EI - EXERCICES DE PROBABILITES CORRIGES

Notations

1) Les coefficients du binôme sont notés $\binom{n}{p}$.
2) Un arrangement de n objets pris p à p est noté A_n^p.
3) Si A est un ensemble fini, on notera $|A|$ ou $\operatorname{card} A$ le nombre d'éléments de A.
4) Si a et b sont des entiers tels que $a \leq b$, on désigne par $[\![a,\, b]\!]$ l'ensemble $[\, a,\, b\,] \cap \mathbb{Z}$.
5) Le symbole $\perp\!\!\!\perp$ indique l'indépendance d'événements ou de variables aléatoires.
6) On désigne par A^C le complémentaire de A ou l'événement contraire de A.
7) On note $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire.

0 - Dénombrement

1 Etablir les identités

a) $\mathrm{A}_{n_1}^k \mathrm{A}_{n_2}^{n-k} \binom{n}{k} = n! \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}$

b) $\binom{n}{p}\binom{p}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-p}$

c) $$\frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{n_1+n_2-n}{n_1-k}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$$

Solution

a) On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{n_1}^k \mathrm{A}_{n_2}^{n-k} \binom{n}{k} &= \frac{n_1!}{(n_1-k)!} \, \frac{n_2!}{(n_2-n+k)!} \, \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= n! \, \frac{n_1!}{k!\,(n_1-k)!} \, \frac{n_2!}{(n-k)!\,(n_2-n+k)!} \\
&= n! \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k} .
\end{aligned}$$

b) On a

$$\binom{n}{p}\binom{p}{m} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \, \frac{p!}{m!\,(p-m)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,m!\,(p-m)!} \,,$$

et

$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{n-p} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \, \frac{(n-m)!}{(n-p)!\,(p-m)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,m!\,(p-m)!} \,,$$

d'où l'égalité.

c) En calculant les deux membres on obtient le même résultat

$$\frac{n!\,(n_1+n_2-n)!\,n_1!\,n_2!}{k!\,(n-k)!\,(n_1-k)!(n_2+k-n)!\,(n_1+n_2)!}\,.$$

2 Etablir l'identité (si $1 \leq k \leq n$),

$$\text{d)}\quad \tbinom{n}{k} = \sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{j}{k-1}\,.$$

$\boxed{\textit{Solution}}$

On démontre par récurrence, que, pour $n \geq 1$, on a la propriété suivante :
(P_n) : pour tout k compris entre 1 et n, on a $\binom{n}{k} = \displaystyle\sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{j}{k-1}$.

Initialisation : On prend $n = 1$, alors nécessairement $k = 1$, et on a

$$\binom{1}{1} = \sum_{j=0}^{0} \binom{j}{k-1} = \binom{0}{0} = 1\,,$$

et la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n. Soit alors k tel que $1 \leq k \leq n+1$.

Il y a trois situations possibles.

$\boxed{\text{Si } k = n+1}$ on a

$$1 = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} = \sum_{j=n}^{n} \binom{j}{n}\,.$$

$\boxed{\text{Si } 2 \leq k \leq n}$ on peut écrire

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\,.$$

On a donc

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{j}{k-1}\,,$$

mais aussi $1 \leq k-1 \leq n$, donc

$$\binom{n}{k-1} = \sum_{j=k-2}^{n-1} \binom{j}{k-2}\,,$$

Alors

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k} &= \sum_{j=k-1}^{n-1}\binom{j}{k-1}+\sum_{j=k-2}^{n-1}\binom{j}{k-2}\\ &= \sum_{j=k-1}^{n-1}(\binom{j}{k-1}+\binom{j}{k-2})+\binom{k-2}{k-2}\\ &= \sum_{j=k-1}^{n-1}\binom{j+1}{k-1}+\binom{k-2}{k-2}.\end{aligned}$$

Par changement d'indice de sommation et puisque $\binom{k-2}{k-2}=\binom{k-1}{k-1}=1$, on obtient

$$\binom{n+1}{k}=\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k-1}+\binom{k-1}{k-1}=\sum_{j=k-1}^{n}\binom{j}{k-1}.$$

$\boxed{\text{Si } k=1}$

$$\binom{n+1}{1}=n+1=\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{0}.$$

On a donc démontré que, si $1\le k\le n+1$

$$\binom{n+1}{k}=\sum_{j=k-1}^{n}\binom{j}{k-1},$$

ce qui est la propriété au rang $n+1$.
La propriété P_n est donc vraie pour tout entier $n\ge 1$.

3 Soient n_1 et n_2 deux nombres (réels ou complexes). Etablir les identités

e) $$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}n_1^kn_2^{n-k}=nn_1(n_1+n_2)^{n-1}$$

f) $$\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}n_1^kn_2^{n-k}=n(n-1)n_1^2(n_1+n_2)^{n-2}$$

$\boxed{\textit{Solution}}$

Posons

$$f(x)=(x+n_2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^kn_2^{n-k}.$$

En dérivant

$$f'(x)=n(x+n_2)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}n_2^{n-k},$$

puis en dérivant une seconde fois

$$f''(x) = n(n-1)(x+n_2)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2} n_2^{n-k} .$$

e) En particulier

$$f'(n_1) = n(n_1+n_2)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} n_1^{k-1} n_2^{n-k} ,$$

et en multipliant par n_1

$$nn_1(n_1+n_2)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} n_1^{k} n_2^{n-k} .$$

(La somme peut commencer à 0, puisque le premier terme est nul).

f) De même

$$f''(n_1) = n(n-1)(n_1+n_2)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} n_1^{k-2} n_2^{n-k} ,$$

et en multipliant par n_1^2

$$n(n-1)n_1^2(n_1+n_2)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} n_1^{k} n_2^{n-k} .$$

(La somme peut commencer à 0, puisque les deux premiers termes sont nuls).

4 On note, pour $j \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, $T_j(m) = \sum_{k=1}^{m} k^j$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}[(k+1)^{n+1} - k^{n+1}] = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} T_j(m)$.

2) En déduire une formule de récurrence sur n permettant de calculer $T_n(m)$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(m)$ est un polynôme de degré $n+1$ en m qui s'annule en 0 et -1.

Solution

1) En utilisant la formule du binôme, on a

$$(k+1)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} k^j ,$$

donc

$$(k+1)^{n+1} - k^{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} k^j ,$$

et
$$\sum_{k=1}^{m}[(k+1)^{n+1}-k^{n+1}]=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}k^j\right).$$
On peut intervertir les sommations et l'on obtient
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}[(k+1)^{n+1}-k^{n+1}] &= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\binom{n+1}{j}k^j\right)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}\left(\sum_{k=1}^{m}k^j\right),\end{aligned}$$
ce qui donne bien
$$\sum_{k=1}^{m}[(k+1)^{n+1}-k^{n+1}]=\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}T_j(m).$$
2) La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}[(k+1)^{n+1}-k^{n+1}]$ étant télescopique, on obtient
$$\sum_{k=1}^{m}[(k+1)^{n+1}-k^{n+1}]=(m+1)^{n+1}-1,$$
et on déduit alors de la question 1)
$$(m+1)^{n+1}-1=\binom{n+1}{n}T_n(m)+\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+1}{j}T_j(m),$$
et puisque $\binom{n+1}{n}=n+1$, on en tire
$$T_n(m)=\frac{1}{n+1}\left[(m+1)^{n+1}-1-\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+1}{j}T_j(m)\right].$$
ceci permet de calculer $T_n(m)$ en connaissant $T_0(m),\dots,T_{n-1}(m)$.

3) A partir de $T_0(m)=m$, on retrouve facilement $T_1(m)=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

La relation de récurrence peut encore s'écrire, si $n\geq 2$,
$$T_n(m)=\frac{1}{n+1}\left[(m+1)^{n+1}-(m+1)-\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n+1}{j}T_j(m)\right].$$
On montre alors par récurrence que T_n est un polynôme de degré $n+1$ admettant pour racines 0 et -1.

C'est vrai si $n = 1$. Supposons la propriété vraie **jusqu'à** l'ordre $n-1$. Alors les polynômes T_j s'annulent en 0 et -1 et le polynôme $(m+1)^{n+1}-(m+1)$ également. Donc T_n s'annule aussi en 0 et -1. Par ailleurs tous ces polynômes sont de degrés distincts, et le plus grand des degrés est $n+1$. La somme est de degré $n+1$. La propriété est donc vraie au rang n. Il en résulte qu'elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

5 Etablir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les identités :

$$\text{g)}\quad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p = 0$$

$$\text{h)}\quad \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{2j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{2j+1} = 2^{n-1}$$

Solution

En appliquant la formule du binôme au développement de $(1-1)^n$, on trouve la relation g). En séparant dans cette relation les indices paires et les indices impaires, elle s'écrit

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{2j} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{2j+1} = 0\,,$$

Mais, en développant $(1+1)^n$, et en séparant de même, on obtient

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{2j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{2j+1} = 2^n\,,$$

On en déduit donc que

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{2j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{2j+1} = 2^{n-1}\,.$$

6 Etablir l'identité :

$$\text{i)}\quad \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}\right]^2$$

Solution

On cherche le coefficient de X^n dans le polynôme $(X+1)^{2n}$. Par la formule du binôme, c'est $\binom{2n}{n}$. Mais on peut écrire aussi

$$(X+1)^{2n} = (X+1)^n (X+1)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} X^{n-k}\right)\,,$$

et le coefficient de X^n dans le produit est la somme

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\right]^2,$$

ce qui donne bien l'égalité

$$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\right]^2.$$

7 Etablir, si $0\leq n\leq n_2$, les identités :

$$\text{j)}\quad \sum_{k=0}^{n}k\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}=n_1\binom{n_1+n_2-1}{n-1}$$

$$\text{k)}\quad \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}=n_1(n_1-1)\binom{n_1+n_2-2}{n-2}$$

Solution

j) On cherche le coefficient de X^{n-1} dans le produit $P(X)=[(X+1)^{n_1}]'(X+1)^{n_2}$. On a d'une part

$$P(X)=n_1(X+1)^{n_1+n_2-1},$$

donc le coefficient de X^{n-1} est $n_1\binom{n_1+n_2-1}{n-1}$. D'autre part

$$P(X)=\left(\sum_{k=1}^{n_1}k\binom{n_1}{k}X^{k-1}\right)\left(\sum_{j=0}^{n_2}\binom{n_2}{j}X^j\right).$$

Le coefficient de X^{n-1} est la somme des produits des coefficients de X^{k-1} dans la première somme et de X^j dans la deuxième, lorsque $k-1+j=n-1$, soit $j=n-k$. Cette valeur doit être positive, donc $k\leq n$, et la somme vaut

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k},$$

d'où, puisque pour $k=0$ le coefficient est nul, l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}=n_1\binom{n_1+n_2-1}{n-1}.$$

k) On cherche cette fois le coefficient de X^{n-2} dans $Q(X)=[(X+1)^{n_1}]''(X+1)^{n_2}$. On a d'une part

$$Q(X)=n_1(n_1-1)(X+1)^{n_1+n_2-2},$$

donc le coefficient de X^{n-2} est $n_1(n_1-1)\binom{n_1+n_2-2}{n-2}$. D'autre part

$$Q(X) = \left(\sum_{k=2}^{n_1} k(k-1)\binom{n_1}{k} X^{k-2}\right)\left(\sum_{j=0}^{n_2} \binom{n_2}{j} X^j\right).$$

Le coefficient de X^{n-2} est la somme des produits des coefficients de X^{k-2} dans la première somme et de X^j dans la deuxième, lorsque $k-2+j=n-2$, soit $j=n-k$. Cette valeur doit être positive, donc $k \leq n$, et la somme vaut

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k},$$

d'où, puisque pour $k=0$ et 1 les coefficients sont nuls, l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k} = n_1(n_1-1)\binom{n_1+n_2-2}{n-2}.$$

8 Quel est le nombre de chiffres du nombre entier $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1,\dots,9\})))$?

Solution

Puisque $\mathrm{card}(\{0,1,\dots,9\}) = 10$, on a tout d'abord l'égalité

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(\{0,1,\dots,9\})) = 2^{10} = 1024,$$

puis

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1,\dots,9\}))) = 2^{1024}.$$

Pour déterminer le nombre de chiffres de ce nombre, on utilise le logarithme décimal (noté log). En effet, si un nombre entier A s'écrit

$$A = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k,$$

avec $a_p \neq 0$, et $0 \leq a_k \leq 9$ si k est compris entre 1 et p, alors, on peut écrire $A = B \cdot 10^p$ où

$$B = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^{k-p}.$$

Mais

$$1 \leq B \leq 9\sum_{k=0}^{p} 10^{k-p} < 9\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = \frac{9}{1-1/10} < 10,$$

et donc

$$0 \leq \log B < \log 10 = 1.$$

Et puisque

$$\log A = p + \log B,$$

il en résulte que p est la partie entière de $\log A$, et le nombre de chiffres de A est
$$p+1=[\log A]+1\,.$$
Ici, $A=2^{1024}$, donc, le nombre de chiffres de A est $[1024\log 2]+1$. Comme on a l'encadrement
$$0,301<\log 2<0,3011\,,$$
on en déduit en multipliant par 1024 que
$$308,2<\log A<308,4\,,$$
et donc $[1024\log 2]=308$. Le nombre cherché est 309.

9 Combien existe-il de grilles de mots croisés 10×10 ? (Une grille de mots croisés 10×10 est un tableau carré de 100 cases dont certaines peuvent-être noires).

Solution

Une grille est déterminée par le sous-ensemble des cases blanches. Le nombre de grilles est donc le nombre de parties d'un ensemble à 100 éléments, soit 2^{100}.

10 De combien de façons peut-on classer (sans ex aequo) les 40 étudiants d'un groupe de TD ?

Solution

C'est le nombre de permutations de 40 éléments donc $40\,!$

11 On note S_n^j le nombre de surjections différentes que l'on peut former d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à j éléments. Par convention, on pose $\mathrm{S}_n^j=0$ si $j\notin\mathbb{N}^*$ ou $n\notin\mathbb{N}^*$ ou $j>n$.

