loi de Poisson

Pour chaque entier $k \geq 1$ (fixé) la loi binomiale vérifie la propriété suivante :

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

lorsque $n \to +\infty$, sous la contrainte

$$np = \lambda$$

où λ est le nombre moyen de réalisation.

Remarque: Si on reprend l'exemple des rats, on pour n=100 rats on a p=1/4 et λ=25.

Comparaison de la loi binomiale et la loi de Poisson

pour n=100, λ=1, p=0.01

Binomiale

Poisson

TABLE 2
AN EXAMPLE OF THE POISSON APPROXIMATION

k	$b(k; 100, 0.01)$	$p(k; 1)$	N_k
0	0.366 032	0.367 879	41
1	0.369 730	0.367 879	34
2	0.184 865	0.183 940	16
3	0.060 999	0.061 313	8
4	0.014 942	0.015 328	0
5	0.002 898	0.003 066	1
6	0.000 463	0.000 511	0
7	0.000 063	0.000 073	0
8	0.000 007	0.000 009	0
9	0.000 001	0.000 001	0

The first columns illustrate the Poisson approximation to the binomial distribution. The last column records the number of batches of 100 pairs of random digits each in which the combination (7, 7) appears exactly k times.

Donc en pratique lorsque l'on a un « grand nombre » d'évènements qui suivent une loi binomiale et qu'on connaît la moyenne λ, on peut utiliser une loi de Poisson.

Démonstration

En effet on a $p = \dfrac{\lambda}{n}$

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\left[\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right]$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\left[\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^n (n-\lambda)^{n-k}\right]$$

Mais d'aprés la formule de Striling (i.e. $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ **) on a**

$$\frac{n!}{(n-k)!} \approx \sqrt{\frac{n}{n-k}}\,\frac{n^n}{(n-k)^{n-k}}\,e^{-k}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^n (n-\lambda)^{n-k} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{n-k}}\left(\frac{n-\lambda}{n-k}\right)^{n-k} e^{-k}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-\lambda}{n-k}\right)^{n-k} e^{-k}$$

Pour conclure il reste a montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-\lambda}{n-k}\right)^{n-k} e^{-k} = e^{-\lambda}$$

En effet on a

$$\left(\frac{n-\lambda}{n-k}\right)^{n-k} = e^{(n-k)\ln\left(\frac{n-\lambda}{n-k}\right)} = e^{(n-k)\ln\left(\frac{n-\lambda}{n-k}-1+1\right)}$$

$$\ln\left(\frac{n-\lambda}{n-k}-1+1\right) = \frac{n-\lambda}{n-k}-1+O\left(\left(\frac{n-\lambda}{n-k}-1\right)^2\right)$$

$$= \frac{-\lambda+k}{n-k}+O\left(\left(\frac{-\lambda+k}{n-k}\right)^2\right)$$

Donc

$$e^{(n-k)\ln\left(\frac{n-\lambda}{n-k}-1+1\right)} = e^{-\lambda+k+(n-k)O\left(\left(\frac{-\lambda+k}{n-k}\right)^2\right)} \to e^{-\lambda+k} \text{ **quand** } n\to+\infty,$$

d'où le résultat.

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit une **loi de Poisson de paramètre λ** ($\lambda > 0$) si

les réels p_k sont donnés par $$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

on note : $X \rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Remarque : Une loi de Poisson est donnée par sa loi de probabilité :

(1) $\forall k, P(X = k) > 0$

(2) $\sum_{k \geq 0} P(X = k) = \sum_{k \geq 0} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}$ or $\sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$

d'où $\sum_{k \geq 0} P(X = k) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$

Espérance et variance

L'**espérance** d'une variable aléatoire de Poisson est $\boxed{E(X) = \lambda}$

Par **définition** $E(X) = \sum_{k \geq 0} k p_k = \sum_{k \geq 0} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ avec $k \in \mathbb{N}$ valeurs prises par la v.a. X

avec $\sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} = \left[\lambda + \frac{\lambda^2}{1!} + \frac{\lambda^3}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \right] = \lambda \left[1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!} \right]$

d'où $E(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k>0} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$

