Cours 3: Rappels de probabilités

A- Notions de base

B- Variables aléatoires

C- Lois classiques

D-Convergence de v.a.

A- Notions de base

Théorie des probabilités

- ✓ Décrit le comportement de phénomènes dont le résultat est soumis au hasard

- ✓ permet de modéliser la fréquence de réalisation d'« évènements » aléatoires.

A.1 Notions de base : quelques définitions

- **Expérience aléatoire** $\boxed{\mathcal{E}}$: expérience dont le résultat ne peut pas être déterminé avec certitude a priori.

- **Univers de $\mathcal{E}$** = ensemble des résultats possibles de $\mathcal{E}$. On le note $\boxed{\Omega}$.

- **Résultat élémentaire de $\mathcal{E}$** = résultat possible de $\mathcal{E}$. C'est un élément de Ω . On le note $\boxed{\omega}$

Ex1 : $\mathcal{E}$: " lancer d'un dé régulier "

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}=[|1,6|]$,

$\omega=2$ est un résultat possible

Ex2 : $\mathcal{E}$: "jet de deux pièces de monnaie distinguables ".

$\Omega=\{(P,P)\ ;\ (P,F)\ ;\ (F,P)\ ;\ (F,F)\}$.

$\omega=(P,P)$ est un résultat possible

Ex3 : $\mathcal{E}$: " lancer d'un crayon sur une feuille de papier de dim l* L. Chaque point de la feuille est repéré par son abscisse et son ordonnée.

$\Omega==\{(x,y),\ x\in\ [0,l],\ y\in[0,L]\}$ infini

$\omega=(l/2,L/2)$

A.2 Notions de base: évènements

- ✓ **Ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω :** ensemble constitué de tous les sous-ensembles (parties) de Ω

- ✓ **Evènement (aléatoire)**

  =une partie (sous-ensemble) de Ω

  = assertion, qui peut ou non se réaliser suivant l'issue de $\mathcal{E}$.

- ✓ **Réalisation d'un événement** :

  Soit A un évènement de Ω. Soit ω le résultat de l'expérience

$$\boxed{A \text{ se réalise} \iff \omega \in A}$$

CP : A=Ω se réalise toujours. On l'appelle évènement certain.

A=$\varnothing$ ne se réalise jamais. On l'appelle évènement impossible.

A={w} s'appelle événement élémentaire.

Ex0 : Si $\Omega = \{ a, b, c \}$, $\mathcal{P}(\Omega)$ a 8 éléments.

l'ensemble vide : $\varnothing$

les parties à un élt. : { a },{b}, {c}

les parties à deux élts. : {b,c},{a,c},{a,b}

les parties à trois éléments : {a,b, c}=Ω

Ex1 : A=« le lancer est pair »={2,4,6}.

Ex2 : A= « on obtient deux piles »={(P,P)}

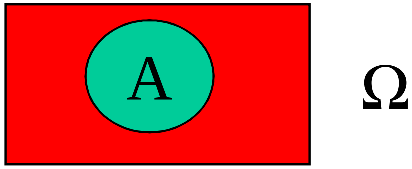
Si le résultat de $\mathcal{E}$ est ω=(F,P) alors A ne se réalise pas.

Ex3: A=« le lancer a une abscisse >l/2 »=]l/2,l]*[0,L]

A.2 Notions de base: évènements

✓ **Opérations sur les évènements**

➢ Complémentaire de A : événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui ne sont pas dans A. Soit ω le résultat de l'expérience :

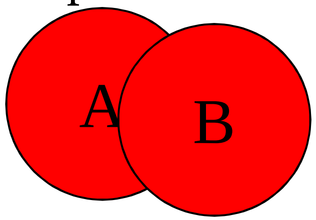


$$\boxed{\overline{A} = \{\omega \in \Omega,\ \omega \notin A\}}$$

($\overline{A}$ se réalise ssi A ne se réalise pas : non A).

➢ Réunion de A et B: évènement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). Soit ω le résultat de l'expérience :

$$\boxed{A \cup B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}}$$

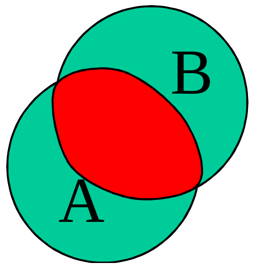


($A \cup B$ se réalise ssi A se réalise ou B se réalise : A ou B).

➢ Intersection de A et B: évènement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à la fois à A et à B. Soit ω le résultat de l'expérience

$$\boxed{A \cap B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}}$$

($A \cap B$ se réalise ssi A et B se réalisent : A et B).