1) Que valent S_n^1 et S_n^n ?

2) Montrer que, si $n\geq 2$, on a $\mathrm{S}_n^2=2^n-2$.

3) a) Montrer sans calcul que $\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,(\forall k\in[\![0,\,n]\!]\cap\mathbb{N})\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\binom{k}{j}\mathrm{S}_n^j=k^n.$

b) En déduire une formule de récurrence permettant de calculer les nombres S_n^k.

4) Etablir sans calcul la relation de récurrence (valable si $n\geq 2$) $\quad \mathrm{S}_n^j=j(\mathrm{S}_{n-1}^j+\mathrm{S}_{n-1}^{j-1})$.

5) a) On note $f(x)=e^x-1$. Montrer que, pour tout entier $k\in[\![0,\,n]\!]$, il existe des constantes réelles $a_1(k),\dots,a_k(k)=\mathrm{A}_n^k$ telles que
$$\frac{d^n}{dx^n}[f^n(x)]=\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[\sum_{j=1}^{k}a_j(k)f^{n-j}(x)(f')^j(x)\right]\,.$$

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k^n\binom{n}{k} = n!$.

c) Montrer que $\displaystyle \mathrm{S}_n^j = \sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k}k^n\binom{j}{k}$.

$\boxed{\textit{Solution}}$

Notons F_p un ensemble à p éléments, et f une surjection de F_n dans F_j.

1) Il y a une seule application de F_n dans F_1, et cette application est surjective, donc $\mathrm{S}_n^1 = 1$. Les applications surjectives d'un ensemble à n éléments dans un autre sont bijectives. Le nombre de bijections est aussi le nombre de permutations de n objets, donc $\mathrm{S}_n^n = n!$.

2) Si $F_2 = \{y_1, y_2\}$, choisir une surjection f de F_n dans F_2, c'est choisir une partie C de F_n non vide et différente de F_n qui sera l'ensemble $f^{-1}(\{y_1\})$. Alors $f^{-1}(\{y_2\})$ est le complémentaire de C dans F_n. Il y a $2^n - 2$ telles parties C. Donc on a $\mathrm{S}_n^2 = 2^n - 2$.

3) a) Il y a k^n applications de F_n dans F_k. Si f est une telle application, alors, c'est une surjection de F_n sur $f(F_n)$. On peut donc compter les applications de la manière suivante : On choisit une partie D_j de F_k à j éléments. Il y a $\binom{k}{j}$ façons de le faire, et pour chaque choix de D_j, il y a S_n^j surjections possibles. Donc, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{S}_n^j$ applications possibles. On en déduit bien

$$\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{S}_n^j = k^n\,.$$

b) En isolant le terme d'indice k dans la somme précédente, on en déduit

$$\mathrm{S}_n^k = k^n - \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\mathrm{S}_n^j\,.$$

4) Soit $F_n = \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ et $F_{n-1} = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ On peut obtenir une surjection de F_n dans F_j, d'une des deux manières suivantes :
− on part d'une surjection de F_{n-1} sur F_j et on envoie x_n sur un des j éléments de F_j. Il y a donc $j\mathrm{S}_{n-1}^j$ surjections de ce type.
− on part d'une surjection de F_{n-1} sur une partie à $j-1$ éléments de F_j, et on envoie x_n sur l'élément de F_j qui n'appartient pas à la partie choisie. Il y donc $j\mathrm{S}_{n-1}^{j-1}$ surjections de ce type.

On a donc bien

$$\mathrm{S}_n^j = j(\mathrm{S}_{n-1}^j + \mathrm{S}_{n-1}^{j-1})\,.$$

5) a) On démontre la propriété par récurrence sur k, le nombre n étant fixé.

On a $f'(x) = e^x$, et $(f^n)' = nf^{n-1}f'$. Alors

$$\frac{d^n}{dx^n}[f^n(x)] = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[nf^{n-1}(x)f'(x)]\,,$$

si l'on pose $a_1(1) = n = \mathrm{A}_n^1$, on a la propriété au rang 1.

Supposons la propriété vraie au rang k. Donc

$$\frac{d^n}{dx^n}[f^n(x)] = \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[\sum_{j=1}^{k} a_j(k) f^{n-j}(x)(f')^j(x)\right].$$

On peut écrire

$$\frac{d^n}{dx^n}[f^n(x)] = \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}\left[\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=1}^{k} a_j(k) f^{n-j}(x)(f')^j(x)\right]\right].$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=1}^{k} a_j(k) f^{n-j}(x)(f')^j(x)\right] &= \sum_{j=1}^{k} a_j(k)((n-j)f^{n-j-1}(x)(f')^{j+1}(x) + jf^{n-j}(x)(f')^j(x)) \\
&= \sum_{j=1}^{k} a_j(k)(n-j)f^{n-j-1}(x)(f')^{j+1}(x) + \\
&\qquad \sum_{j=1}^{k} a_j(k) j f^{n-j}(x)(f')^j(x) \\
&= \sum_{j=2}^{k+1} a_{j-1}(k)(n-j+1)f^{n-j}(x)(f')^j(x) + \\
&\qquad \sum_{j=1}^{k} a_j(k) j f^{n-j}(x)(f')^j(x)\,.
\end{aligned}$$

Donc si l'on pose

$$a_j(k+1) = \begin{cases} a_1(k) & \text{si } j = 1 \\ (n-j+1)a_{j-1}(k) + ja_j(k) & \text{si } 2 \leq j \leq k \\ (n-k)a_k(k) & \text{si } j = k+1 \end{cases}$$

On aura

$$\frac{d^n}{dx^n}[f^n(x)] = \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}\left[\sum_{j=1}^{k+1} a_j(k+1) f^{n-j}(x)(f')^j(x)\right].$$

Avec de plus

$$a_{k+1}(k+1) = (n-k)a_k(k) = (n-k)\mathrm{A}_n^k = \mathrm{A}_n^{k+1}\,.$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$. Alors elle sera vraie si $1 \leq k \leq n$.
En particulier, si $k = n$,

$$\frac{d^n}{dx^n}[f^n(x)] = \sum_{j=1}^{n} a_j(n)(e^x - 1)^{n-j} e^{jx} \,.$$

Mais on a aussi, en développant par la formule du binôme,

$$f(x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{kx} \,,$$

donc

$$\frac{d^n}{dx^n}[f^n(x)] = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n e^{kx} \,.$$

En calculant la valeur en zéro dans les deux expressions précédentes, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n = a_n(n) = \mathrm{A}_n^n = n! \,,$$

ce qui donne la formule voulue.

c) On démontre par récurrence, que si $n \geq 1$, la propriété suivante est vraie :

$$(P_n) \qquad \text{si } 1 \leq j \leq n, \ \mathrm{S}_n^j = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{j-k} k^n \binom{j}{k} \,.$$

On a $\mathrm{S}_1^1 = 1$, et la propriété est vraie à l'ordre 1. Supposons la vraie à l'ordre $n-1$. On a tout d'abord, d'après b),

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^n \binom{n}{k} = n! = \mathrm{S}_n^n \,,$$

et aussi

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{1-k} k^1 \binom{1}{k} = 1 = \mathrm{S}_n^1 \,.$$

On suppose que $2 \leq j \leq n$. Alors, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\mathrm{S}_{n-1}^j = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{j-k} k^{n-1} \binom{j}{k} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_{n-1}^{j-1} = \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{j-1-k} k^{n-1} \binom{j-1}{k} \,.$$

En appliquant la question 4),

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n^j &= j \left(\sum_{k=1}^{j} (-1)^{j-k} k^{n-1} \binom{j}{k} + \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{j-1-k} k^{n-1} \binom{j-1}{k} \right) \\
&= j \left(\sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{j-k} k^{n-1} (\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k}) + j^{n-1} \right) \,.
\end{aligned}$$

Mais
$$\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} = \binom{j-1}{k-1},$$
donc
$$\mathrm{S}_n^j = j\sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k}k^{n-1}\binom{j-1}{k-1}.$$
Par ailleurs
$$j\binom{j-1}{k-1} = j\,\frac{(j-1)!}{(k-1)!(j-k)!} = k\,\frac{j!}{k!(j-k)!} = k\binom{j}{k},$$
d'où
$$\mathrm{S}_n^j = \sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k}k^{n}\binom{j}{k}.$$
On a donc montré que, si $1 \leq k \leq n$,
$$\mathrm{S}_n^j = \sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k}k^{n}\binom{j}{k},$$
ce qui est la propriété au rang n. La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

12 Si $n \geq 1$, on note α_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments (nombre de Bell), et on pose $\alpha_0 = 1$.

1) Montrer que si $n \geq 0$, $\quad \alpha_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha_i$ (formule de Dobinski).

2) En déduire que si $n \geq 1$, $\quad \alpha_n = \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$.

3) Montrer que si $n \geq 0$, $\quad \alpha_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\beta_{n-k}\frac{k^n}{k!}$ où $\beta_m = \displaystyle\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j}{j!}$.
(On pourra utiliser l'exercice 11, question 5c).

Solution

1) Soit $F_{n+1} = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$. On choisit une partie A_j à j éléments contenant x_{n+1}. Cela revient à choisir les $j-1$ autres éléments parmi n. Il y a donc $\binom{n}{j-1}$ façons de le faire. Si l'on complète A_j avec une partition quelconque de son complémentaire, on aura une partition de F_{n+1}. Comme A_j^C contient $n+1-j$ éléments, on obtient ainsi $\binom{n}{j-1}\alpha_{n+1-j}$ partitions différentes. On obtient toutes les partitions de F_{n+1} en faisant varier j de 1 à $n+1$. Donc
$$\alpha_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\alpha_{n+1-j} = \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{n-j+1}\alpha_{n+1-j}.$$

En posant $i = n+1-j$ on trouve,

$$\alpha_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha_i \,.$$

2) Si n est fixé, la série de terme général $u_k = k^n/k!$ converge. En effet

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+1)^n}{(k+1)!}\,\frac{k!}{k^n} = \frac{1}{k+1}\,\left(\frac{k+1}{k}\right)^n$$

et ceci tend vers 0 quand k tend vers l'infini. La règle de d'Alembert assure donc la convergence de la série.

On démontre la formule par récurrence. Si $n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e\,,$$

donc

$$\alpha_1 = 1 = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!}\,,$$

et la formule est vraie au rang 1.

Supposons la formule vraie **jusqu'à** l'ordre k. Alors

$$\alpha_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha_i = 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \alpha_i\,,$$

et en utilisant la relation aux rangs inférieurs à n,

$$\alpha_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{e} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^i}{k!} \right)\,.$$

En intervertissant les sommations

$$\alpha_{n+1} = 1 + \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^i \right)\,.$$

On reconnaît la formule du binôme, donc

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= 1 + \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}((k+1)^n - 1) \\
&= 1 + \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^n}{k!} - \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\,.
\end{aligned}$$

En changeant d'indice dans la première somme, et en remarquant que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 1\,,$$

on obtient

$$\alpha_{n+1} = 1 + \frac{1}{e} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^n}{(k-1)!} - \frac{e-1}{e} = \frac{1}{e} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^n}{(k-1)!} + \frac{1}{e}\,.$$

Finalement

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{e} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{n+1}}{k!} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n+1}}{k!}\,,$$

ce qui donne la formule au rang n. La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

3) Calculons la somme $\lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_{n-k} \frac{k^n}{k!}$. En remplaçant β_{n-k} par sa valeur, on trouve

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{k^n}{k!} \right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-k} \binom{j+k}{k} \frac{(-1)^j k^n}{(j+k)!} \right]\,.$$

Effectuons le changement de variable $i = k + j$ dans la somme interne. On obtient

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \frac{(-1)^{i-k} k^n}{i!} \right]\,.$$

On intervertit les sommations, ce qui donne

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \left[\sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} k^n \right]\,.$$

Mais on reconnaît la formule 5c) de l'exercice précédent, et donc, finalement

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{S}_n^i}{i!}\,.$$

Il reste à voir que $\mathrm{S}_n^i / i!$ est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en i sous-ensembles pour en conclure que $\lambda_n = \alpha_n$.

Pour cela on remarque qu'à toute partition $\{A_1, A_2, \ldots, A_i\}$ de F_n, on peut associer $i!$ surjections f distinctes de F_n sur F_i, puisque cela revient à choisir une permutation $(y_1, y_2, \ldots, y_i)$ des éléments de F_i, et à poser $f(x) = y_i$ si x est dans A_i. Le nombre de surjections de F_n dans F_i est donc $i!$ fois le nombre de partitions de F_n en i sous-ensembles.

13 De combien de façons peut-on tirer, dans un jeu de 52 cartes, une main de 5 cartes qui comporte exactement 2 dames et 2 cœurs ?

Solution

Il y a dans le jeu 13 cœurs et 4 dames, donc $13+4-1=16$ dames ou cœurs. (La dame de cœur ne doit être comptée qu'une fois). Le nombre de cartes qui ne sont ni dame ni cœur est donc $52-16=36$.

Cherchons le nombre de mains contenant exactement 2 dames et 2 cœurs. Il y a deux cas possibles :

− la main contient la dame de cœur. Il reste à choisir une dame parmi 3, un cœur parmi 12, et la dernière carte parmi 36 ce qui fait $3\times 12\times 36=1296$ possibilités.

− la main ne contient pas la dame de cœur. On choisit 2 dames parmi 3, ce qui fait $\binom{3}{2}=3$, possibilités, 2 cœurs parmi 12, ce qui fait $\binom{12}{2}=66$ possibilités, et la dernière carte parmi 36. On a donc $3\times 66\times 36=7128$ possibilités.

Le résultat final est donc $1296+7128=8424$ possibilités.