La **variance** d'une variable de Poisson est $\boxed{V(X) = \lambda}$

Par **définition** $V(X) = \sum_{k\geq 0} k^2 p_k - E(X)^2 = \sum_{k\geq 0} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \lambda^2$

en posant $k^2 = k + k(k-1)$, alors

$$\sum_{k\geq 0} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{k}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} + \sum_{k\geq 0} \frac{k(k-1)}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}$$

d'où $\sum_{k\geq 0} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \left[\lambda + \frac{\lambda^2}{1!} + \frac{\lambda^3}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \right] + e^{-\lambda} \left[\lambda^2 + \frac{\lambda^3}{1!} + \frac{\lambda^4}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^{k+2}}{k!} \right]$

d'où $\sum_{k\geq 0} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}$

d'où $V(X) = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} - \lambda^2 = \lambda$

Comparaison de la loi binomiale et la loi de Poisson

pour n=500, p=1/365, λ=500/365

(*c*) *Birthdays.* What is the probability, p_k, that in a company of 500 people exactly k will have birthdays on New Year's Day? If the 500 people are chosen at random, we may apply the scheme of 500 Bernoulli trials with probability of success $p = \frac{1}{365}$. For the Poisson approximation we put $\lambda = \frac{500}{365} = 1.3699\ldots$.

The correct probabilities and their Poisson approximations are as follows:

k	0	1	2	3	4	5	6
Binomial	0.2537	0.3484	0.2388	0.1089	0.0372	0.0101	0.0023
Poisson	0.2541	0.3481	0.2385	0.1089	0.0373	0.0102	0.0023

(*b*) *Flying-bomb hits on London.* As an example of a spatial distribution of random points consider the statistics of flying-bomb hits in the south of London during World War II. The entire area is divided into $N = 576$ small areas of $t = \frac{1}{4}$ square kilometers each, and table 4 records the number N_k of areas with exactly k hits.[14] The total number of hits is $T = \sum kN_k = 537$, the average $\lambda t = T/N = 0.9323 \ldots$. The fit of the

---

[13] Rutherford, Chadwick, and Ellis, *Radiations from radioactive substances*, Cambridge, 1920, p. 172. Table 3 and the χ^2-estimate of the text are taken from H. Cramér *Mathematical methods of statistics*, Uppsala and Princeton, 1945, p. 436.

[14] The figures are taken from R. D. Clarke, *An application of the Poisson distribution*, Journal of the Institute of Actuaries, vol. 72 (1946), p. 48.

Poisson distribution is surprisingly good; as judged by the χ^2-criterion, under ideal conditions some 88 per cent of comparable observations should show a worse agreement. It is interesting to note that most people believed in a tendency of the points of impact to cluster. If this were true, there would be a higher frequency of areas with either many hits or no hit and a deficiency in the intermediate classes. Table 4 indicates perfect randomness and homogeneity of the area; we have here an instructive illustration of the established fact that to the untrained eye randomness appears as regularity or tendency to cluster.

TABLE 4

EXAMPLE (*b*): FLYING-BOMB HITS ON LONDON

k	0	1	2	3	4	5 and over
N_k	229	211	93	35	7	1
$Np(k; 0.9323)$	226.74	211.39	98.54	30.62	7.14	1.57

(*c*) *Chromosome interchanges in cells.* Irradiation by X-rays produces certain processes in organic cells which we call chromosome interchanges. As long as radiation continues, the probability of such interchanges remains constant, and, according to theory, the numbers N_k of cells with exactly k interchanges should follow a Poisson distribution. The theory is also able to predict the dependence of the parameter λ on the intensity of radiation, the temperature, etc., but we shall not enter into these details. Table 5 records the result of eleven different series of experiments.[15] These are arranged according to goodness of fit. The last column indicates the approximate percentage of ideal cases in which chance fluctuations would produce a worse agreement (as judged by the χ^2-standard). The agreement between theory and observation is striking.

[15] D. G. Catcheside, D. E. Lea, and J. M. Thoday, *Types of chromosome structural change induced by the irradiation* of Tradescantia *microspores*, Journal of Genetics, vol. 47 (1945–46), pp. 113–136. Our table is table IX of this paper, except that the χ^2-levels were recomputed, using a single degree of freedom.