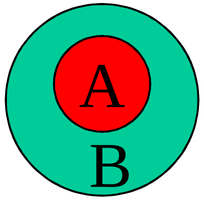


A.2 Notions de base: évènements

- Relations particulières :

  - Inclusion : A est inclus dans B ssi tout élément de A appartient à B :

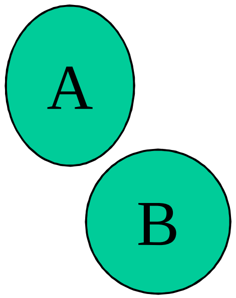
$$\boxed{A \subset B \;\Leftrightarrow\; (\omega \in A \Rightarrow \omega \in B)}$$



(Si A est réalisé alors B est réalisé).

  - Disjonction ou incompatibilité: A et B sont disjoints ssi A et B n'ont pas d'éléments communs :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ disjoints} \Leftrightarrow (A \cap B = \emptyset)}$$



(A et B disjoints : A et B sont incompatibles).

A.2 Notions de base: évènements

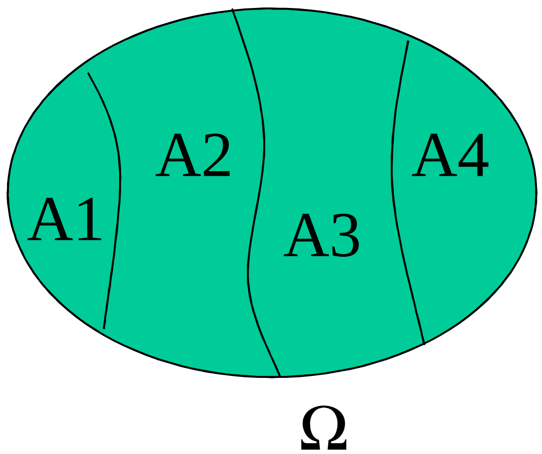
✓ **Système complet d'évènements** : Soient A_1 , A_2 , ... , A_n n événements. On dit que (A_1 , A_2 , ... , A_n) constitue un système complet d'événements si ils forment une partition de Ω :

- ils sont deux à deux incompatibles

$$\boxed{\forall p \neq q \quad A_p \cap A_q = \emptyset}$$

- si leur réunion est l'événement certain Ω

$$\boxed{\bigcup_{p=1}^{n} A_p = \Omega}$$



Ex : $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'évènements.

A.2 Notions de base: évènements

✓ **Tribu d'évènements de Ω, espace probabilisable**

- Tribu d'un ensemble de parties de Ω: Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$. $\mathcal{A}$ est une tribu ou sigma-algèbre si elle contient Ω et est stable par complémentation et réunion dénombrable. On dit alors que $(\Omega,\mathcal{A})$ est un espace probabilisable.

Exemples : Tribu grossière $\mathcal{A}=\{\emptyset, \Omega\}$

Tribu des parties (appelée aussi tribu discrète) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

Tribu des boréliens $\mathcal{A}=\{]a,+\infty[, a\in \mathbb{Q} \text{ (ou } \mathbb{R})\}$, lorsque $\Omega=\mathbb{R}$

Tribu des boréliens $\mathcal{A}=\{]a,b[, a<b, (a,b)\in I^2\}$, lorsque $\Omega=I$ intervalle de $\mathbb{R}$

Autres exemples de tribus $\mathcal{A} =\{A, \overline{A}, \emptyset, \Omega\}$

$\Omega=\{a,b,c,d\}$, $\mathcal{A}=\{\emptyset,\{a\},\{b,c,d\},\Omega\}$

- Choix d'une tribu : se fait en fonction de l'information qu'on a sur le problème. lorsque l'univers est fini ou dénombrable, on travaille généralement avec la tribu discrète. Lorsque l'univers est infini ($\Omega=\mathbb{R}$ ou I) on travaille avec la tribu borélienne.

A.3 Notions de base: probabilité

Probabilité= fonction permettant de « mesurer » la chance de réalisation d'un évènement de $\mathcal{P}(\Omega)$ (ou plus généralement d'une tribu $\mathcal{A}$)

- ✓ **Définition** : Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$ est une application $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ satisfaisant les 3 axiomes suivants :

$$0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i), \quad \forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ ensemble dénombrable d'évènements disjoints}$$

Dès lors que P est définie, $(\Omega,\mathcal{A},P)$ s'appelle un espace probabilisé.

A.3 Notions de base: probabilité

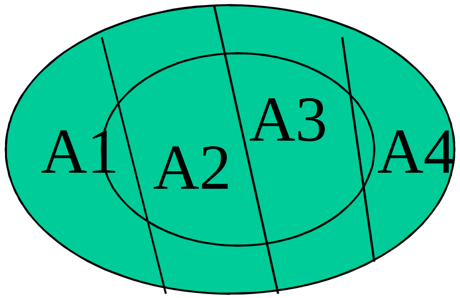
- ✓ **Opérations sur les probab**

$$P(\phi)=0$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)$$
$$P(A)\leqslant P(B)\ si\ A\subset B$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(\cup A_i)\leqslant \sum P(A_i)$$
$$0\leqslant P(A_i)\leqslant 1$$

CP: Si P(A)=0 alors A est *presque* impossible. On écrit $A=\varnothing$ *p*.s.
Si P(A)=1 alors A est *presque* sûr. On écrit $A=\Omega$ p.s.