14 De combien de façons peut-on tirer, dans un jeu de 52 cartes, une main de 5 cartes :

a) qui comporte un brelan, mais ni carré ni full ?
(un brelan est un ensemble de trois cartes de même valeurs, un carré est un ensemble de quatre cartes de même valeurs, un full est un ensemble de cinq cartes dont trois ont même valeur et les deux autres une même autre valeur).

b) qui ne comporte ni 2 cartes au moins de la même valeur, ni 5 cartes dont les valeurs se suivent, ni 5 cartes d'une même des 4 couleurs ?
(les quatre couleurs sont : Pique, Cœur, Carreau et Trèfle).

Solution

a) La main est donc de la forme $AAABC$, où A,B,C sont des valeurs deux à deux distinctes.

On choisit tout d'abord la valeur A de la première carte. Il y a 13 possibilités. On choisit 3 cartes de cette valeur parmi 4. Il y a $\binom{4}{3}=4$ possibilités.
On choisit ensuite deux autres valeurs parmi les 12 restantes. Il y a $\binom{12}{2}=66$ possibilités. Il y a 4 cartes possibles pour chacune de ces deux valeurs, soit 16 possibilités.
Le nombre de mains est donc $13\times 4\times 66\times 16=54912$.

b) On cherche donc parmi cinq cartes ayant des valeurs distinctes les mains où les cartes ne se suivent pas, et celles qui ne sont pas d'une même couleur. Si on appelle A l'ensemble des mains où les valeurs sont distinctes, B l'ensemble de celles où les cartes se suivent, et C l'ensemble de celles où les cartes sont de même couleur, les ensembles B et C sont inclus dans A, et donc

$$|A\setminus(B\cup C)|=|A|-|B\cup C|\,.$$

D'autre part
$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| .$$
Donc
$$|A \setminus (B \cap C)| = |A| + |B \cap C| - |B| + |C| .$$
Pour A, on choisit 5 valeurs parmi 13. Il y a $\binom{13}{5} = 1287$ possibilités. Puis pour chaque valeur, on choisit une des quatre cartes de cette valeur, ce qui fait 4^5 possibilités. Donc
$$|A| = 4^5 \binom{13}{5} = 1317888 .$$
Pour B, on choisit la première carte de la série, il y a 9 possibilités (lorsque la première carte est le 9, la dernière est le roi). Puis pour chaque valeur, on choisit une des quatre cartes de cette valeur, ce qui fait 4^5 possibilités. Donc
$$|B| = 4^5 \times 9 = 9216 .$$
Pour C, on choisit la couleur, il y a 4 possibilités. Puis pour chaque couleur, on choisit 5 cartes de la couleur obtenue, ce qui fait $\binom{13}{5}$ possibilités. Donc
$$|C| = 4 \binom{13}{5} = 5148 .$$
L'ensemble $B \cap C$ est constitué des mains dans lesquelles les cartes se suivent et sont de même couleur. On choisit la couleur, il y a 4 possibilités, et pour chaque couleur il y a 9 possibilités. Donc
$$|B \cap C| = 36 .$$
Finalement
$$|A \setminus (B \cup C)| = 1317888 + 36 - 9216 - 5148 = 1303560 .$$

15 On pose l'une à côté de l'autre, dans l'ordre de leur sortie, 5 cartes tirées l'une après l'autre et sans remise, dans un jeu de 32 cartes. Combien de figures différentes peut-on obtenir qui comportent exactement 3 trèfles ?

Solution

On choisit la place des trèfles parmi les cinq cartes. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ possibilités.

On choisit les trois trèfles parmi 8, en tenant compte de l'ordre. Il y a $\mathrm{A}_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$ possibilités.

On choisit les deux autres cartes parmi les 24 cartes qui ne sont pas de trèfles, en tenant compte de l'ordre. Il y a $\mathrm{A}_{24}^2 = 24 \times 23 = 552$ possibilités.

Le nombre cherché est donc $10 \times 336 \times 552 = 1854720$.

16 Reprendre l'exercice 15 dans le cas où l'on tire les 5 cartes une à une et avec remise.

Solution

On choisit la place des trèfles parmi les cinq cartes. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ possibilités.

On choisit les trois trèfles parmi 8. Chaque carte peut être une des 8 possibles. Il y a $8^3 = 512$ possibilités.

On choisit les deux autres cartes parmi les 24 cartes qui ne sont pas de trèfles. Chaque carte peut être une des 24 possibles. Il y a $24^2 = 576$ possibilités.

Le nombre cherché est cette fois $10 \times 512 \times 576 = 2949120$.

17 Les nombres n et p étant deux entiers naturels non nuls, quel est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^p$ de l'équation d'inconnue $(x_1, x_2, \dots, x_p)$,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n \ ?$$

Solution

Si l'on pose $y_i = x_i + 1$, l'équation équivaut à

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_p = n + p\,,$$

avec $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{N}^{*p}$.

Le nombre cherché est aussi le nombre de solutions de l'équation

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_p = n + p\,,$$

avec $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{N}^{*p}$.

En écrivant $n + p$ comme la somme de $n + p$ nombres 1,

$$n + p = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1\,,$$

trouver une solution de l'équation revient à choisir $p - 1$ signes + parmi les $n + p - 1$ signe + figurant dans la relation ci-dessus.

$$n + p = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{y_1} \oplus \underbrace{1 + \cdots + 1}_{y_2} \oplus \cdots \oplus \underbrace{1 + \cdots + 1}_{y_p}\,,$$

Le nombre cherché est donc

$$\binom{n+p-1}{p-1} = \binom{n+p-1}{n}\,.$$

18 De combien de façons peut-on choisir, dans un ensemble de $n \geq 2$ éléments, une paire de sous-ensembles disjoints non vides ?

Solution

Si $n \geq 2$, notons a_n le nombre de façons d'écrire un ensemble F_n de n éléments comme réunion de 2 sous-ensembles disjoints non vides.

Il y a $2^n - 2$ façons de choisir une partie A non vide de F_n et distincte de F_n, et en prenant pour B le complémentaire de A on a une partition $\{A, B\}$ de F_n. Mais toute partition est obtenue deux fois de cette manière, il en résulte que $a_n = 2^{n-1} - 1$.

Si l'on veut maintenant choisir, dans F_n une paire de sous-ensembles disjoints non vides, on commence par choisir un sous-ensemble de k éléments ($k \geq 2$), ce qui donne $\binom{n}{k}$ possibilités, et pour chacun de ces sous-ensembles, il y a a_k façons de l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles disjoints non vides. Alors le nombre cherché est

$$b_n = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (2^{k-1} - 1)\,.$$

Comme la somme est nulle si $k = 1$, on a encore

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2^{k-1} - 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\,.$$

Chaque somme se calcule par la formule du binôme, et l'on a

$$b_n = \frac{1}{2}\left((2+1)^n - 1\right) - \left((1+1)^n - 1\right) = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) - \left(2^n - 1\right),$$

ce qui donne finalement

$$b_n = \frac{1}{2}\left(3^n + 1\right) - 2^n\,.$$

EI 20

I - Probabilités sur un ensemble fini

19 Quel est le plus probable ?
– Obtenir au moins un as en lançant 4 dés ?
– Obtenir au moins deux as en lançant 10 dés ?
– Obtenir au moins une paire d'as en lançant 25 paires de dés ?
– Obtenir au moins deux as en lançant 50 dés ?

Solution

a) On prend comme univers Ω l'ensemble des quadruplets de nombres compris entre 1 et 6. La nombre d'éléments de Ω est 6^4. On cherche la probabilité de l'événement :
A_1 = « ne pas obtenir d'as en lançant 4 dés ».
Il y a 5^4 quadruplets ne contenant pas l'as, donc $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{5^4}{6^4}$. La probabilité d'obtenir au moins un as est donc

$$p_1 = \mathbb{P}(A_1^C) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0,5177\,.$$

b) On prend comme univers Ω l'ensemble des $10-$uplets de nombres compris entre 1 et 6. La nombre d'éléments de Ω est 6^{10}.

La probabilité de l'événement : A_2 = « ne pas obtenir d'as en lançant 4 dés », est, par le même raisonnement que dans a), le nombre $\mathbb{P}(A_2) = \dfrac{5^{10}}{6^{10}}$.
Le nombre d'éléments de l'ensemble B_2 des $10-$uplets contenant exactement un as se calcule de la manière suivante.

Il y a 10 positions possibles pour l'as, et chaque autre élément peut prendre 5 valeurs possibles. Cela fait donc $10 \cdot 5^9$ éléments. Alors

$$\mathbb{P}(B_2) = \frac{10 \cdot 5^9}{6^{10}}\,.$$

La probabilité qu'il y ait au plus un as est donc, puisque A_2 et B_2 sont disjoints,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B_2) = \frac{5^{10}}{6^{10}} + \frac{10 \cdot 5^9}{6^{10}} = 3\,\frac{5^{10}}{6^{10}}\,.$$

La probabilité d'obtenir au moins deux as est alors,

$$p_2 = \mathbb{P}((A_2 \cup B_2)^C) = 1 - 3\,\frac{5^{10}}{6^{10}} \approx 0,5154\,.$$

c) On prend comme univers Ω l'ensemble des $25-$uplets de couples de deux nombres compris entre 1 et 6. Il y a 36 couples, et chaque élément du $25-$uplet peur prendre 36 valeurs. Donc Ω possède 36^{25} éléments.

L'ensemble A_3 des couples ne contenant pas 2 as possède 35^{25} éléments et sa probabilité vaut

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{35^{25}}{36^{25}}\,,$$

Alors la probabilité qu'il y ait au moins une paire d'as est

$$p_3 = \mathbb{P}(A_3^C) = 1 - \frac{35^{25}}{36^{25}} \approx 0,5055\,.$$

d) On procède comme dans b). On prend comme univers Ω l'ensemble des $50-$uplets de nombres compris entre 1 et 6. La nombre d'éléments de Ω est 6^{50}.

La probabilité de l'événement : $A_4 =$ « ne pas obtenir d'as en lançant 4 dés », est $\mathbb{P}(A_4) = \dfrac{5^{50}}{6^{50}}$.
Le nombre d'éléments de l'ensemble B_4 des $50-$uplets contenant exactement un as se calcule de la manière suivante.

Il y a 50 positions possibles pour l'as, et chaque autre élément peut prendre 5 valeurs possibles. Cela fait donc $50 \cdot 5^{49}$ éléments. Alors

$$\mathbb{P}(B_4) = \frac{50 \cdot 5^{49}}{6^{50}}\,.$$

La probabilité qu'il y ait au plus un as est donc

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_4) + \mathbb{P}(B_4) = \frac{5^{50}}{6^{50}} + \frac{50 \cdot 5^{49}}{6^{50}} = 11\,\frac{5^{50}}{6^{50}}\,.$$

La probabilité d'obtenir au moins deux as est alors

$$p_4 = \mathbb{P}((A_4 \cup B_4)^C) = 1 - 11\,\frac{5^{50}}{6^{50}} \approx 0,9987\,.$$

C'est ce dernier événement qui est donc le plus probable.

20 Déterminer, en précisant à partir de quelles hypothèses, la probabilité de trouver, dans un groupe de n personnes choisies au hasard, au moins deux personnes ayant leur anniversaire le même jour. Calculer une valeur approchée de cette probabilité pour $n = 23$, $n = 41$ et $n = 57$.

Solution

On suppose que l'année a 365 jours, et on considère que les dates d'anniversaire sont réparties de manière équiprobable. Une personne donnée a donc une probabilité 1/365 d'avoir son anniversaire un jour donné.

Si $n > 365$, il y a plus de personnes que de jours de l'année, donc il y a toujours deux personnes ayant leur anniversaire le même jour.

On suppose maintenant $n \leq 365$. On peut modéliser le problème en disant que chaque personne tire un nombre au hasard parmi les nombres entiers de 1 à 365.

L'univers Ω est l'ensemble des $n-$uplets formés de tels nombres. Le nombre d'éléments de Ω est donc 365^n.

L'ensemble A des $n-$uplets dont tous les éléments sont différents est alors A_{365}^n, et donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{A}_{365}^n}{365^n}.$$

La probabilité pour que deux personnes au moins aient leur anniversaire le même jour est alors

$$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \frac{\mathrm{A}_{365}^n}{365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-n)!\,365^n}.$$

En évaluant les factorielles à l'aide de la formule de Stirling, on peut approcher $\mathbb{P}(A)$, si n est petit devant 365, par

$$a_n = \frac{(365e^{-1})^{365}\sqrt{2\times 365\pi}}{((365-n)e^{-1})^{365-n}\sqrt{2\times(365-n)\pi}}\,\frac{1}{365^n} = e^{-n}\left(\frac{365}{365-n}\right)^{365-n+1/2}.$$

On trouve les valeurs approchées de $\mathbb{P}(A^C)$ suivantes :

$$\begin{array}{lcl} n=23 & : & \mathbb{P}(A^C)\approx 0,5 \\ n=41 & : & \mathbb{P}(A^C)\approx 0,9 \\ n=57 & : & \mathbb{P}(A^C)\approx 0,99\,. \end{array}$$

21 Quelle serait la probabilité de perdre si l'on pouvait jouer une seule grille au Loto National ?

Solution

On dispose d'une grille de 49 numéros. On en choisit 6. Le tirage a déterminé 6 numéros. On cherche la probabilité pour qu'il y ait k numéros communs aux deux tirages.

On choisit comme univers Ω l'ensemble des choix de 6 éléments parmi 49. Il y en a $\binom{49}{6}$.

Si $0\leq k\leq 6$, soit A_k l'ensemble des choix où k numéros exactement sont dans la liste déterminée par le tirage. Il y a $\binom{6}{k}$ façons de choisir k numéros parmi 6, et il reste $\binom{43}{6-k}$ façons de choisir les autres numéros. Donc le nombre d'éléments de A_k est $\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}$. On a alors

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}.$$

On perd si l'on a obtenu moins de 2 numéros communs avec le tirage. La probabilité de perdre est donc

$$\mathbb{P}(A_0)+\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2) = \frac{\binom{43}{6}+\binom{6}{1}\binom{43}{5}+\binom{6}{2}\binom{43}{4}}{\binom{49}{6}}\approx 0,98\,.$$

22 Au bridge, si le mort et son partenaire ont chacun un as exactement, est-il plus probable que les deux autres as soient dans la même main adverse ou partagés ?