TABLE 5
EXAMPLE (c): CHROMOSOME INTERCHANGES INDUCED BY X-RAY IRRADIATION

Experiment number		Cells with k interchanges				Total N	χ^2-level in per cent
		0	1	2	≥ 3		
1	Observed N_k	753	266	49	5	1073	95
	$Np(k; 0.35508)$	752.3	267.1	47.4	6.2		
2	Observed N_k	434	195	44	9	682	85
	$Np(k; 0.45601)$	432.3	197.1	44.9	7.7		
3	Observed N_k	280	75	12	1	368	65
	$Np(k; 0.27717)$	278.9	77.3	10.7	1.1		
4	Observed N_k	2278	273	15	0	2566	65
	$Np(k; 0.11808)$	2280.2	269.2	15.9	0.7		
5	Observed N_k	593	143	20	3	759	45
	$Np(k; 0.25296)$	589.4	149.1	18.8	1.7		
6	Observed N_k	639	141	13	0	793	45
	$Np(k; 0.21059)$	642.4	135.3	14.2	1.1		
7	Observed N_k	359	109	13	1	482	40
	$Np(k; 0.28631)$	362.0	103.6	14.9	1.5		
8	Observed N_k	493	176	26	2	697	35
	$Np(k; 0.33572)$	498.2	167.3	28.1	3.4		
9	Observed N_k	793	339	62	5	1199	20
	$Np(k; 0.39867)$	804.8	320.8	64.0	9.4		
10	Observed N_k	579	254	47	3	883	20
	$Np(k; 0.40544)$	588.7	238.7	48.4	7.2		
11	Observed N_k	444	252	59	1	756	5
	$Np(k; 0.49339)$	461.6	227.7	56.2	10.5		

(*e*) *Bacteria and blood counts.* Figure 1 reproduces a photograph of a Petri plate with bacterial colonies, which are visible under the microscope as dark spots. The plate is divided into small squares. Table 7 reproduces the observed numbers of squares with exactly k dark spots in eight experiments with as many different kinds of bacteria.[17] We have here a

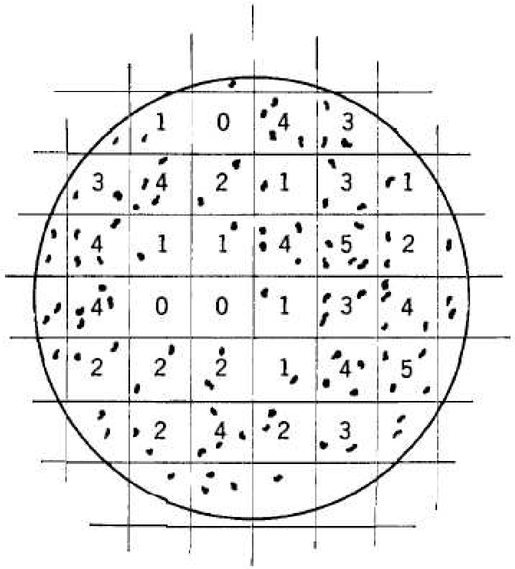


Figure 1. Bacteria on a Petri plate.

[17] The table is taken from J. Neyman, *Lectures and conferences on mathematical statistics* (mimeographed), Dept. of Agriculture, Washington, 1938.

representative of an important practical application of the Poisson distribution to spatial distributions of random points. ▶

TABLE 7
EXAMPLE (*e*): COUNTS OF BACTERIA

k	0	1	2	3	4	5	6	7	χ^2-Level
Observed N_k	5	19	26	26	21	13	8		97
Poisson theor.	6.1	18.0	26.7	26.4	19.6	11.7	9.5		
Observed N_k	26	40	38	17	7				66
Poisson theor.	27.5	42.2	32.5	16.7	9.1				
Observed N_k	59	86	49	30	20				26
Poisson theor.	55.6	82.2	60.8	30.0	15.4				
Observed N_k	83	134	135	101	40	16	7		63
Poisson theor.	75.0	144.5	139.4	89.7	43.3	16.7	7.4		
Observed N_k	8	16	18	15	9	7			97
Poisson theor.	6.8	16.2	19.2	15.1	9.0	6.7			
Observed N_k	7	11	11	11	7	8			53
Poisson theor.	3.9	10.4	13.7	12.0	7.9	7.1			
Observed N_k	3	7	14	21	20	19	7	9	85
Poisson theor.	2.1	8.2	15.8	20.2	19.5	15	9.6	9.6	
Observed N_k	60	80	45	16	9				78
Poisson theor.	62.6	75.8	45.8	18.5	7.3				

The last entry in each row includes the figures for higher classes and should be labeled "k" or more."

Exemple :

Une suspension bactérienne contient 5000 bactéries/litre. On ensemence à partir de cette suspension, 50 **boites de Pétri**, à raison d'1 cm^3 par boite. Si X représente le nombre de colonies par boite, alors la loi de probabilité de X est :

$$X \rightarrow \mathcal{P}\,(\lambda=5)$$

La probabilité qu'il n'y ait **aucune** colonie sur la boite de Pétri est :

Rappel: 1 litre=1000 cm^3

Donc ici le nombre moyen de bactéries par boite est 5.
On suppose aussi que le nombre de colonie par boite est le même que le nombre moyen de bactéries par boites

$$P(X=0)=\frac{5^0 e^{-5}}{0!}=\mathbf{0{,}0067}$$ soit approximativement **0,67 % de chance**.