- ✓ **Axiome des probabilités totales** : $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ système complet d'évènements :

$$\boxed{\forall B\in \mathcal{A},\quad P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)}$$



A.3 Notions de base: probabilité

✓ **Construction pratique d'une probabilité en univers fini ou dénombrable**

On suppose que l'ensemble des événements possibles est fini ou dénombrable. On note $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ l'ensemble des résultats possibles.

- on définit la probabilité p_i de chaque résultat élémentaire ω_i
  on a alors une suite $(p_1, \ldots, p_{n\ldots})$ de nombres tels que : $\boxed{0 \leq p_i \leq 1 \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$
- la probabilité d'un événement quelconque A est donné par

$$\boxed{P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i}$$

A.3 Notions de base: probabilité

- CP d'un univers fini équiprobable : Lorsqu'il n'y a pas lieu d'attacher aux différents évènements élémentaires des probabilités différentes, on a pour tout ωi, $p_i = p$. On dit que l'univers est équiprobable**.** Lorsque l'univers est fini, de cardinal $|\Omega|$, on a $p_i = p = 1/|\Omega|$.On définit alors la probabilité P comme précédemment : soit A un événement quelconque.

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

Cette probabilité est appelée probabilité uniforme sur Ω.

A.3 Notions de base: probabilité

Ex 2 : $\mathcal{E}$: “jet de deux pièces de monnaie distinguables “. Ω={(P,P) ; (P,F) ; (F,P) ; (F,F)} est équiprobable. Soit A= “On obtient au moins une fois P ”={(P,P) ; (P,F) ; (F,P) }. P(A)=3/4

Ex1bis : $\mathcal{E}$: « jet d’un dé pipé : le 6 apparaît 2 fois plus que les autres ». W non équiprobable : p1=p2=p3=p=p5=p; p6=2p, p tel que :5p+2p=1, p=1/7
A=« le lancer est pair »; P(A)=p2+p4+p6=4/7.

Ex3 : $\mathcal{E}$=« lancer de la mine de crayon ». Soit A un événement (surface sur la feuille) de Ω d’aire $\mathcal{A}$. Si tous les emplacements sur la feuille ont la même chance d’être atteints, intuitivement, on peut définir P(A)=$\mathcal{A}$/l*L
Par contre, P({(x,y})=0 (lorsque Ω est infini, on admet que la probabilité de tomber sur un point particulier est nulle).

A.4 Notions de base: probabilité conditionnelle, indépendance

- **Probabilité conditionnelle de A sachant B**: $\boxed{P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

(probabilité que A se réalise sachant que B se réalise). C'est une probabilité sur B.

- **Indépendance de deux évènements A et B**

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(A/B) = P(A) \\ P(B/A) = P(B) \end{array}}$$

Rq : Deux évènements disjoints ne sont pas indépendants.

- **Indépendance mutuelle d'une séquence d'évènements** (A_i)

$$\boxed{\forall I \in \mathcal{P}(2,..n), \quad P(\bigcap_I A_i) = \prod_I P(A_i)}$$

A.4 Notions de base: probabilité conditionnelle, indépendance

✓ **Théorème de Bayes**

➢ pour deux évènements A et B:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}}$$

➢ Généralisation pour un système complet d'évènements A_1 , A_2 , … , A_n :

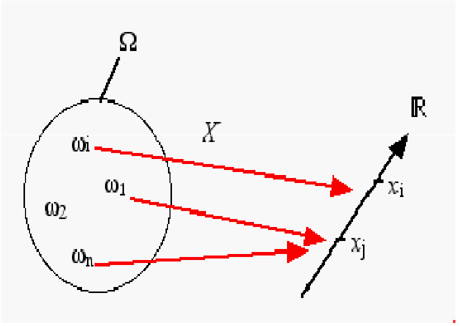
$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)}$$

$$\boxed{P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)}}$$

B.1 Variable aléatoire réelle (v.a.r): définition

✓ **Définition :** On suppose une expérience dont l'univers est muni d'une tribu $\mathcal{A}$ d'évènements et d'une probabilité P ($(\Omega,\mathcal{A},P)$ espace probabilisé) . Une variable aléatoire réelle X est une caractère quantitatif, discret ou continu, dont la valeur est fonction du résultat de l'expérience :

$$X : \Omega \to E$$
$$\omega \to X(\omega) = x$$



(E est l'ensemble des valeurs possibles de X)

qui est mesurable, c'est à dire telle que l'image réciproque $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}$ de tout élément B de la tribu $\mathcal{B}$ associée à E est un événement de $\mathcal{A}$.