Solution

Chaque joueur ayant 13 cartes d'un jeu de 52 cartes, on a deux ensemble de 13 cartes fixés, contenant chacun un as. Cherchons le nombre d'éléments des ensembles suivants :

$A =$ « les deux autres mains contiennent chacune un as »
$B =$ « une des deux dernières mains contient deux as ».
Il suffit de choisir les cartes d'une main pour que les cartes de l'autre soient déterminées.

Pour A, on choisit un as parmi les deux restants, et 12 cartes parmi les 24 cartes restantes qui ne sont pas des as, donc

$$|A| = 2\binom{24}{12}.$$

Pour B, ou bien la main contient les deux as, et il reste 11 cartes à choisir parmi 24, ou bien la main ne contient pas d'as, et il reste 13 cartes à choisir parmi 24. Donc

$$|B| = \binom{24}{13} + \binom{24}{11} = 2\binom{24}{11}.$$

Regardons le quotient $|A|/|B|$.

$$\frac{|A|}{|B|} = \frac{24!}{(12!)^2}\,\frac{11!\,13!}{24!} = \frac{11!\,13!}{(12!)^2} = \frac{13}{12}.$$

Comme

$$\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{|A|}{|B|} = \frac{13}{12} > 1,$$

on en déduit que la probabilité de A est plus grande que celle de B.

23 On tire 5 cartes, sans remise, dans un jeu de 52 cartes. Comparer la probabilité des événements suivants :
$A =$ « une paire », c'est-à-dire 2 cartes de même valeur
$B =$ « deux paires »
$C =$ « un brelan », c'est-à-dire 3 cartes de même valeur
$D =$ « un flush », c'est-à-dire 5 cartes de la même couleur
$E =$ « un full », c'est-à-dire 3 cartes d'une même valeur, les 2 autres d'une même autre valeur
$F =$ « une quinte », c'est-à-dire 5 cartes dont les valeurs se suivent, l'ordre étant :
as, 2, 3,. . . ,10, valet, dame, roi, as
$G =$ « un carré (ou poker) », c'est-à-dire 4 cartes de même valeur

EI 24

$H =$ « une quinte flush ».

$\boxed{\textit{Solution}}$

Remarque : les différents événements ont été interprétés en un sens strict précisé à chaque fois.

L'univers Ω est constitué des choix de 5 objets parmi 52, donc possède $\binom{52}{5}$ éléments.

$\boxed{\text{A}}$ Les valeurs des cartes sont $aabcd$, où, a, b, c, d désignent des valeurs distinctes.

On choisit la valeur de a. Il y a 13 possibilités.
On choisit 3 autres valeurs parmi les 12 restantes. Il y a $\binom{12}{3}$ possibilités.
Pour la valeur a, on a deux cartes parmi 4, soit $\binom{4}{2}$
Pour les valeurs de b, c, et d, il y a à chaque fois 4 possibilités. Donc

$$|A| = 13\binom{12}{3}\binom{4}{2}4^3 = 1098240 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) \approx 0,422\,.$$

$\boxed{\text{B}}$ Les valeurs des cartes sont $aabbc$, où, a, b, c, désignent des valeurs distinctes.

On choisit 2 valeurs parmi 13. Il y a $\binom{13}{2}$ possibilités.
On choisit une autre valeur parmi les 11 restantes. Il y a 11 possibilités.
Pour la valeur a, on choisit deux cartes parmi 4, soit $\binom{4}{2}$, de même pour b
Pour la valeur de c il y a 4 possibilités. Donc

$$|B| = \binom{13}{2}11\binom{4}{2}^2 4 = 123552 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) \approx 0,0475\,.$$

$\boxed{\text{C}}$ Les valeurs des cartes sont $aaabc$, où, a, b, c, désignent des valeurs distinctes.

On choisit la valeur de a. Il y a 13 possibilités.
On choisit 2 autres valeurs parmi les 12 restantes. Il y a $\binom{12}{2}$ possibilités.
Pour la valeur a, on choisit 3 cartes parmi 4, soit $\binom{4}{3}$
Pour les valeurs de b et c, il y a à chaque fois 4 possibilités. Donc

$$|C| = 13\binom{12}{2}\binom{4}{3}4^2 = 54912 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(C) \approx 0,021\,.$$

$\boxed{\text{D}}$ Les couleurs des cartes sont $aaaaa$.

On choisit la couleur a, il y a 4 possibilités.
Pour la couleur a, on choisit 5 cartes parmi 13, soit $\binom{13}{5}$, donc

$$|D| = 4\binom{13}{5} = 5148 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(D) \approx 0,002\,.$$

$\boxed{\text{E}}$ Les valeurs des cartes sont $aaabb$, où, a, b, désignent des valeurs distinctes.

On choisit les valeurs de (a, b). Il y a A_{13}^2 possibilités.
Pour la valeur a, on choisit 3 cartes parmi 4, soit $\binom{4}{3}$.
Pour la valeur b, on choisit deux cartes parmi 4, soit $\binom{4}{2}$. Donc

$$|E| = \mathrm{A}_{13}^2\binom{4}{2}\binom{4}{3} = 3744 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(E) \approx 0,0014\,.$$

$\boxed{\text{F}}$ Il y a 10 successions possibles des 5 cartes.
Chacune des cartes d'une succession peut prendre 4 couleurs possibles. Donc

$$|F| = 10 \cdot 4^5 = 10240 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(F) \approx 0,0039\,.$$

$\boxed{\text{G}}$ Les valeurs des cartes sont $aaaab$, où, a, b, désignent des valeurs distinctes.

On choisit les valeurs de (a, b). Il y a A_{13}^2 possibilités.
Pour la valeur b, il y a 4 possibilités Donc

$$|G| = 4\mathrm{A}_{13}^2 = 624 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(G) \approx 0,00024\,.$$

$\boxed{\text{H}}$ Il y a 10 successions possibles des 5 cartes.
Chacune des successions peut prendre 4 couleurs possibles. Donc

$$|H| = 40 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(H) \approx 0,000015\,.$$

24 Combien peut-on définir sur $\Omega = \{a, b, c\}$ de probabilités $\mathbb{P}$

a) telles que $\mathbb{P}(\{a, b\}) = \dfrac{1}{4}$?

b) telles que $\mathbb{P}(\{a, b\}) = \mathbb{P}(\{b, c\}) = \dfrac{1}{4}$?

c) telles que $\mathbb{P}(\{a, b\}) = \mathbb{P}(\{b, c\}) = \dfrac{3}{4}$?

Solution

a) On doit avoir

$$\mathbb{P}(\{c\}) = 1 - \mathbb{P}(\{a, b\}) = \frac{3}{4}\,,$$

et

$$\mathbb{P}(\{a\}) + \mathbb{P}(\{b\}) = \mathbb{P}(\{a, b\}) = \frac{1}{4}\,.$$

Il y a donc une infinité de probabilités possibles.

b) On doit avoir

$$\mathbb{P}(\{a\}) + \mathbb{P}(\{b\}) = \mathbb{P}(\{b\}) + \mathbb{P}(\{c\}) = \frac{1}{4}\,.$$

Donc $\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}(\{c\})$.

On doit avoir également

$$\mathbb{P}(\{c\}) = 1 - \mathbb{P}(\{a, b\}) = \frac{3}{4}\,,$$

alors

$$\mathbb{P}\{b\}) = 1 - \mathbb{P}(\{a\}) - \mathbb{P}(\{c\}) = 1 - \frac{3}{2} < 0\,,$$

ce qui n'est pas possible. Il n'existe pas de probabilité vérifiant les conditions données.

c) On doit avoir

$$\mathbb{P}(\{a\}) + \mathbb{P}(\{b\}) = \mathbb{P}(\{b\}) + \mathbb{P}(\{c\}) = \frac{3}{4}\,.$$

Donc $\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}(\{c\})$.

On doit avoir également

$$\mathbb{P}(\{c\}) = 1 - \mathbb{P}(\{a, b\}) = \frac{1}{4}\,,$$

alors

$$\mathbb{P}\{b\}) = 1 - \mathbb{P}(\{a\}) - \mathbb{P}(\{c\}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Il y a une probabilité et une seule possible.

25 Soit A et B deux événements aléatoires associés à un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &= -\mathbb{P}(A^C \cap B) + \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B) \\
&= -\mathbb{P}(A \cap B^C) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^C) \\
&= \mathbb{P}(A^C \cap B^C) - \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B^C)\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Solution}}$

On a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B^C) + \mathbb{P}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B^C) = 1 - \mathbb{P}(B)\,,$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B^C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\
&= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) - \mathbb{P}(A \cap B^C) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^C) - \mathbb{P}(A \cap B^C)\,.
\end{aligned}$$

En permutant les rôles de A et de B, on a aussi

$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A^C) - \mathbb{P}(B \cap A^C)\,.$$

Enfin, en appliquant cette formule à A^C et B^C,

$$\mathbb{P}(A^C \cap B^C) - \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B^C) = \mathbb{P}(B^C)\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B^C \cap A)\,.$$

Les quatre différences sont donc égales.

26 Monsieur Dubouchon pêche à la ligne dans son étang où ne vivent que trois carpes et sept tanches. Il a décidé de pêcher jusqu'à ce qu'il ait pris quatre poissons. En supposant que chacun des dix poissons ait la même probabilité de se faire prendre (dans n'importe quel ordre) et qu'ils aient tous des poids différents, déterminer la probabilité de chacun des événements aléatoires suivants :
$A =$ « l'un des quatre poissons pris est une carpe »
$B =$ « l'un au moins des quatre poissons pris est une carpe »
$C =$ « le premier poisson pris est une carpe »
$D =$ « le second poisson pris est une carpe »
$E =$ « les deux premiers poissons pris sont des carpes »
$F =$ « au moins un des deux premiers poissons pris est une carpe »
$G =$ « chacun des trois derniers poissons pris pèse plus que le précédent ».

Solution

a) Les événements A et B ne dépendent pas de l'ordre dans lequel les poissons sont pêchés. Si l'on note p_k la probabilité d'avoir k carpes (exactement) parmi les 4 poissons, on a une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(4,3,10)$. En effet si l'on prend pour Ω les ensembles de 4 poissons pris parmi 10, on a

$$|\Omega| = \binom{10}{4}\,.$$

Si A_k est formé des ensembles contenant k carpes, on choisit k carpes parmi 3, et $4-k$ tanches parmi 7, donc

$$|A| = \binom{3}{k}\binom{7}{4-k}\,,$$

ce qui donne bien

$$p_k = \frac{\binom{3}{k}\binom{7}{4-k}}{\binom{10}{4}}\,.$$

On a alors

$$\mathbb{P}(A) = p_1 = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{2}\,.$$

$$\mathbb{P}(B^C) = p_0 = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{6}\,,$$

donc

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^C) = \frac{5}{6}\,.$$

b) Pour les autres événements, on tient compte de l'ordre, et on va prendre pour Ω l'ensemble des quadruplets formés avec les 10 poissons. Donc

$$|\Omega| = \mathrm{A}_{10}^4 .$$

Les événements C et D ont la même probabilité. Si i est la position étudiée, il y a 3 carpes possibles en i, et pour les trois autres positions, il reste 3 poissons à choisir parmi 9. Donc

$$|C| = |D| = 3\mathrm{A}_9^3 ,$$

et

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(D) = \frac{3\mathrm{A}_9^3}{\mathrm{A}_{10}^4} = \frac{3}{10} .$$

On remarque que c'est tout simplement la probabilité de tirer 3 carpes parmi 10 poissons.

Pour E, il y a A_3^2 façons de choisir les carpes et A_8^2 façons de choisir les deux autres poissons, donc

$$|E| = \mathrm{A}_3^2\mathrm{A}_8^2 ,$$

et

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\mathrm{A}_3^2\mathrm{A}_8^2}{\mathrm{A}_{10}^4} = \frac{\mathrm{A}_3^2}{\mathrm{A}_{10}^2} = \frac{1}{15} .$$

Là aussi on constate que c'est la probabilité de tirer deux carpes parmi 10 poissons.

Alors

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(E) = \frac{8}{15} .$$

c) Pour l'événement G, on cherche le nombre de cas où les poids des 4 poissons sont ordonnés en croissant.

Choisir un quadruplet de poissons, dont les éléments sont rangés suivant l'ordre croissant des poids, revient à choisir un ensemble de 4 poissons parmi 10 et à les ranger ensuite par ordre croissant de poids. (L'ordre croissant étant imposé, il y a une seule façon de ranger les poissons par ordre croissant de poids une fois que l'ensemble de 4 poissons est choisi). Cela revient à choisir 4 éléments parmi 10, donc

$$|G| = \binom{10}{4} ,$$

et

$$\mathbb{P}(G) = \frac{\binom{10}{4}}{\mathrm{A}_{10}^4} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} .$$

27 On tire au hasard un entier entre 1 et 900.
1) Quelle est la probabilité p_0 qu'il soit pair, mais ni multiple de 4, ni multiple de 6 ?
2) Pour tout j diviseur de 900, calculer $\mathbb{P}(E_j)$, où E_j= « multiple de j ».

3) Exprimer p_0 en fonction des $\mathbb{P}(E_j)$ et vérifier ainsi la réponse à la question 1).

Solution

1) Parmi les nombres entiers compris entre 1 et 900, il y a
450 nombres pairs,
225 multiples de 4,
150 multiples de 6,
75 multiples de 12 (ce sont les multiples à la fois de 4 et 6).

Le nombre de nombres multiples de 4 ou 6 est donc

$$150 + 225 - 75 = 300\,,$$

et le nombre de nombres pairs ni multiple de 4, ni multiple de 6 est

$$450 - 300 = 150\,.$$

Et donc

$$p_0 = \frac{150}{900} = \frac{1}{6}\,.$$

2) Il y a $900/j$ multiples de j donc $\mathbb{P}(E_j) = 1/j$.