La probabilité qu'il n'y ait **au moins une** colonie sur la boite de Pétri est :

$P(X>0)$=1- $P(X=0)$ = 1-0,0067 = **0,9933** soit **99,3 % de chance** d'avoir au moins une colonie bactérienne qui se développe dans la boite de Pétri. (voir **événement contraire**)

Stabilité de la loi de Poisson

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des **lois de Poisson** respectivement

$X \to \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \to \mathcal{P}(\mu)$ alors $X + Y \to \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ **démonstration**

Loi binomiale négative (des temps d'attente)

Sous les conditions de Bernoulli (épreuves identiques et indépendantes), on désire connaître la probabilité (d'attendre) de faire ***X*=*k* épreuves indépendantes**, pour **avoir *n* succès**.

X suit une **loi binomiale négative** de paramètres n et p notée $\mathcal{BN}\ (n,p)$ si :

$$P(X=k)=C_{k-1}^{n-1}p^{n}q^{k-n} \quad \text{avec } k,\, n \in \mathbb{N} \;\text{ et }\; k \geq n$$

Espérance et variance

L'**espérance** associée à une loi binomiale négative est :

$$\boxed{E(X) = \frac{n}{p}}$$

La **variance** associée à une loi binomiale négative est :

$$\boxed{V(X) = n\frac{q}{p^2}}$$

Loi géométrique ou loi de Pascal ou binomiale négative avec n=1

Lorsque le nombre de succès n est égal à 1, la loi de la variable aléatoire discrète X porte le nom de loi de Pascal ou **loi géométrique** de paramètre p telle que :

$$P(X=k)=pq^{k-1} \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}^*$$

D'où l'**espérance** associée à la loi géométrique est :

$$\boxed{E(X)=\frac{1}{p}}$$

et la **variance** associée à la loi géométrique est :

$$\boxed{V(X)=\frac{q}{p^2}}$$

Lois continues

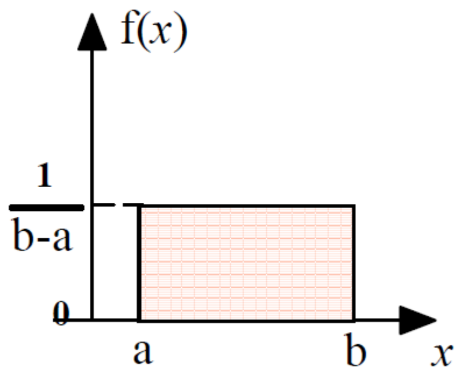
Loi Uniforme

La loi uniforme est la loi exacte de phénomènes continus uniformément répartis sur un intervalle.

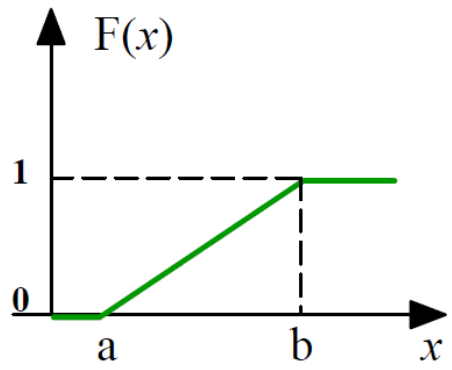
La variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur le segment $[a,b]$ avec $a < b$ si sa **densité de probabilité** est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{si } x \in [a,b]$$

$$f(x) = 0 \quad \text{si } x \notin [a,b]$$



Fonction de densité de probabilité



Fonction de répartition

Espérance et variance

L'**espérance** de la loi uniforme continue vaut :

$$\boxed{E(X) = \frac{b+a}{2}}$$

En effet par **définition** $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

$E(X) = \int_{-\infty}^{a} x f(x) dx + \int_{a}^{b} x f(x) dx + \int_{b}^{+\infty} x f(x) dx$ cours analyse (Intégrale)

or $\int_{-\infty}^{a} x f(x) dx = 0$ et $\int_{b}^{+\infty} x f(x) dx = 0$ par définition de la loi uniforme continue

d'où $E(X) = \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} x dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b$

$$E(X) = \frac{1}{2(b-a)} \left[b^2 - a^2 \right] = \frac{1}{2(b-a)} (b-a)(b+a) = \frac{b+a}{2}$$