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{B}, X^{-1}(B) \in \mathcal{A}}$$

Rq : Notation : $\boxed{X^{-1}(B) = \{X \in B\}}$

Alors, on peut attribuer une chance de réalisation à tout élément B de $\mathcal{B}$

Rq : la mesurabilité de X dépend des tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ choisie sur Ω ετ E. La tribu $\mathcal{B}$ est généralement $\mathcal{P}$(E) en discret, la tribu borélienne en continu.

B.1 Variable aléatoire réelle (v.a.r): définition

Rq : Lorsque X est une variable discrète, la séquence d'évènements $\{X = x\}$ forme une partition de Ω. On l'appelle partition engendrée par X.

Ex1 : lancer d'un dé régulier. (Ω, P(Ω), P) est un espace probabilisé. Soit X la fonction de Ω dans {0,1} valant 1 si le lancer est pair , 0 sinon. X est une fonction du résultat de l'expérience et elle est mesurable. En effet, $\mathcal{B}=\{\{0\},\{1\},\{0,1\},\emptyset\}$

On a $\{X=0\}=\{1,3,5\}\in\mathcal{P}(\Omega)$

- $\{X=1\}=\{2,4,6\}\in\mathcal{P}(\Omega)$
- $\{X\in\{0,1\}\}=\{X=0 \text{ ou } X=1\}=\Omega\in\mathcal{P}(\Omega)$
- $\{X\in\emptyset\}=\emptyset\in\mathcal{P}(\Omega)$

B.1 Variable aléatoire réelle (v.a.r): définition

Ex2 : On fait l'expérience E : « on lance 2 pièces de monnaie régulières ». Soit X le nombre de « P » obtenu : X prend les valeurs quantitatives discrètes 0, 1ou 2 (E={0,1,2}), selon le résultat de l'expérience :

w=(F,F) X(w)=0

w=(F,P) ou w=(P,F) X(w)=1

w=(P,P) X(w)=2

X est donc une variable aléatoire discrète.

L'évènement engendré par la valeur 0 est l'évènement $\{X=0\}=\{(F,F)\}$

L'évènement engendré par la valeur 1 est l'évènement $\{X=1\}=\{(P,F),(F,P)\}$

L'évènement engendré par la valeur 2 est l'évènement $\{X=2\}=\{(P,P)\}$

On a : $\{X=0\}\cup\{X=1\}\cup\{X=2\}=\Omega$

B.1 Variable aléatoire réelle (v.a.r): définition

Ex 3 : Soit X l'abscisse de la mine : X prend des valeurs quantitatives continues entre 0 et l (E=[0,l]), selon le résultat de l'expérience : si le résultat de l'expérience est $\omega=(x,y)$ $X(\omega)=x$. On associe à E et à Ω les tribus boréliennes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement engendrées par les ouverts de [0,l] et de [0,l]*[0,L] (qui contiennent tous les intervalles associés à ces ensembles). Alors, l'image réciproque de tout élément de $\mathcal{B}$ (tout intervalle I de [0,l] est dans $\mathcal{A}$ (c'est un intervalle de [0,l]*[0,L])

$\{X \in I\}=\{\omega=(x,y), x \in I, y \in [0,L]\} \in \mathcal{B}$

X est donc une variable aléatoire (continue).

B.2 Variable aléatoire réelle (v.a.r): Loi

- ✓ **Loi d'une variable aléatoire** :

La mesurabilité de X assure que l'image réciproque de tout élément $B \in \mathcal{B}$ est dans $\mathcal{A}$ donc possède une probabilité. On peut ainsi définir, sur $(E, \mathcal{B})$ une mesure de probabilité, appelée loi de X et notée P_X par

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{B},\ P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)}$$

B.2 Variable aléatoire réelle (v.a.r): Loi

Variable aléatoire réelle discrète

- ✓ Déf : X prend ses valeur dans un ensemble E discret de valeurs réelles (v.a.r.d.).

- ✓ Loi : Séquence des probabilités :

$$\boxed{p_X(x) = P(X = x), \quad x \in E}$$

Propriétés :

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le p_X(x) \le 1 \\ \sum_{x \in E} p_X(x) = 1 \\ \forall B \subset \mathcal{B},\ p_X(B) = \sum_{x \in B} p_X(x) \end{array}}$$

variable aléatoire réelle continue

- ✓ Déf : X prend ses valeur dans un ensemble E continu de valeurs réelles (v.a.r.c.).