3) On a

$$p_0 = \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_4) - \mathbb{P}(E_6) + \mathbb{P}(E_{12}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\,.$$

28 On tire trois cartes au hasard, l'une après l'autre et sans remise, dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que la troisième carte tirée soit une dame ?

Solution

Il y a 4 façons de choisir la dame et A_{31}^2 façons de choisir les deux premières cartes. Alors la probabilité vaut

$$\frac{4\mathrm{A}_{31}^3}{\mathrm{A}_{32}^2} = \frac{4\cdot 31!}{32!} = \frac{1}{8}\,.$$

On remarque que la probabilité est celle de choisir une dame parmi 32.

29 Le directeur d'un établissement où travaillent plus de mille personnes, dont la moitié de femmes, n'a pas réussi à susciter de candidatures volontaires pour constituer une commission de 10 personnes chargée de proposer des amendements au règlement intérieur de l'établissement.
Il décide de tirer au sort 10 noms sur la liste du personnel.
Montrer qu'il y a environ une chance sur quatre de trouver autant d'hommes que de femmes dans la commission ainsi formée.

EI 30

$\boxed{\textit{Solution}}$

Si l'on note $2n$ le nombre d'employés, et Ω l'ensemble des choix de 10 employés parmi $2n$, le nombre d'éléments de Ω est $\binom{2n}{10}$.

Si A est l'ensemble des choix où il y a 5 hommes et 5 femmes, on choisit 5 femmes parmi n et 5 hommes parmi n. Alors le nombre d'éléments de A est $\binom{n}{5}^2$. La probabilité cherchée est donc

$$p(A) = \frac{\binom{n}{5}^2}{\binom{2n}{10}}\,.$$

Rappelons que l'on peut approcher $\frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}$ par $\binom{n}{k}a^k(1-a)^{n-k}$, lorsque n et k sont fixes, n_1 et n_2 sont grands et $\frac{n_1}{n_1+n_2}$ proche de a. Ici $n_1+n_2=2n$, et donc $a=1/2$, $n=10$ et $k=5$, donc $p(A)$ s'approche par

$$b = \binom{10}{5}\frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{256} \approx 0,246\,.$$

La probabilité de A est proche d'un quart.

30 1) On place dans une boîte six boules indiscernables au toucher et marquées des nombres 1 à 6. On y fait neuf tirages d'une boule, au hasard et avec remise. Quelle est la probabilité qu'un tiers au moins des boules tirées portent un nombre pair ?

2) On lance neuf dés (équilibrés). Quelle est la probabilité qu'un tiers au moins des dés montrent un nombre pair de points ?

3) Même question si on lance neuf fois le même dé.

$\boxed{\textit{Solution}}$

1) La probabilité de tirer un nombre pair est de $1/2$. La probabilité p_k d'avoir k nombres pairs en 9 tirages est alors donnée par la loi binomiale $\mathcal{B}(9,1/2)$ et vaut

$$p_k = \frac{\binom{9}{k}}{2^9}\,.$$

On veut que le nombre de boules ayant un numéro pair soit supérieur à 3. On cherche la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire que le nombre de boules soit inférieur à 2. On a donc

$$\mathbb{P}(A^C) = p_0+p_1+p_2 = \frac{\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}}{2^9} = \frac{23}{2^8}\,.$$

Donc

$$\mathbb{P}(A) = 1-\frac{23}{2^8} = \frac{233}{256} \approx 0,91\,.$$

2) et 3) Ce sont les mêmes problèmes que dans 1).

31 On tire au hasard un 100−échantillon dans une population comportant 4% d'individus d'un type A. Déterminer l'ordre de grandeur (ou de petitesse) de la probabilité que cet échantillon comporte exactement vingt individus de type A.

$\boxed{\textit{Solution}}$

Soit N le nombre d'individus de la population totale et N_1 le nombre de personnes ayant le type A. La probabilité d'avoir 20 individus de type A dans un 100-échantillon est donc (loi hypergéométrique)

$$p = \frac{\binom{N_1}{20}\binom{N-N_1}{80}}{\binom{N}{100}},$$

Le rapport $a = N_1/N$ donne la proportion d'individus de type A et vaut donc 4/100. Alors on peut approcher p par

$$q = \binom{100}{20} a^{20}(1-a)^{80} \approx 0,2 \cdot 10^{-8}.$$

32 J'ai dans ma poche trois jetons identiques au toucher : l'un a ses deux faces blanches, le second a ses deux faces noires et le troisième a une face noire et l'autre blanche. Ayant sorti de ma poche un jeton choisi au hasard, je n'en vois qu'une seule face : elle est blanche. Quelle est la probabilité que l'autre face de ce jeton soit blanche également ?

$\boxed{\textit{Solution}}$

Notons B_v (respectivement B_c) la probabilité d'avoir une face blanche visible (respectivement cachée).

Comme il y a trois faces blanches sur les six faces des pions on a $\mathbb{P}(B_v) = 1/2$.
On cherche la probabilité conditionnelle de l'événement « tirer une face blanche » sachant que l'on a déjà une face blanche. C'est donc

$$p = \mathbb{P}(B_c/B_v) = \frac{\mathbb{P}(B_c \cap B_v)}{\mathbb{P}(B_v)}.$$

L'événement $B_v \cap B_c$ est l'événement « tirer le pion blanc ». Sa probabilité est donc 1/3. Alors

$$p = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

33 Cette année, 29 des 79 étudiants de l'UE A 27 du Master d'astrologie numérique appliquée à l'économie sont des filles et 50 ont moins de 21 ans. D'autre part, dans cette UE, 64% des moins de 21 ans sont des garçons.
Déterminer la proportion de moins de 21 ans parmi les filles.

Solution

Traduisons les éléments donnés en terme de probabilité. Notons
F l'événement « être une fille »
G l'événement « être un garçon »
A l'événement « être âgé de moins de 21 ans ».
On a déjà

$$\mathbb{P}(F) = \frac{29}{79} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) = \frac{50}{79}\,.$$

Le fait que 64% des moins de 21 ans soient des garçons se traduit par une probabilité conditionnelle : la probabilité d'être un garçon sachant que l'on a moins de 21 ans, est de 64%, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(G/A) = \frac{64}{100}\,.$$

La probabilité que l'on cherche est une autre probabilité conditionnelle : c'est la probabilité d'avoir moins de 21 ans, sachant que l'on est une fille, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(A/F) = \frac{\mathbb{P}(A \cap F)}{\mathbb{P}(F)}\,.$$

Comme l'ensemble (G, F) est un système complet d'événements aléatoires, on a

$$\mathbb{P}(A \cap F) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap G) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(G/A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(G/A))\,,$$

on obtient

$$\mathbb{P}(A/F) = \frac{50}{79}\left(1 - \frac{64}{100}\right)\frac{79}{29} = \frac{18}{29}\,.$$

34 Soient A et B deux parties d'un ensemble Ω telles que

$$A \cap B \neq \emptyset\,,\; A \cap B^C \neq \emptyset\,,\; A^C \cap B \neq \emptyset\,,\; A^C \cap B^C \neq \emptyset\;\;.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le quadruplet (p, q, r, s) de $\,]0,\,1\,[^4$, pour qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que :

$$(\mathbb{P}(A/B), \mathbb{P}(A/B^C), \mathbb{P}(B/A), \mathbb{P}(B/A^C)) = (p, q, r, s)\,.$$

Solution

On se pose le problème suivant : donner une condition nécessaire et suffisante sous la forme d'une ou plusieurs relations reliant p, q, r, s, pour que l'on puisse trouver quatre nombres x, y, z, t dans $\,]0,\,1\,[$, dont la somme vaut 1 et vérifiant

$$\mathbb{P}(A \cap B) = x\,,\; \mathbb{P}(A \cap B^C) = y\,,\; \mathbb{P}(B \cap A^C) = z\,,\; \mathbb{P}(A^C \cap B^C) = t\,.$$

On posera
$$\mathbb{P}(A) = X \ , \ \mathbb{P}(B) = Y \quad \text{et} \quad P = 1/p \ , \ Q = 1/q \ , \ R = 1/r \ , \ S = 1/s \, .$$
Les nombres P, Q, R, S, sont dans $]\,1,\,+\infty\,[$, et la condition sera donnée sur P, Q, R, S.

En remplaçant $\mathbb{P}(A/B)$, etc... par leur valeur, on part donc du système
$$\left\{\begin{array}{c} \mathbb{P}(A\cap B) = p\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A\cap B^C) = q\mathbb{P}(B^C) \\ \mathbb{P}(A\cap B) = r\mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(B\cap A^C) = s\mathbb{P}(A^C) \end{array}\right. .$$
ou encore
$$\left\{\begin{array}{c} \mathbb{P}(A\cap B) = pY \\ \mathbb{P}(A\cap B^C) = q(1-Y) \\ \mathbb{P}(A\cap B) = rX \\ \mathbb{P}(B\cap A^C) = s(1-X) \end{array}\right. .$$
En soustrayant la première ligne de la troisième, on obtient
$$rX - pY = 0 \, .$$
En additionnant les deux premières lignes, on trouve
$$pY + q(1-Y) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A\cap B^C) = \mathbb{P}(A) = X \, ,$$
et en additionnant les deux dernières
$$rX + s(1-X) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(B\cap A^C) = \mathbb{P}(B) = Y \, ,$$
ce qui donne le système linéaire
$$\left\{\begin{array}{c} rX - pY = 0 \\ X + (q-p)Y = q \\ (s-r)X + Y = s \end{array}\right. .$$
C'est un système de trois équations à deux inconnues. Si l'on introduit les vecteurs colonnes
$$U = \begin{pmatrix} r \\ 1 \\ s-r \end{pmatrix} \ , \ V = \begin{pmatrix} -p \\ q-p \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ s \end{pmatrix} \ ,$$
on remarque que les deux premiers vecteurs ne sont pas colinéaires puisque le déterminant
$$\delta = \begin{vmatrix} r & -p \\ 1 & q-p \end{vmatrix} = qr + p(1-r) = \frac{P + Q(R-1)}{PQR} > 0 \, .$$
Alors dire que le système est vérifié équivaut à dire que W est combinaison linéaire de U et de V, et donc que le déterminant
$$\Delta = \begin{vmatrix} r & -p & 0 \\ 1 & q-p & q \\ s-r & 1 & s \end{vmatrix}$$

est nul. On calcule ce déterminant en soustrayant la première ligne de la deuxième et en l'ajoutant à la troisième, puis en développant par rapport à la première ligne. On obtient

$$\Delta = \begin{vmatrix} r & -p & 0 \\ 1-r & q & q \\ s & 1-p & s \end{vmatrix} = rq(s+p-1) + ps(1-r-q)\,.$$

Si l'on divise par le produit $pqrs$, dire que Δ est nul revient à la condition nécessaire

$$(\mathcal{C}) \qquad P + S - PS - (Q + R - QR) = 0\,,$$

ou encore

$$(P-1)(S-1) = (Q-1)(R-1)\,.$$

Montrons que cette condition est suffisante.

Si la condition $(\mathcal{C})$ est vérifiée, on peut alors résoudre le système en résolvant le système formé des deux premières équations.

$$\begin{cases} rX - pY = 0 \\ X + (q-p)Y = q \end{cases},$$

ce qui donne facilement

$$X = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} 0 & -p \\ q & q-p \end{vmatrix} = \frac{pq}{\delta} = \frac{R}{P + Q(R-1)}\,,$$

et

$$Y = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} r & 0 \\ 1 & q \end{vmatrix} = \frac{rq}{\delta} = \frac{P}{P + Q(R-1)}\,.$$

On constate en particulier, puisque δ est strictement positif, qu'il en est de même de X et de Y. D'autre part on obtient également

$$1 - X = \frac{P + QR - Q - R}{P + Q(R-1)}\,,$$

et en utilisant la relation $(\mathcal{C})$

$$1 - X = \frac{(P-1)S}{P + Q(R-1)}\,.$$

On a aussi

$$1 - Y = \frac{Q(R-1)}{P + Q(R-1)}\,,$$

et $1 - X$ et $1 - Y$ sont strictement positifs. Donc X et Y appartiennent à l'intervalle $\,]\,0,\,1\,[\,$.

Alors, on à immédiatement

$$x = pY = \frac{1}{P + Q(R-1)} \in \,]\,0,\,1\,[\;,$$

$$y = q(1-Y) = \frac{R-1}{P + Q(R-1)} \quad \text{et} \quad 1 - y = \frac{P + (Q-1)(R-1)}{P + Q(R-1)}\,,$$

donc y appartient à $]0,\,1[$, puis

$$z = s(1-X) = \frac{P-1}{P+Q(R-1)} \quad \text{et} \quad 1-z = \frac{1+Q(R-1)}{P+Q(R-1)}\,,$$

et z appartient aussi à $]0,\,1[$. Alors

$$x+y+z = \frac{P+R-1}{P+Q(R-1)} > 0\,,$$

et enfin

$$t = 1-(x+y+z) = 1 - \frac{P+R-1}{P+Q(R-1)} = \frac{(Q-1)(R-1)}{P+Q(R-1)} > 0\,,$$

et on a donc également $t \in]0,\,1[$.

On a donc bien obtenu quatre nombres appartenant à $]0,\,1[$ et dont la somme vaut 1. On pourra trouver une probabilité $\mathbb{P}$ telle que

$$\mathbb{P}(A\cap B) = x\,,\ \mathbb{P}(A\cap B^C) = y\,,\ \mathbb{P}(B\cap A^C) = z\,,\ \mathbb{P}(A^C\cap B^C) = t\,.$$

35 A l'ouverture, le rayon boulangerie d'un magasin en libre service contient cent baguettes dont x seulement sont fraîches, les autres étant l'invendu de la veille.

1. Madame N est la première cliente de la journée. Elle choisit au hasard k baguettes. Quelle est la probabilité $p_k(m)$ que m d'entre elles soient fraîches ?

2. Si Madame N n'est pas la première cliente de la journée et si n baguettes ($n \leq 100-k$) ont déjà été achetées (toutes choisies au hasard) avant son arrivée, qu'est devenue la probabilité $p_k(m)$?