La **variance** de la loi uniforme continue vaut : $\boxed{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$

En effet par **définition** $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(X)^2$

$V(X) = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} - E(X)^2$ même simplification que pour l'espérance

$$V(X) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - E(X)^2 = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^3-a^3}{3}\right] - \left[\frac{b+a}{2}\right]^2$$

or $\frac{1}{b-a}\left|\frac{b^3-a^3}{3}\right| = \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$ et $\left|\frac{(b+a)^2}{4}\right| = \frac{1}{4}(b^2+2ab+a^2)$

d'où $V(X) = \frac{1}{b-a}\left|\frac{b^3-a^3}{3}\right| - \left|\frac{(b+a)^2}{4}\right| = \frac{(b-a)^2}{12}$

Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

On parle de **loi normale** lorsque l'on a affaire à une variable aléatoire continue dépendant d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets s'additionnent et dont aucune n'est prépondérante (conditions de Borel). Cette loi acquiert sa forme définitive avec **Gauss** (en 1809) et **Laplace** (en 1812). C'est pourquoi elle porte également les noms de : **loi de Laplace, loi de Gauss et loi de Laplace-Gauss.**

Une **variable aléatoire absolument continue** X suit une loi normale de paramètres (μ, σ) si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{avec } \mu \in \mathbb{R} \text{ et } \sigma \in \mathbb{R}^+$$

Notation : $X \to \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ car on ne peut pas calculer cette intégrale par des méthodes usuelles.

La fonction f est **paire** autour d'un axe de symétrie $\boldsymbol{x = \mu}$ car $f(x + \mu) = f(\mu - x)$
d'où $D_E = [\mu\,,+\infty[$

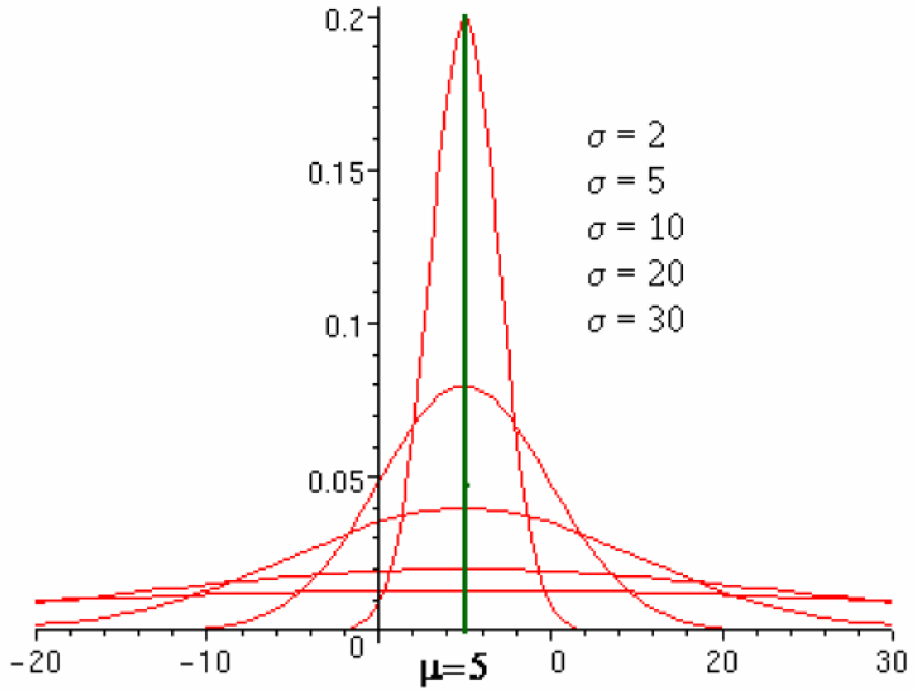
La dérivé première $f'(x)$ est égale à : $f'(x) = -\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma^2}\right) f(x)$ Démonstration

d'où $f'(x) = 0$ pour $x = \mu$ et $f'(x) < 0$ pour $x > \mu$

La dérivé seconde $f''(x)$ est égale à : $f''(x) = -\dfrac{1}{\sigma^2}\left(1 - \dfrac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) f(x)$ Démonstration

d'où $f''(x) = 0$ pour $x = \mu + \sigma$ et $f''(x) > 0$ pour $x > \mu + \sigma$

x	μ	$\mu + \sigma$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	0	-	
$f(x)$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}$	0