- ✓ Loi : $\forall x \in E,\ P(X = x) = 0$

  Par contre $P(X \in [x, x + dx[) \neq 0$

  La loi de X est définie via la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, appelé densité de probabilité : $\boxed{f(x)dx = P(X \in [x, x + dx[)}$

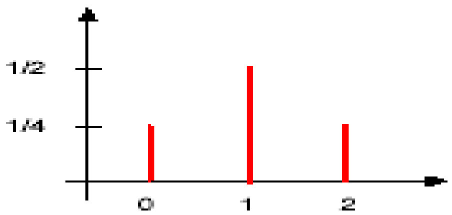
  Propriétés : $\boxed{\begin{array}{l} 0 \le f(x) \\ \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \\ \forall B \subset \mathbb{R},\ p_X(B) = \int_B f(x)dx \end{array}}$

B.2 Variable aléatoire réelle (v.a.r): Loi

- ✓ Présentation : la loi de X est présentée dans un tableau (tableau de la loi de X ou tableau en fréquences):

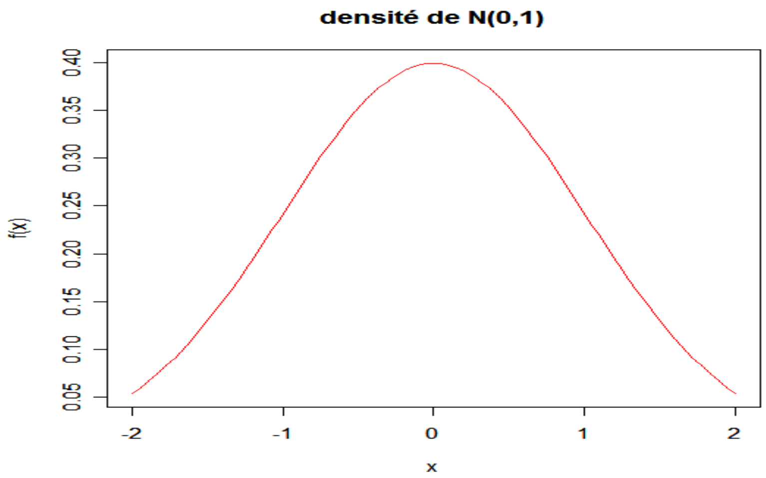
x_i	0	1	2
p_i	1/4	1/2	1/4

- ✓ Représentation graphique : diagramme en bâtons



- ✓ Présentation : La loi de X est donnée par la fonction f

- ✓ Représentation graphique : courbe de la densité



B.2 Variable aléatoire réelle (v.a.r): Loi

✓ **Fonction de répartition de la loi de X**

Définition : $F : R \to [0,1]$

$x \to P(X \leq x)$

Propriétés : (i) F est croissante

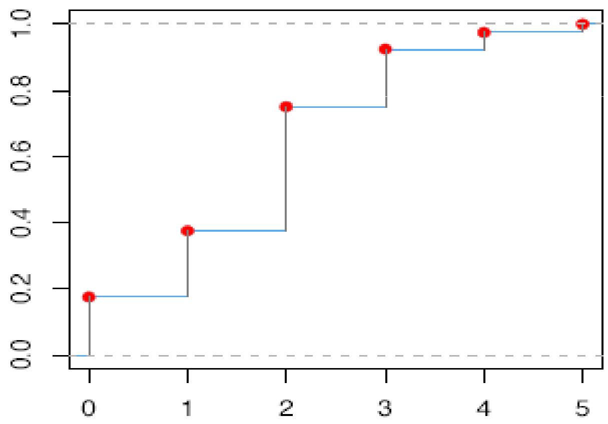
(ii) F est continue à droite

(iii) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1, \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

B.2 Variable aléatoire réelle (v.a.r): Loi

Variable discrete

F est une fonction en escalier, continue à droite



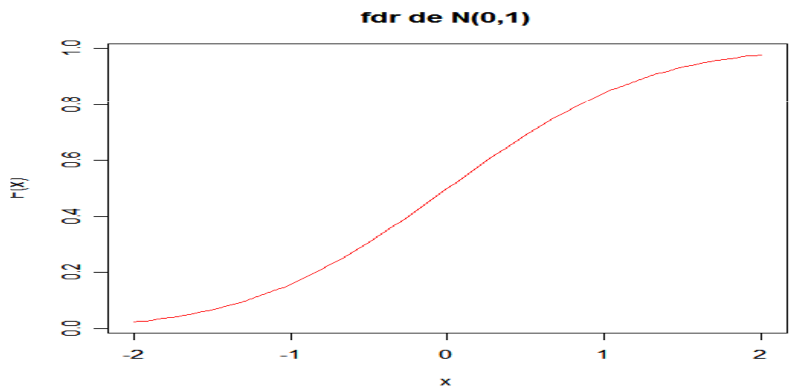
$$F(x) = \sum_{y \le x, y \in E} p_X(y)$$