3. Les clients du magasin ne connaissent évidemment pas le nombre x (ils le supposent nul !). En fait, ce nombre est aléatoire : il dépend chaque jour du nombre aléatoire de baguettes vendues la veille. Pour tout entier i de $[1,\,100]$, on note A_i l'événement : i des 100 baguettes que contient le rayon à l'ouverture sont fraîches. Montrer que la probabilité $p_1(0)$ d'avoir du pain rassis quand on achète une seule baguette ne dépend des $\mathbb{P}(A_i)$ qu'au travers du nombre

$$m_1 = \sum_{i=1}^{100} i\mathbb{P}(A_i)\,.$$

$\boxed{\textit{Solution}}$

1. Il s'agit d'une loi $\mathcal{H}(k,x,100)$, et

$$p_k(m) = \frac{\binom{x}{m}\binom{100-x}{k-m}}{\binom{100}{k}}\,.$$

2. La probabilité ne change pas. Voici une démonstration.

On suppose que n baguettes ont déjà été achetées. Il reste donc $100 - n$ baguettes.
La probabilité que j baguettes fraîches aient été achetées avant que Madame N n'arrive est

$$\frac{\binom{x}{j}\binom{100-x}{n-j}}{\binom{100}{n}}\,.$$

La probabilité que Madame N obtienne m baguettes fraîches sachant que j ont déjà été achetées est

$$\frac{\binom{x-j}{m}\binom{100-n-x+j}{k-m}}{\binom{100-n}{k}}\,.$$

Donc la probabilité $p'_k(m)$ que Madame N obtienne m baguettes fraîches est dans ce cas

$$p'_k(m) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{x-j}{m}\binom{100-n-x+j}{k-m}}{\binom{100-n}{k}}\;\frac{\binom{x}{j}\binom{100-x}{n-j}}{\binom{100}{n}} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(\binom{x-j}{m}\binom{x}{j})(\binom{100-n-x+j}{k-m}\binom{100-x}{n-j})}{\binom{100-n}{k}\binom{100}{n}}\,.$$

Mais on a la relation

$$\binom{A-P}{H}\binom{A}{P} = \binom{A}{H}\binom{A-H}{P}\,,$$

(car ces deux nombres sont égaux à $\dfrac{A!}{H!P!(A-H-P)!}$), et on en déduit

$$\binom{x-j}{m}\binom{x}{j} = \binom{x}{m}\binom{x-m}{j}\,,$$

$$\binom{100-n-x+j}{k-m}\binom{100-x}{n-j} = \binom{100-x}{k-m}\binom{100-x-k+m}{n-j}\,,$$

$$\binom{100-n}{k}\binom{100}{n} = \binom{100}{k}\binom{100-k}{n}\,.$$

ce qui donne

$$p'_k(m) = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{x-m}{j}\binom{100-x-k+m}{n-j}}{\binom{100-k}{n}}\right)\;\frac{\binom{x}{m}\binom{100-x}{k-m}}{\binom{100}{k}}\,.$$

Mais la somme

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{x-m}{j}\binom{100-x-k+m}{n-j}}{\binom{100-k}{n}}$$

est celle des coefficients de la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, x-m, 100-k)$ et vaut donc 1. On retrouve alors $p'_k(m) = p_k(m)$.

3. Soit B l'événement « obtenir une baguette rassise ». La probabilité d'obtenir une baguette rassie sachant que i des 100 baguettes sont fraîches est donc

$$\mathbb{P}(B/A_i) = \frac{100-i}{100}\,.$$

la probabilité cherchée est alors

$$\begin{aligned} p_1(0) &= \sum_{i=0}^{100} \mathbb{P}(B_i/A_i)\mathbb{P}(A_i) \\ &= \sum_{i=0}^{100} \frac{100-i}{100}\mathbb{P}(A_i) \\ &= \sum_{i=0}^{100} \mathbb{P}(A_i) - \frac{1}{100}\sum_{i=0}^{100} i\mathbb{P}(A_i)\,. \end{aligned}$$

Mais la première somme vaut 1, puisque $\{A_i \mid i \in [\![0,\,100]\!]\}$ est un système complet d'événements aléatoires. Donc

$$p_1(0) = 1 - \frac{1}{100}\sum_{i=0}^{100} i\mathbb{P}(A_i) = 1 - \frac{m_1}{100}\,.$$

36 Une enquête a montré qu'en Bordurie le cancer des bronches touchait une femme sur 10 000 et 4 hommes sur 10 000. La même enquête prouvait que 70% des cancers bronchiques chez la femme apparaissent chez une fumeuse, contre 30% seulement chez une non-fumeuse, alors que ces proportions chez l'homme sont respectivement 90% et 10%. Un journaliste de *Klow matin* concluait son commentaire de l'enquête en affirmant qu'une fumeuse avait moins de risque de contracter ce cancer qu'un fumeur.

1. Sur quoi ce journaliste a-t-il vraisemblablement basé sa conclusion ?

2. Savoir que la proportion de fumeurs est six fois plus élevée chez l'homme que chez la femme permet-il de conclure sérieusement ?

Solution

1. Il a sans doute comparé les proportions 70% et 90%.

2. Notons C l'événement « avoir un cancer », F « être une femme », H « être un homme », Φ « fumer », et traduisons les pourcentages donnés sous forme de probabilités conditionnelles. On a

$$\mathbb{P}(C/F) = \frac{1}{10\,000}\,,\ \mathbb{P}(C/H) = \frac{4}{10\,000}\,,\ \mathbb{P}(\Phi/F\cap C) = \frac{7}{10}\,,\ \mathbb{P}(\Phi/H\cap C) = \frac{9}{10}\,.$$

De plus

$$\mathbb{P}(\Phi/H) = 6\,\mathbb{P}(\Phi/F)\,.$$

On veut comparer $\mathbb{P}(C/F\cap\Phi)$ et $\mathbb{P}(C/H\cap\Phi)$.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C/F\cap\Phi) &= \frac{\mathbb{P}(C\cap F\cap\Phi)}{\mathbb{P}(F\cap\Phi)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(\Phi/F\cap C)\mathbb{P}(F\cap C)}{\mathbb{P}(F\cap\Phi)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(\Phi/F\cap C)\mathbb{P}(C/F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(\Phi/F)\mathbb{P}(F)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(\Phi/F\cap C)\mathbb{P}(C/F)}{\mathbb{P}(\Phi/F)}\,.\end{aligned}$$

Le même calcul, donne

$$\mathbb{P}(C/H\cap\Phi) = \frac{\mathbb{P}(\Phi/H\cap C)\mathbb{P}(C/H)}{\mathbb{P}(\Phi/H)}\,.$$

D'où

$$\frac{\mathbb{P}(C/F\cap\Phi)}{\mathbb{P}(C/H\cap\Phi)} = \frac{\mathbb{P}(\Phi/F\cap C)}{\mathbb{P}(\Phi/H\cap C)}\,\frac{\mathbb{P}(C/F)}{\mathbb{P}(C/H)}\,\frac{\mathbb{P}(\Phi/H)}{\mathbb{P}(\Phi/F)}\,.$$

On obtient donc

$$\frac{\mathbb{P}(C/F\cap\Phi)}{\mathbb{P}(C/H\cap\Phi)} = \frac{7}{9}\,\frac{1}{4}\,6 = \frac{7}{6} > 1\,.$$

Donc $\mathbb{P}(C/F\cap\Phi)$ est supérieur à $\mathbb{P}(C/H\cap\Phi)$.

37 Mr A et Mme B présentent tous deux des symptômes qui ne peuvent être provoqués que par l'une ou l'autre de deux maladies M_1 et M_2 qui se soignent de façons fort différentes (et que l'on suppose incompatibles). La maladie M_2 étant statistiquement 99 fois plus fréquente que la maladie M_1 leurs médecins présument être en présence de M_2. Pour confirmer leurs diagnostics, ils prescrivent une analyse. De par son principe même, cette analyse ne peut donner de certitude : son résultat est positif chez 74,25% des malades atteints de la maladie M_1 et seulement chez 0,75% des malades atteints de M_2 (et non pas 100% et 0%).

Les résultats sont négatifs pour Mr A et positifs pour Mme B. Faut-il en conclure que Mr A est atteint de M_2 et Mme B de M_1 ?

Solution

On traduit les hypothèse avec des probabilités. Notons T_+ l'événement « le test est positif » et T_- l'événement « le texte est négatif ».

$$\mathbb{P}(M_2) = 0,99\,,\ \mathbb{P}(M_1) = 0,01\,,\ \mathbb{P}(T_+/M_1) = 0,7425\,,\ \mathbb{P}(T_+/M_2) = 0,0075\,.$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(T_-/M_1) = 1 - 0,7425 = 0,2575 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T_-/M_2) = 1 - 0,0075 = 0,9925\,.$$

On calcule $\mathbb{P}(M_2/T_-)$ et $\mathbb{P}(M_1/T_+)$ par la formule de Bayes.

$$\mathbb{P}(M_2/T_-) = \frac{\mathbb{P}(T_-/M_2)\mathbb{P}(M_2)}{\mathbb{P}(T_-/M_1)\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(T_-/M_2)\mathbb{P}(M_2)} \approx 0,997\,.$$

De même

$$\mathbb{P}(M_1/T_+) = \frac{\mathbb{P}(T_+/M_1)\mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(T_+/M_1)\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(T_+/M_2)\mathbb{P}(M_2)} \approx 0,500\,.$$

Si l'on peut conclure que Mr A est atteint de M_2, l'incertitude reste pour Mme B.

38 Un vigile a, dans sa poche, dix clefs toutes différentes mais indiscernables au toucher. Il doit ouvrir, dans la quasi-obscurité, une des portes de l'entrepôt qu'il surveille et, pour ce faire, il essaie les clefs l'une après l'autre, au hasard.
Certaines nuits, il remet dans une autre poche toute clef essayée et qui n'a pas ouvert le porte. Les autres nuits, il remet dans la même poche toute clef essayée sans succès.
Un cambrioleur probabiliste a remarqué que le vigile emploie la seconde méthode quand, et seulement quand, il a trop copieusement arrosé son repas, ce qui se produit de façon aléatoire avec une probabilité 1/10 (et le rend inoffensif).

Déterminer la probabilité p_k que le voleur, arrivé sur les lieux après le repas du vigile et très pressé d'en finir, puisse agir sans risque quand il a constaté que la porte n'est pas encore ouverte après la $k-$ième tentative.

Solution

Si $1 \leq k \leq 9$, notons A_k l'événement « utiliser k clefs sans avoir la bonne » et B l'événement « avoir trop arrosé le repas ». La probabilité cherchée est

$$p_k = \mathbb{P}(B/A_k)\,,$$

et on la calcule par la formule de Bayes.

$$p_k = \frac{\mathbb{P}(A_k/B)P(B)}{\mathbb{P}(A_k/B)P(B) + \mathbb{P}(A_k/B^C)P(B^C)}\,.$$

On a $P(B) = 1/10$. Par ailleurs, lorsque le repas est bien arrosé, le vigile effectue un tirage avec remise, chacune des k clefs a la même probabilité 9/10 d'être mauvaise, donc

$$P(A_k/B) = \left(\frac{9}{10}\right)^k\,.$$

Si le vigile est sobre, il effectue un tirage sans remise, la $j-$ième clef a une probabilité $(10-j)/(10-j+1)$ d'être mauvaise, sachant que les $j-1$ précédentes l'étaient, donc

$$P(A_k/B^C) = \frac{9}{10}\,\frac{8}{9}\cdots\frac{10-k}{10-k+1} = \frac{10-k}{10}\,.$$

Alors

$$p_k = \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^k \frac{1}{10}}{\left(\frac{9}{10}\right)^k \frac{1}{10} + \frac{10-k}{10}\,\frac{9}{10}} = \frac{9^{k-1}}{9^{k-1} + 10^k - k10^{k-1}}\,.$$

39 Soit Ω et Ω' deux univers, h une application de Ω sur Ω' et $\{B'_k\}_{k\in K}$ un système complet d'événements de $\mathcal{P}(\Omega')$. Montrer que $\{h^{-1}(B'_k)\}_{k\in K}$ est un système complet d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Solution

Soit ω dans Ω. Alors $h(\omega)$ appartient à Ω'. Comme

$$\Omega' = \bigcup_{k\in K} B'_k\,,$$

il existe un indice k dans K tel que $h(\omega)$ appartienne à B'_k. Il en résulte que ω appartient à $h^{-1}(B'_k)$. Donc

$$\Omega = \bigcup_{k\in K} h^{-1}(B'_k)\,.$$

Soit ω dans $h^{-1}(B'_k) \cap h^{-1}(B'_j)$, où $k \neq j$. Alors $h(\omega)$ appartient à $B'_k \cap B'_j$, mais cette intersection est vide ce qui n'est pas possible. Il en résulte que $h^{-1}(B'_k) \cap h^{-1}(B'_j)$ est vide également. Les événements $h^{-1}(B'_k)$ sont deux à deux incompatibles.

Soit ω' dans B'_k. Comme h est surjective, il existe ω dans Ω tel que $h(\omega) = \omega'$. Alors ω appartient à $h^{-1}(B'_k)$ qui n'est donc pas vide.

On a donc bien montré que $\{h^{-1}(B'_k)\}_{k\in K}$ est un système complet d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$.

40 1. Soit h une application d'un ensemble fini Ω dans un ensemble fini W, A et A' deux parties quelconques de W, $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties de W et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de W deux à deux disjointes. Montrer que

$$(a) \quad h^{-1}(A^C) = (h^{-1}(A))^C$$

$$(b) \quad h^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} h^{-1}(A_i)$$

$$(c) \quad h^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} h^{-1}(A_i)$$

$$(d) \quad h^{-1}\left(\biguplus_{j\in J} B_j\right) = \biguplus_{j\in J} h^{-1}(B_j)$$

$$(e) \quad [A \subset A'] \Rightarrow [h^{-1}(A) \subset h^{-1}(A')]$$

$$(f) \quad h^{-1}(A \setminus A') = h^{-1}(A) \setminus h^{-1}(A')$$

2. Démontrer que si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, h une application définie sur Ω et $\Omega' = h(\Omega)$, alors l'application $\mathbb{P}_h$ définie sur $\mathcal{P}(\Omega')$ par

$$(\forall A' \in \mathcal{P}(\Omega')) \quad \mathbb{P}_h(A') = \mathbb{P}(h^{-1}(A'))\,,$$

est une probabilité sur Ω'.