Espérance et variance

L'**espérance** de la loi normale vaut : $\boxed{E(X) = \mu}$

La **variance** de la loi normale vaut : $\boxed{V(X) = \sigma^2}$

Stabilité de la loi normale

Théorème :
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires normales **indépendantes** de paramètres respectifs (μ_1, σ_1) , (μ_2, σ_2), alors leur somme X_1+X_2 est une variable aléatoire normale de paramètres $(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Loi normale centré et réduite

Une variable aléatoire continue X suit une **loi normale réduite** si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

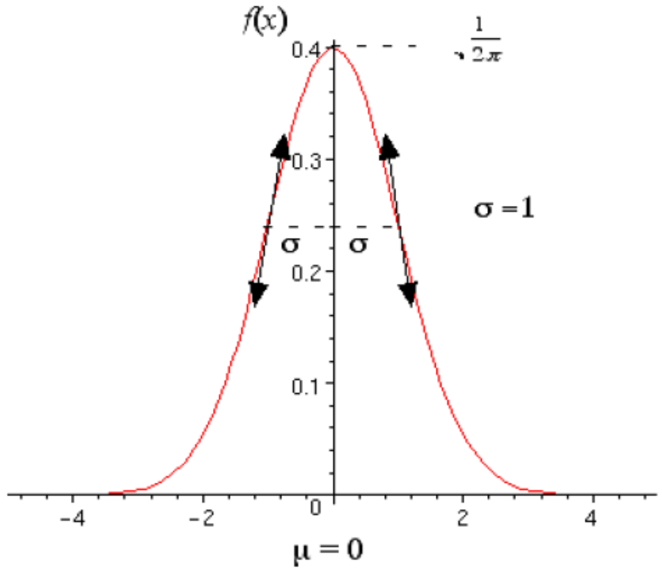
$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Remarque : f est bien une loi de probabilité car :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$
- f est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

La fonction f est paire car $f(-x) = f(x)$ d'où $D_E = [0,+\infty[$
La dérivé première est $f'(x) = -x\,f(x)$ avec $f'(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$.
La dérivée seconde est $f''(x) = -f(x) + x^2 f(x) = (x^2 - 1)\,f(x)$ qui s'annule pour $x = 1$ sur D_E.

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	0



Remarque : L'axe de symétrie correspond à l'axe des ordonnées ($x = 0$) et le degré d'aplatissement de la courbe de la loi normale réduite est 1.

L'**espérance** d'une loi normale réduite est : $\boxed{E(X) = 0}$

En effet par **définition** $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

Or la fonction à intégrer est impaire d'où $E(X)=0$ (cours d'analyse : intégrale)

La **variance** d'une loi normale réduite est : $\boxed{V(X) = 1}$

En effet par **définition** $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E(X)^2$

d'où $V(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$$V(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \text{ avec } \left(\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \right) = 0$$

or $V(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ par définition d'une fonction de répartition

d'où $V(X) = 1$

Relation avec la loi normale

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, alors $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, une **variable centrée réduite** suit une **la loi normale réduite** $\mathcal{N}(0,1)$.

Lois déduites de la loi normale

Loi du χ^2 de Pearson

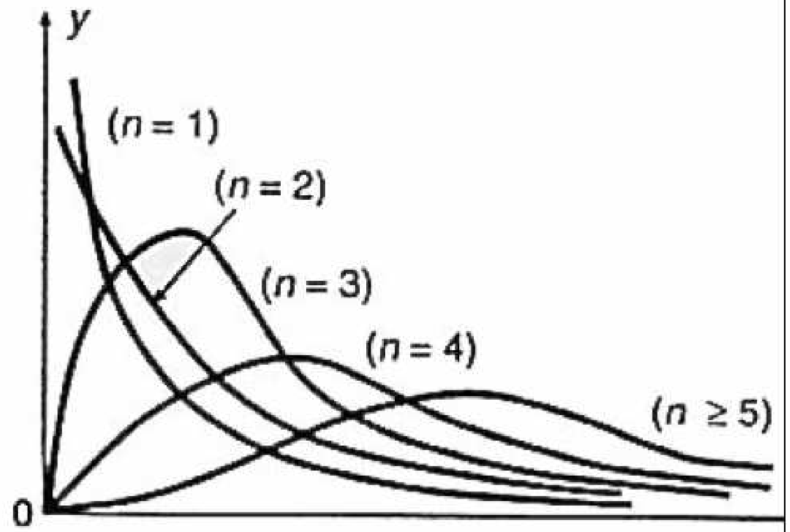
Définition

La **loi de Pearson ou loi de χ^2 (Khi deux)** trouve de nombreuses applications dans le cadre de la comparaison de proportions, des tests de conformité d'une distribution observée à une distribution théorique et le test d'indépendance de deux caractères qualitatifs. Ce sont les **test du khi-deux**.