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

Variable continue

F est une fonction continue



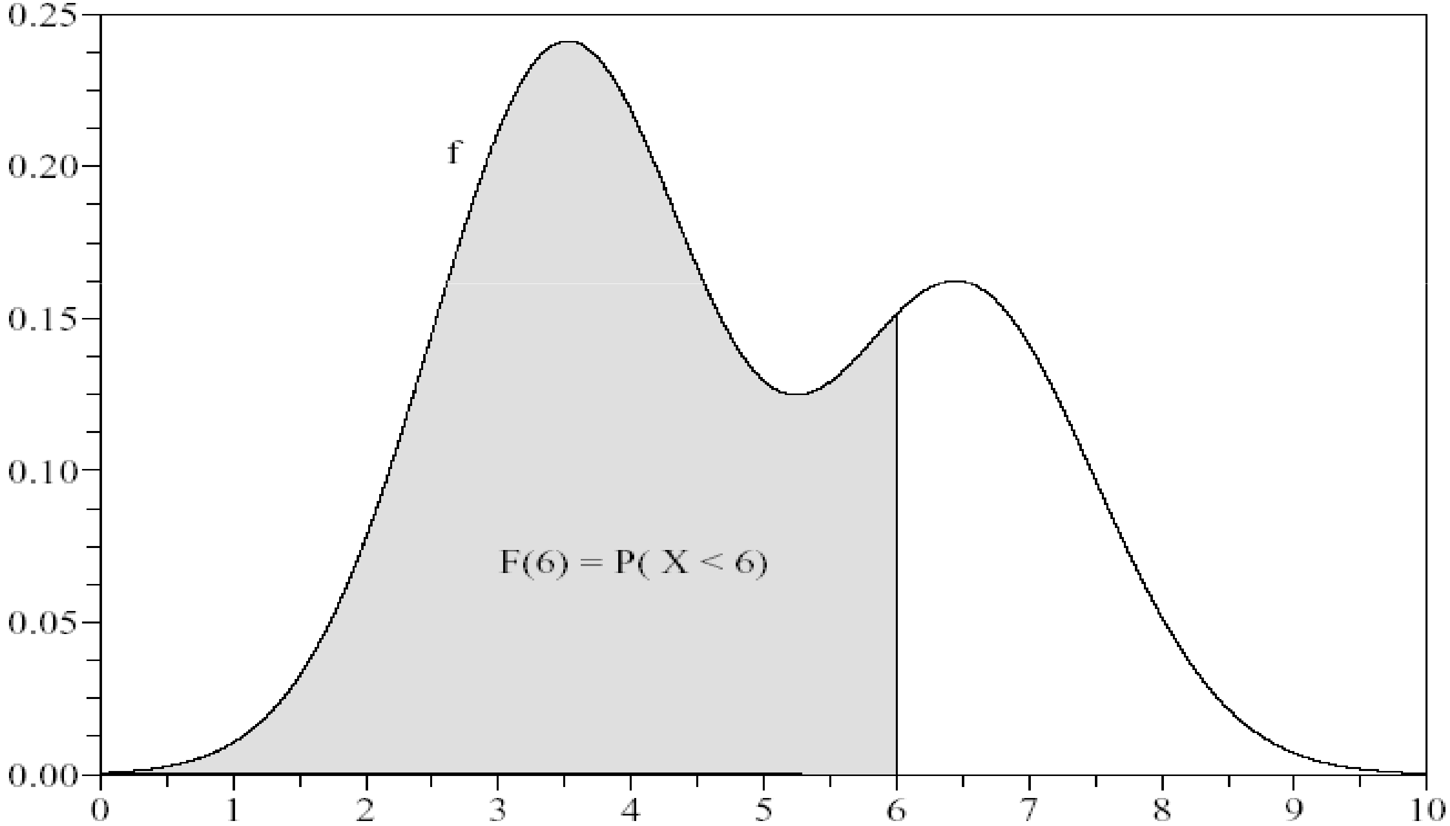
$$F'(x) = f(x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \text{Aire sous la courbe de la densité avant x}$$

$$P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

$$P(X > x) = P(X \ge x) = 1 - F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$$

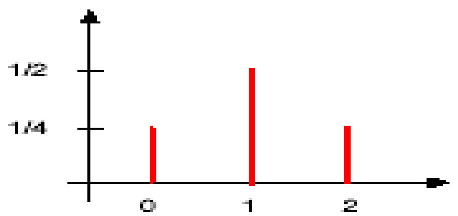
B.2 Variable aléatoire réelle (v.a.r): Loi

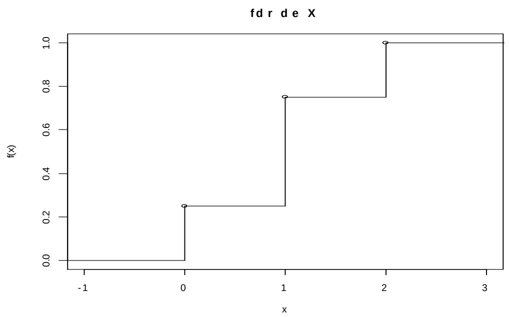


B.2 Variable aléatoire réelle (v.a.r): Loi

- *Exemple 2* : On fait l'expérience E : « on lance 2 pièces de monnaie régulières ». Soit X le nombre de « P » obtenu .