Solution

(a) sera démontré plus loin comme application de (d).

(b) Soit x dans $h^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$. Cela signifie que $h(x)$ appartient à $\bigcap_{i\in I} A_i$, ou encore, que pour tout i de I, l'élément $h(x)$ appartient à A_i. Cela veut dire que pour tout i de I, l'élément x est dans $h^{-1}(A_i)$ c'est-à-dire dans l'intersection de ces ensembles. On a donc bien

$$h^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} h^{-1}(A_i)\,.$$

(c) Soit x dans $h^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$. Cela signifie que $h(x)$ appartient à $\bigcup_{i\in I} A_i$, ou encore qu'il existe i de I, tel que $h(x)$ appartienne à A_i. Cela veut dire qu'il existe i de I, tel que x soit dans $h^{-1}(A_i)$ c'est-à-dire dans la réunion de ces ensembles. On a donc bien

$$h^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} h^{-1}(A_i)\,.$$

(d) Si l'on a, quels que soient les indices i et j de J distincts

$$B_i \cap B_j = \emptyset\,,$$

alors d'après (b)

$$\emptyset = h^{-1}(\emptyset) = h^{-1}(B_i \cap B_j) = h^{-1}(B_i) \cap h^{-1}(B_j)\,.$$

Donc les ensembles $h^{-1}(B_i)$ et $h^{-1}(B_j)$ sont disjoints.
Par ailleurs d'après (c)

$$h^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} h^{-1}(B_j)\,.$$

Donc on a bien

$$h^{-1}\left(\biguplus_{j\in J} B_j\right) = \biguplus_{j\in J} h^{-1}(B_j)\,.$$

(a) A^C est le complémentaire de A dans W. En écrivant

$$W = A \uplus A^C\,,$$

et en appliquant (d), on a

$$\Omega = h^{-1}(W) = h^{-1}(A) \uplus h^{-1}(A^C)\,.$$

Les ensembles $h^{-1}(A)$ et $h^{-1}(A^C)$ sont disjoints et ont comme réunion Ω, donc $h^{-1}(A^C)$ est le complémentaire dans Ω de $h^{-1}(A)$ c'est-à-dire

$$h^{-1}(A^C) = (h^{-1}(A))^C\,.$$

(e) Si $A \subset A'$ et si x est dans $h^{-1}(A)$, alors $h(x)$ est dans A donc dans A', donc x est dans $h^{-1}(A')$, d'où l'inclusion

$$h^{-1}(A) \subset h^{-1}(A')\,.$$

(f) On a

$$h^{-1}(A \setminus A') = h^{-1}(A \cap A'^C)\,.$$

Donc en appliquant (b)

$$h^{-1}(A \setminus A') = h^{-1}(A) \cap h^{-1}(A'^C)\,,$$

puis en appliquant (a)

$$h^{-1}(A \setminus A') = h^{-1}(A) \cap (h^{-1}(A'))^C\,,$$

c'est-à-dire

$$h^{-1}(A \setminus A') = h^{-1}(A) \setminus h^{-1}(A')\,.$$

2. Par définition de $\mathbb{P}_h$ et puisque $\mathbb{P}$ est une probabilité, l'application $\mathbb{P}_h$ est définie sur $\mathcal{P}(\Omega')$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Puisque $h^{-1}(\Omega') = \Omega$, on a

$$\mathbb{P}_h(\Omega') = \mathbb{P}(h^{-1}(\Omega')) = \mathbb{P}(\Omega) = 1\,.$$

Enfin si A et B sont deux sous-ensembles disjoints de Ω',

$$\mathbb{P}_h(A \uplus B) = \mathbb{P}(h^{-1}(A \uplus B)) = \mathbb{P}(h^{-1}(A)) \uplus \mathbb{P}(h^{-1}(B)) .$$

Mais comme $\mathbb{P}$ est une probabilité c'est une fonction additive et

$$\mathbb{P}(h^{-1}(A)) \uplus \mathbb{P}(h^{-1}(B)) = \mathbb{P}(h^{-1}(A)) + \mathbb{P}(h^{-1}(B) = \mathbb{P}_h(A) + \mathbb{P}_h(B) .$$

On a donc obtenu

$$\mathbb{P}_h(A \uplus B) = \mathbb{P}_h(A) + \mathbb{P}_h(B) ,$$

ce qui montre que $\mathbb{P}_h$ est additive.

L'application $\mathbb{P}_h$ est bien une probabilité sur Ω'.

41 Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Quelle est l'image de $\mathbb{P}$ par l'application constante k de Ω sur $\{0\}$?

2. Si $\mathbb{P}$ est la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$, quelle est l'image de $\mathbb{P}$ par l'application h définie sur Ω par $h(\omega) = \omega^2$?

Solution

1. Il n'y a que deux sous-ensembles de $\{0\}$, et l'on a

$$\mathbb{P}_k(\{0\}) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_k(\emptyset) = 0 .$$

2. On a

$$\Omega' = h(\Omega) = \{0, 1\} .$$

Puisque la loi est uniforme sur Ω, on a

$$\mathbb{P}(\{-1\}) = \mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{3} .$$

Alors

$$\mathbb{P}_h(\{0\}) = \mathbb{P}(h^{-1}(0)) = \mathbb{P}(\{0\}) = \frac{1}{3} ,$$

et

$$\mathbb{P}_h(\{1\}) = \mathbb{P}(h^{-1}(1)) = \mathbb{P}(\{-1, 1\}) = \frac{2}{3} .$$

II - Variables aléatoires

42 On tire au hasard, l'une après l'autre et sans remise, deux cartes d'un jeu de cartes dans lequel on n'a laissé que les dames et les rois. On choisit comme univers l'ensemble Ω de tous les arrangements de deux cartes possibles et on note X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire « couleur de la première (resp. seconde) carte tirée ».
1. L'événement aléatoire $\{X_1 \text{ est rouge}\}$ est-il la paire $\{\text{cœur,carreau}\}$?
2. Préciser les événements aléatoire $\{X_2 = \text{ cœur}\}$, $\{X_1 = X_2 = \text{pique}\}$, $\{X_1 = X_2\}$.

Solution

1. La réponse est NON. L'événement $\{X_1 \text{ est rouge}\}$ est constitué des couples (A, B) où A et un carreau ou un cœur. Il y a donc 4 possibilités pour A, et B peut prendre une des 7 autres valeurs. L'événement contient 28 éléments.

2. L'événement $\{X_2 = \text{cœur}\}$ est constitué des couples (A, B) où B et un cœur. Il y a donc 2 possibilités pour B, et A peut prendre une des 7 autres valeurs. Donc le nombre d'éléments est 14. Ce sont les éléments suivants

$$(D_{\text{pique}}, D_{\text{cœur}}), (D_{\text{carreau}}, D_{\text{cœur}}), (D_{\text{trèfle}}, D_{\text{cœur}}), (R_{\text{pique}}, D_{\text{cœur}}),$$

$$(R_{\text{carreau}}, D_{\text{cœur}}), (R_{\text{trèfle}}, D_{\text{cœur}}), (R_{\text{cœur}}, D_{\text{cœur}}), (D_{\text{cœur}}, R_{\text{cœur}}),$$

$$(D_{\text{pique}}, R_{\text{cœur}}), (D_{\text{carreau}}, R_{\text{cœur}}), (D_{\text{trèfle}}, R_{\text{cœur}}),$$

$$(R_{\text{pique}}, R_{\text{cœur}}), (R_{\text{carreau}}, R_{\text{cœur}}), (R_{\text{trèfle}}, R_{\text{cœur}}) .$$

L'événement $\{X_1 = X_2 = \text{pique}\}$ est constitué des éléments suivants

$$(D_{\text{pique}}, R_{\text{pique}}), (R_{\text{pique}}, D_{\text{pique}}) .$$

L'événement $\{X_1 = X_2\}$ est constitué des éléments suivants

$$(D_{\text{pique}}, R_{\text{pique}}), (R_{\text{pique}}, D_{\text{pique}}), (D_{\text{cœur}}, R_{\text{cœur}}), (R_{\text{cœur}}, D_{\text{cœur}}) .$$

$$(D_{\text{carreau}}, R_{\text{carreau}}), (R_{\text{carreau}}, D_{\text{carreau}}), (D_{\text{trèfle}}, R_{\text{trèfle}}), (R_{\text{trèfle}}, D_{\text{trèfle}}) .$$

43 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même univers fini Ω muni de la probabilité $\mathbb{P}$, f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, A et B deux parties finies de $\mathbb{R}$. Montrer que,

1. $\mathbb{P}(X \le 0) + \mathbb{P}(X \ge 0) = 1 + \mathbb{P}(X = 0)$

2. $\mathbb{P}(X \notin A) = 1 - \sum_{x\in A} \mathbb{P}(X = x)$

3. $\mathbb{P}(X \in A / X \in B) = \dfrac{\sum_{x\in A\cap B} \mathbb{P}(X = x)}{\sum_{x\in B} \mathbb{P}(X = x)}$ si $\mathbb{P}(X \in B) > 0$

4. $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y)$

5. $\mathbb{P}(X \in A \text{ et } Y \in B) = \sum_{(x,y)\in A\times B} \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y)$

6. $\mathbb{P}(Y \ge X \ge 0) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x\ge 0}} \left[\sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y\ge x}} \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) \right]$

7. $\mathbb{P}(Y = f(X)) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \mathbb{P}(X=x)\neq 0}} \mathbb{P}(X = x) \left[\sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y=f(x)}} \mathbb{P}(Y = y / X = x) \right]$

$\boxed{\textit{Solution}}$

Notons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$.

Si U est inclus dans Ω, remarquons que puisque l'événement $\{x \in U\}$ est la réunion disjointes des événements $\{X = x\}$ lorsque x appartient à U, on aura

$$\mathbb{P}(X \in U) = \sum_{x\in U} \mathbb{P}(X = x)\,.$$

On applique cette propriété dans ce qui suit.

On rappelle aussi que si U et V sont inclus dans Ω

$$\mathbb{P}(X \in U \text{ et } X \in V) = \mathbb{P}(X \in (U \cap V))\,,$$

$$\mathbb{P}(X \in U \text{ ou } X \in V) = \mathbb{P}(X \in (U \cup V))\,,$$

etc...

EI 46

1. On a

$$\mathbb{P}(X \leq 0 \text{ ou } X \geq 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) + \mathbb{P}(X \geq 0) - \mathbb{P}(X \leq 0 \text{ et } X \geq 0)\,,$$

Mais

$$\{X \leq 0\} \text{ ou } \{X \geq 0\} = \Omega \quad \text{et} \quad \{X \leq 0\} \text{ et } \{X \geq 0\} = \{X = 0\}\,,$$

donc

$$1 = \mathbb{P}(X \leq 0) + \mathbb{P}(X \geq 0) - \mathbb{P}(X = 0)\,,$$

ce qui donne la formule voulue.

2. En calculant la probabilité de l'événement contraire, on a

$$\mathbb{P}(x \notin A) = 1 - \mathbb{P}(x \in A) = 1 - \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)\,.$$

3. En utilisant la définition de la probabilité conditionnelle, et les propriétés rappelées au début, on obtient immédiatement

$$\mathbb{P}(X \in A / X \in B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A \text{ et } X \in B)}{\mathbb{P}(x \in B)} = \frac{\mathbb{P}(X \in (A \cap B))}{\mathbb{P}(X \in B)} = \frac{\displaystyle\sum_{x \in A \cap B} \mathbb{P}(X = x)}{\displaystyle\sum_{x \in B} \mathbb{P}(X = x)}$$

4. Comme $\{(X = x_j)\}_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements aléatoires, on a (formule des probabilités totales)

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i \text{ et } Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y)\,.$$

5. L'événement $\{X \in A \text{ et } Y \in B\}$ est la réunion disjointe des événements $\{X = x \text{ et } Y = y\}$, pour tous les couples (x, y) d'éléments de $A \times B$. Cela donne immédiatement 5.

6. On a par définition

$$\{Y \geq X \geq 0\} = \{\omega \in \Omega \,|\, Y(\omega) \geq X(\omega) \geq 0\}\,.$$

On peut écrire cet ensemble comme réunion disjointe :

$$\{Y \geq X \geq 0\} = \biguplus_i \left(\biguplus_j \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_i\,,\ Y(\omega) = y_j\,, y_j \geq x_i \geq 0\} \right)\,,$$

c'est-à-dire encore

$$\begin{aligned} \{Y \geq X \geq 0\} &= \biguplus_{x_i \geq 0} \left(\biguplus_{y_j \geq x_i} \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_i\,,\ Y(\omega) = y_j\} \right) \\ &= \biguplus_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq 0}} \left[\biguplus_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ y \geq x}} \{X = x \text{ et } Y = y\} \right]. \end{aligned}$$

Donc, puisque les réunions sont disjointes

$$\mathbb{P}(Y \geq X \geq 0) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x\geq 0}} \left[\sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y\geq x}} \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) \right] .$$

7. Comme dans 6. on a

$$\begin{aligned} \{f(X) = Y\} &= \{\omega \in \Omega \,|\, f(X(\omega)) = Y(\omega)\} \\ &= \biguplus_{(i,j)} \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_i\,,\ Y(\omega) = y_j\,,\ f(x_i) = y_j\} \\ &= \biguplus_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \mathbb{P}(X=x)\neq 0}} \left[\biguplus_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y=f(x)}} \{X = x \text{ et } Y = y\} \right] . \end{aligned}$$

Donc, puisque les réunions sont disjointes

$$\mathbb{P}(f(X) = Y) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \mathbb{P}(X=x)\neq 0}} \left[\sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y=f(x)}} \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) \right]$$

et en utilisant les probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}(f(X) = Y) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \mathbb{P}(X=x)\neq 0}} \left[\sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y f(x)}} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y/X = x) \right] ,$$

et finalement

$$\mathbb{P}(Y = f(X)) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \mathbb{P}(X=x)\neq 0}} \mathbb{P}(X = x) \left[\sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y=f(x)}} \mathbb{P}(Y = y/X = x) \right] .$$

44 On lance quatre fois une pièce juste et on note X la variable aléatoire « nombre de séquences pile-face obtenues ». Par exemple, si on obtient successivement : pile, pile, face, pile, X prend la valeur 1 ; si on obtient successivement : face, pile, pile, pile, X prend la valeur 0 ; si on obtient successivement : pile, face, pile, face, X prend la valeur 2. Déterminer la loi de probabilité de X.