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n,$ n variables **normales centrées réduites**, on appelle χ^2 la variable aléatoire définie par :

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_i^2 + \ldots + X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

On dit que χ^2 suit une **loi de Pearson** à n **degrés de liberté** (d.d.l.).

Pour $\chi^2 > 0$, la fonction densité de probabilité est de la forme : $f(\chi^2) = C(n)\chi^{2\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$ avec $C(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ Pour $\chi^2 \leq 0$, $f(\chi^2) = 0$ Pour $n > 1$, on utilise **la table du Khi 2**	

Remarque : La constante $C(n)$ est telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. La distribution du χ^2 est dissymétrique et tend à devenir symétrique lorsque n augmente en se rapprochant de la **distribution normale** à laquelle elle peut être assimilée lorsque $n > 30$.

Espérance et variance

L'**espérance** de la variable du χ^2 est : $\boxed{E(\chi^2) = n}$

car par définition $E(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)$ avec X_i variable normale réduite

or $V(X_i) = E(X_i^{\ 2}) - E(X_i)^2 = 1$ pour la **variable normale réduite** avec $E(X_i) = 0$

d'où $E(X_i^{\ 2}) = 1$ et donc $E(\chi^2) = n$

La **variance** de la variable du χ^2 est : $\boxed{V(\chi^2) = 2n}$

car par définition les X_i variables normales réduites étant indépendantes,

$V(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i^2)$ et d'autre part $V(X_i^2) = E(X_i^{\ 4}) - [E(X_i^2)]^2$

or $E(X_i^{\ 4}) = 3$ d'où $V(X_i^2) = 3 - 1 = 2$

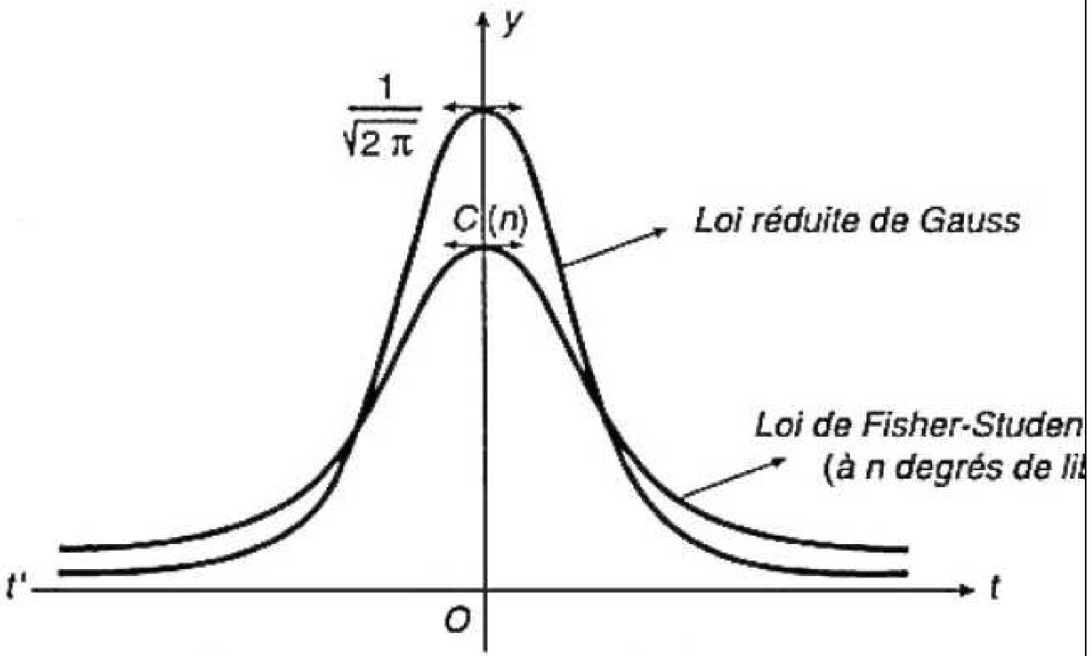
ainsi $V(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i^2) = 2n$

Loi de Student

Définition

La **loi de Student (ou loi de Student-Fisher)** est utilisée lors des tests de comparaison de paramètres comme la moyenne et dans l'estimation de paramètres de la population à partir de données sur un échantillon (Test de Student). Student est le pseudonyme du statisticien anglais William Gosset qui travaillait comme conseiller à la brasserie Guinness et qui publia en 1908 sous ce nom, une étude portant sur cette variable aléatoire.