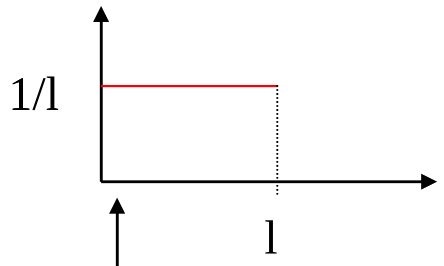
x_i	0	1	2
p_i	1/4	1/2	1/4

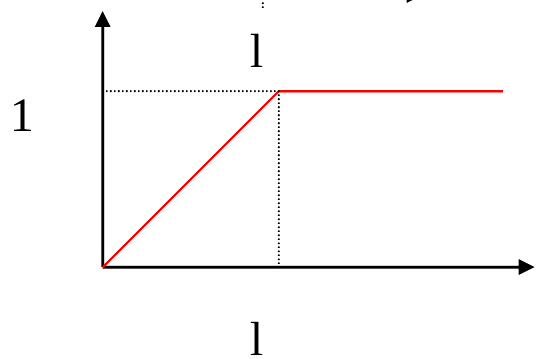




- *Exemple 3* : E: lancer de la mine de crayon. X= abscisse f(x)dx=P[x<X<x+dx]=P({ω=(t,u), x<t<dx, O<u<L})=dx*L/l *L si 0<=x<=l, 0 sinon. Donc f(x)=1/l si 0<=x<=l, O sinon. On reconnaît :

$$X \sim \mathcal{U}[0, l]$$





B.3 Variable aléatoire réelle (v.a.r): moments

Espérance d'une v.a.r.d.

$$\boxed{E(X)=\sum_{x\in E} xp_X(x)}$$

Espérance de Y=g(X), X v.a.r.d.

$$\boxed{E(Y)=\sum_{x\in E} g(x)p_X(x)}$$

Espérance d'une v.a.r.c.

$$\boxed{E(X)=\int_R xf(x)dx}$$

Espérance de Y=g(X), X v.a.r.c.

$$\boxed{E(Y)=\int_R g(x)f(x)dx}$$

Propriétés :

$$\boxed{\begin{array}{l} E(a)=a \\ E(aX)=aE(X) \\ E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y) \\ E(XY)=E(X)E(Y)\ si\ X\ et\ Y\ v.\ a.\ indépendantes \end{array}}$$

Rq : L'espérance peut ne pas exister

B.3 Variable aléatoire réelle (v.a.r): moments

- **Définitions**
  - Variance de X $\boxed{V(X) = \sigma_X^2 = E\left((X - E(X))^2\right)}$
  - Ecart-type de X $\boxed{\sigma_X = \sqrt{V(X)}}$

- **Propriétés** :
  - Théorème de Koenig : $\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$
  - Autres

$$\boxed{\begin{array}{l} V(X + a) = V(X) \\ V(aX + b) = a^2 V(X) \\ V(X) = 0 \Leftrightarrow X = cste\ p.s. \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} V(X) \geq 0 \\ \sigma_X \geq 0 \end{array}}$$

B.3 Variable aléatoire réelle (v.a.r): moments

- **Moment centré d'ordre k** : $\boxed{\mu_k = E\left((X - E(X))^k\right)}$

  $\boxed{\mu_1 = 0, \mu_2 = Var(X)}$

  Pour une loi symétrique : $\boxed{\mu_{2k+1} = 0 \quad \forall k \geq 0}$

- **Moment non centré d'ordre k** : $\boxed{m_k = E(X^k)}$

  $\boxed{m_1 = E(X)}$

Coefficient d'asymétrie (skewness)

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}}$$

Coefficient d'aplatissement (kurtosis)

$$\boxed{\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}}$$

B.3 Variable aléatoire réelle (v.a.r): moments

- ✓ **Quelques inégalités classiques**

- Inégalité de markov $$\forall k > 0, \quad P(|X| > k) \leq \frac{E(|X|)}{k}$$

- Inégalité de Bienaymé Tchebychev $$\forall k > 0, \quad P(|X - E(X)| > k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

- Inégalité de Jensen; soit g convexe $$g(E(X)) \leq E(g(X))$$

- Inégalité de Hölder $$E(|XY|) \leq E(|X|^p)^{1/p} E(|Y|^q)^{1/q}$$

  - CP : Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)} \quad , \quad E(|X|) \leq \sqrt{E(X^2)}$$

B.4 Variable aléatoire réelle (v.a.r): couples de v.a.r.

- ✓ **Définition** : On appelle couple de variables aléatoires, deux variables aléatoires X et Y définies sur le même univers (issues de la même expérience) à valeurs respectivement dans E et F.

- ✓ **Loi jointe d'un couple de variables aléatoires** :

- ➢ Cas discret : c'est la séquence $$\boxed{\left(P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})\right)_{x\in E,\, y\in F}}$$

- ➢ Cas continu : c'est la fonction f de R² dans R, appelée densité jointe telle que

$$\boxed{f(x,y)dxdy = P(X\in[x,x+dx]\cap Y\in[y,y+dy])}$$

- ✓ **Lois marginales** de X
- ➢ Cas discret : $$\boxed{P(X=x)=\sum_{y\in F} P(X=x,Y=y)}$$

- ➢ Cas continu : $$\boxed{f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}$$

B.4 Variable aléatoire réelle (v.a.r): couples de v.a.r.

- **Lois conditionnelles de Y sachant X=x**

- Cas discret
$$\boxed{P(Y=y/X=x)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)} \quad \forall y\in F}$$

- Cas continu
$$\boxed{f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f(x)} \quad \forall y\in R}$$

B.4 Variable aléatoire réelle (v.a.r): couples de v.a.r.

✓ **Espérance conditionnelle**

L'espérance conditionnelle E(Y/X) est une variable aléatoire de même loi que X, dont les réalisations possibles sont les valeurs $\{E(Y/X=x)\}_{x\in E}$, valeurs des espérances des lois conditionnelles de Y/X=x

- Cas discret : $\boxed{E(Y/X=x)=\sum_{y\in F} yP(Y=y/X=x), \forall x\in E}$

E(Y/X)	E(Y/X=x1)	……..	E(Y/X=xn)
P(E(Y/X)=x)	P(X=x1)	…….	P(X=xn)

- Cas continu $\boxed{E(Y/X=x)=\int_R yf(y/X=x)dy}$ prise avec la densité f(x).

- Propriété : espérance de l'espérance conditionnelle $\boxed{E(E(Y/X))=E(Y)}$

B.4 Variable aléatoire réelle (v.a.r): couples de v.a.r.

- **Covariance entre X et Y**

$$\boxed{Cov(X,Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)}$$

- **Propriétés**
  - Théorème de Koenig généralisé $\boxed{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$
  - Autres

$$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$$

$$Cov(aX + bY, Z) = aCov(X,Z) + bCov(Y,Z)$$

$$Cov(X, aY + bZ) = aCov(X,Y) + bCov(X,Z)$$

$$Cov(a,Y) = Cov(Y,a) = 0$$

$$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X,Y)$$

B.4 Variable aléatoire réelle (v.a.r): couples de v.a.r.

- **Vecteur espérance du couple (X, Y)**

$$M(X,Y)=\begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix}$$

- **Matrice de variance-covariance**

$$\Sigma(X,Y)=\begin{pmatrix} V(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & V(Y) \end{pmatrix}$$

Elle est symétrique, semi-définie positive

B.4 Variable aléatoire réelle (v.a.r): couples de v.a.r.

- **Corrélation entre X et Y**

$$\boxed{\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}} \qquad \boxed{\rho(X,Y)=Cov(X^*,Y^*)}$$

Où X* et Y* sont les variables centrées-réduites associées à X et Y.

- **Propriétés**

$-1\leq\rho(X,Y)\leq 1$ D'autant plus proche de 1 en valeur absolu que le lien linéaire est fort entre X et Y.

$|\rho(X,Y)|=1$ Lien linéaire parfait : Y=aX+b

$\rho(X,Y)=0$ Absence de lien linéaire (pas forcement indépendance entre X et Y)

$$\boxed{\Rightarrow Cov(X,Y)=0} \qquad \boxed{\begin{array}{l} V(X+Y)=V(X)+V(Y) \\ E(XY)=E(X)E(Y) \end{array}}$$

B.5 Variable aléatoire réelle (v.a.r): indépendance

- **Définition** : On dit que deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans (E,$\mathcal{B}$1) et (F,$\mathcal{B}$2)sont indépendantes si et seulement si pour tout (B1,B2) $\in$ (B1,B2), les évènements {X$\in \mathcal{B}$1} et {Y $\in \mathcal{B}$2} sont indépendants.

  - Cas discret $$\boxed{\forall (x,y) \in E \times F,\ P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)}$$

  - Cas continu $$\boxed{\forall (x,y) \in R^2,\ f(x,y) = f(x)f(y)}$$

  la loi jointe est égale au produit des lois marginales

- **Définition équivalentes** $$\boxed{\forall (x,y) \in E \times F,\ P(Y = y / X = x) = P(Y = y)}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in R^2,\ f(y/x) = f(y)}$$

- **Propriété** : Deux variables aléatoires indépendantes sont non corrélées, la réciproque étant fausse (deux variables n'ayant pas de lien du tout n'ont en particulier pas de lien linéaire, l'inverse étant faux)

B.5 Variable aléatoire réelle (v.a.r): indépendance

- ✓ Propriétés :

$$\boxed{X \perp Y \Leftrightarrow \begin{cases} E(XY) = E(X)E(Y) \\ \operatorname{cov}(X,Y) = r(X,Y) = 0 \\ V(X+Y) = V(X) + V(Y) \end{cases}}$$