Soit U une variable aléatoire suivant une **loi normale réduite** $\mathcal{N}(0,1)$ et V une variable aléatoire suivant une **loi de Pearson** à n degrés de liberté χ_n^2 , U et V étant **indépendantes**, on dit alors que $T_n = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{n}}}$ suit une **loi de Student** à n degrés de liberté.

La fonction densité de probabilité est de la forme : $f(T) = C(n)\left(1+\frac{T^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}$ Calcul des probabilités avec **[la table de la loi de Student]**	

Remarque : La constante $C(n)$ est telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. La distribution du T de Student est symétrique et **tend vers une loi normale** lorsque n augmente indéfiniment.

L'**espérance** de la variable de Student est : $\boxed{E(T) = 0 \quad \text{si } n > 1}$

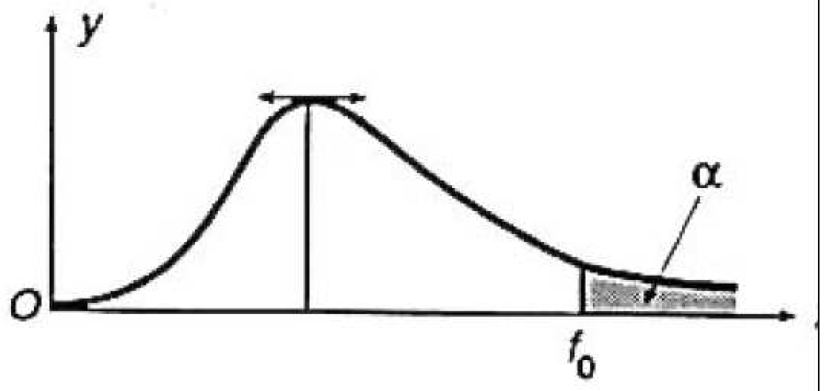
La **variance** de la variable de Student est : $\boxed{V(T) = \dfrac{n}{n-2} \quad \text{si } n > 2}$

Loi de Fisher-Snedecor

La **loi de Fisher-Snedecor** est utilisée pour comparer deux variances observées et sert surtout dans les très nombreux tests d'analyse de variance et de covariance.

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant une **loi de Pearson** respectivement à n et m degrés de liberté.

On dit que $F = \dfrac{U/n}{V/m}$ suit une loi de **Fisher-Snedecor** à $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$ degrés de liberté.

Pour $F > 0$, la fonction densité de probabilité est de la forme : $f(F) = C_{(n,m)} F^{\frac{n}{2}-1} (m+nF)^{-\left(\frac{n+m}{2}\right)}$ Pour $F \leq 0$, $f(F) = 0$ Utilisation **des tables de Fisher-Snedecor** pour le calcul des probabilités.	 $P(F > f_0) = \alpha$

Remarque : Si $n = 1$, alors on a la relation suivante : $F_{(1,m)} = \dfrac{U^2}{V/m} = T_m^2$ (voir **Rapport entre loi de probabilité**).

L'**espérance** de la variable de Fisher-Snédecor est : $\boxed{E(F) = \frac{m}{m-2} \quad \text{si } m > 2}$

La **variance** de la variable de Fisher-Snédecor est : $\boxed{V(F) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)} \quad \text{si } m > 4}$

Convergence en loi

Le théorème central limite

Appelé également théorème de la limite centrale, il fut établi par **Liapounoff** et Lindeberg.

On se place dans une situation **d'épreuves répétées**, caractérisées par une suite $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ de n variables aléatoires indépendantes et de même loi (espérance $E(X_i) = \mu$ et variance $V(X_i) = \sigma^2$). On définit ainsi deux nouvelles variables aléatoires :

la somme $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots + X_n$

la moyenne $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \dfrac{S_n}{n}$

$E(S_n) = n\mu$ $V(S_n) = n\sigma^2$	$E(M_n) = \mu$ $V(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

Théorème central limite

Soit la variable aléatoire S_n résultant de la **somme de *n* variables aléatoires indépendantes et de même loi**, on construit la variable centrée réduite telle que :

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\left(\sigma\sqrt{n}\right)}$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition $F_n(t) = P(Z_n < t)$ est telle que :

$$F_n(t) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ quand } n \to \infty \text{ c'est à dire } \mathcal{N}(0,1).$$