Solution

Si l'on prend pour Ω l'ensemble des quadruplets $\{P, F\}^4$, on a

$$|\Omega| = 2^4 .$$

On a alors

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\} .$$

Il y a une seule manière d'avoir deux séquences pile-face : $\{X=2\}=\{PFPF\}$. Donc

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{16}\,.$$

Cherchons le nombre de manières de ne pas avoir de séquence pile-face. Les F doivent sortir avant les P. Il y a 5 cas possibles

$$\{X=0\}=\{FFFF, FFFP, FFPP, FPPP, PPPP\}\,.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{5}{16}\,.$$

Alors

$$\mathbb{P}(X=1)=1-\mathbb{P}(X=0)-\mathbb{P}(X=2)=\frac{5}{8}\,.$$

45 On lance un dé juste, au plus cinq fois, en s'arrêtant (éventuellement) dès qu'on a obtenu un 6. et on note Y la variable aléatoire « nombre de lancers effectués ». Déterminer la loi de probabilité de Y.

$\boxed{\textit{Solution}}$

On a $Y(\Omega)=[\![\,1,\,5\,]\!]$.

Pour $i\in[\![\,1,\,4\,]\!]$, l'événement $\{Y=i\}$ est l'événement « tirer un 6 au $i-$ème lancer et ne pas tirer un 6 aux $(i-1)$ lancers précédents », donc

$$\mathbb{P}(Y=i)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}=\frac{5^{i-1}}{6^i}\,.$$

L'événement $\{Y=5\}$ est la réunion de deux événements incompatibles :
1) « tirer un 6 au $5-$ième lancer et ne pas tirer un 6 aux 4 lancers précédents » de probabilité $\dfrac{5^4}{6^5}$,
2) « ne pas avoir obtenu de 6 sur les 5 lancers », de probabilité $\dfrac{5^5}{6^5}$.
On a donc

$$\mathbb{P}(Y=5)=\frac{5^4}{6^5}+\frac{5^5}{6^5}=\frac{5^4}{6^4}\,.$$

On peut vérifier que la somme des probabilités trouvées vaut bien 1.

46 Une population E est constituée de N individus, N_1 d'entre eux étant d'un type T.
Après avoir fixé un entier n de $[\![\,1,\,N_1\,]\!]$, on fait des tirages au hasard dans E, sans remise (un individu à la fois) jusqu'à avoir obtenu n individus de type T, et on note Z la variable aléatoire « nombre de tirages effectués ». Pour tout k de $[\![\,n,\,N\,]\!]$, on note :

$$A_{k-1}=\text{« on obtient } (n-1) \text{ fois un } T \text{ au cours des } k-1 \text{ premiers tirages » (si } n\geq 2)$$

$B_k =$ « on obtient un T au $k-$ième tirage ».

1. Déterminer $\mathbb{P}(A_{k-1})$ et $\mathbb{P}_{|A_{k-1}}(B_k)$ si $k \geq n \geq 2$.

2. Montrer que la variable Z a pour germe

$$\left\{ \left(k, \frac{\binom{k-1}{n-1}\binom{N-k}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}} \right) \mid k \in [\![n, N]\!] \right\} .$$

Solution

1. Pour calculer $\mathbb{P}(A_{k-1})$, on se trouve dans la situation d'une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(k-1, N_1, N)$ et donc

$$\mathbb{P}(A_{k-1}) = p_{n-1} = \frac{\binom{N_1}{n-1}\binom{N-N_1}{k-n}}{\binom{N}{k-1}} .$$

Après $k-1$ tirages, il reste $N-k+1$ individus et $N_1 - n + 1$ individus de type T, donc

$$\mathbb{P}_{|A_{k-1}}(B_k) = \frac{N_1 - n + 1}{N - k + 1} .$$

2. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}(A_{k-1} \cap B_k) = \mathbb{P}_{|A_{k-1}}(B_k)\mathbb{P}(A_{k-1}) \\
&= \frac{N_1 - n + 1}{N - k + 1} \frac{\binom{N_1}{n-1}\binom{N-N_1}{k-n}}{\binom{N}{k-1}} \\
&= \frac{N_1!(N-N_1)!(k-1)!(N-k+1)!(N_1-n+1)}{(n-1)!(N_1-n+1)!(k-n)!(N-N_1-k+n)!N!(N-k+1)} \\
&= \frac{N_1!(N-N_1)!(k-1)!(N-k)!}{(n-1)!(N_1-n)!(k-n)!(N-N_1-k+n)!N!} \\
&= \frac{\binom{k-1}{n-1}\binom{N-k}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}} .
\end{aligned}$$

47 Soit n nombres réels $y_1, \ldots, y_n$ en progression arithmétique et X une variable aléatoire réelle qui suit une loi $\mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$.

Montrer qu'il existe un couple (a, b) de constantes réelles telles que la variable aléatoire réelle $Y = aX+b$ suive la loi $\mathcal{U}(\{y_1, \ldots, y_n\})$.

Solution

Si r est la raison de la suite arithmétique, on a, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$y_k = r(k-1) + y_1 ,$$

Donc, si l'on pose

$$Y = r(X-1) + y_1 = rX + y_1 - r\,,$$

on obtient une variable aléatoire Y telle que

$$Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}\,,$$

avec

$$\mathbb{P}(Y = y_k) = \mathbb{P}(rX + y_1 - r = rk + y_1 - r) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}\,.$$

La variable aléatoire Y suit donc une loi uniforme sur $\{y_1 \dots, y_n\}$.

Comme $r = \dfrac{y_n - y_1}{n-1}$, on a aussi

$$Y = \frac{y_n - y_1}{n-1}X + \frac{ny_1 - y_n}{n-1}\,.$$

48 1. Déterminer la loi de probabilité de la variable $T = n - S$, où S est une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{B}(n, a)$.

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable $V = n - U$, où U est une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{H}(n, N_1, N)$.

$\boxed{\textit{Solution}}$

1. On a $S(\Omega) = [\![0,\, n]\!]$, donc également $T(\Omega) = [\![0,\, n]\!]$. Alors, si $k \in [\![0,\, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(n - S = k) = \mathbb{P}(S = n - k) = \binom{n}{n-k} a^{n-k}(1-a)^k = \binom{n}{k}(1-a)^k a^{n-k}\,.$$

Il en résulte que T suit la loi $\mathcal{B}(n, 1-a)$.

2. On a $U(\Omega) = [\![0,\, n]\!]$, donc également $V(\Omega) = [\![0,\, n]\!]$. Alors, si $k \in [\![0,\, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(V = k) = \mathbb{P}(U = n - k) = \frac{\binom{N_1}{n-k}\binom{N-N_1}{k}}{\binom{N}{n}}\,,$$

et il en résulte que V suit une loi $\mathcal{H}(n, N - N_1, N)$.

49 On tire au hasard, l'une après l'autre et avec remise, 14 cartes d'un jeu de 52 cartes. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle $T =$ « proportion de dames obtenues par rapport au nombre de cartes tirées ».

Solution

Notons U la variable aléatoire « nombre de dames obtenues ». La variable U suit une loi $\mathcal{B}(14, 1/13)$ puisque la probabilité d'apparition d'une dame est 1/13. Donc, si $k \in [\![0, 14]\!]$, on a

$$P(U = k) = \binom{14}{k} \left(\frac{1}{13}\right)^k \left(\frac{12}{13}\right)^{14-k} = \binom{14}{k} \frac{12^{14-k}}{13^{14}} .$$

La proportion de dames est donc $T = U/14$, et $T(\Omega) = \{k/14 \,|\, k \in [\![0, 14]\!]\}$. Donc, si $k \in [\![0, 14]\!]$,

$$\mathbb{P}(T = k/14) = \mathbb{P}(U = k) = \binom{14}{k} \frac{12^{14-k}}{13^{14}} .$$

On remarquera que T ne suit pas une loi binomiale, puisqu'elle ne prend pas des valeurs entières.

50 Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = |W - n|$ où W est une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{B}(2n, 1/2)$.

Solution

Puisque $W(\Omega) = [\![0, 2n]\!]$, on a $(W - n)(\Omega) = [\![-n, n]\!]$, et $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Par ailleurs, si k appartient à $[\![0, 2n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(W = k) = \frac{\binom{2n}{k}}{2^{2n}} .$$

Donc

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(|W - n| = 0) = \mathbb{P}(W = n) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} ,$$

et si k appartient à $[\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(W - n = k \text{ ou } W - n = -k) = \mathbb{P}(W = n + k \text{ ou } W = n - k) ,$$

et comme la réunion est disjointe

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(W = n + k) + \mathbb{P}(W = n - k) = \frac{\binom{2n}{n+k} + \binom{2n}{n-k}}{2^{2n}} = \frac{2 \cdot \binom{2n}{n+k}}{2^{2n}} = \frac{\binom{2n}{n+k}}{2^{2n-1}} .$$

51 Une série de trente mesures d'un caractère quantitatif a donné les résultats suivants :

x_i = valeur observée	0,00261	0,00262	0,00263	0,00264	0,00265
n_i = nombre d'observations de x_i	3	9	13	4	1

Déterminer la valeur moyenne m de cette série statistique :
1. par un calcul direct

2. en utilisant la « moyenne provisoire » $m_0 = 0,00263$, c'est-à-dire en déduisant m de la valeur moyenne m' de la série statistique des $x'_i = (x_i - m_0)10^5$ où chaque x'_i aurait été observé n_i fois.

Solution

1. On a 30 observations donc

$$m = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{5} n_i\, x_i = \frac{0,07881}{30} = 0,002627\,.$$

2. Le tableau obtenu pour x'_i devient

x'_i = valeur obtenue	-2	-1	0	1	2
n_i = nombre d'observations de x'_i	3	9	13	4	1

et donc

$$m' = \sum_{i=1}^{5} \frac{n_i}{30} = -\frac{9}{30} = (m - m_0)10^5\,.$$

On en déduit

$$m = m_0 + m'10^{-5} = 0,00263 - \frac{3}{10}\,10^{-5} = 0,00263 - 0,000003 = 0,002627\,.$$

52 Déterminer la moyenne de la loi $\mathcal{U}(\{1,\ldots,n\})$.

Solution

Puisque $\mathbb{P}(X = i) = 1/n$, pour $i \in [\![\,1,\, n\,]\!]$, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}\,.$$

53 Que représente pour une série statistique la moyenne de la loi de probabilité associée ?

Solution

C'est la moyenne arithmétique des nombres figurant dans la série (comptés avec leur multiplicité).

54 Déterminer l'espérance mathématique de chacune des variables aléatoires réelles X, Y et Z des exercices 44, 45 et 46.

$\boxed{\textit{Solution}}$

Le tableau des valeurs de X (exercice 44) est

x_i	0	1	2
p_i	5/16	5/8	1/16

Donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i\, p_i = \frac{3}{4} = 0,75\,.$$

Le tableau des valeurs de Y (exercice 45) est

y_i	1	2	3	4	5
p_i	$1/6$	$5/6^2$	$5^2/6^3$	$5^3/6^4$	$5^4/6^4$

Donc

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{5} y_i\, p_i = \frac{4651}{1296} \approx 3,59\,.$$

Pour Z (exercice 46), on a

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=n}^{N} k\,\frac{\binom{k-1}{n-1}\binom{N-k}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}}\,.$$

Mais

$$k\binom{k-1}{n-1} = n\binom{k}{n}\,,$$

donc

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=n}^{N} n\,\frac{\binom{k}{n}\binom{N-k}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}}\,.$$

En effectuant le changement d'indice de sommation $j = k+1$, on trouve

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{j=n+1}^{N+1} n\,\frac{\binom{j-1}{n}\binom{(N+1)-j}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}}\,.$$

Posons $N_1 + 1 = M_1$, $N+1 = M$ et $n+1 = p$. On a alors

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{\binom{N}{N_1}} \sum_{j=p}^{M} \binom{j-1}{p-1}\binom{M-j}{M_1-p}\,.$$

Mais d'après l'exercice 46, $\left\{\left(j, \frac{\binom{j-1}{p-1}\binom{M-j}{M_1-p}}{\binom{M}{M_1}}\right) \mid j \in \{p,\dots,M\}\right\}$ est le germe d'une probabilité $\mathbb{P}$, donc

$$\sum_{j=p}^{M} \frac{\binom{j-1}{p-1}\binom{M-j}{M_1-p}}{\binom{M}{M_1}} = 1\,,$$

soit

$$\sum_{j=p}^{M} \binom{j-1}{p-1}\binom{M-j}{M_1-p} = \binom{M}{M_1},$$

et il en résulte que

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{n\binom{M}{M_1}}{\binom{N}{N_1}} = \frac{n\binom{N+1}{N_1+1}}{\binom{N}{N_1}} = \frac{n(N+1)}{N_1+1}.$$

55 Soit S une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,a)$.

1. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $U = S(S-1)$ et en déduire celle de la variable aléatoire $V = S^2$.

2. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $W = S^3$.

Solution

1. On a

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a^k(1-a)^{n-k}.$$

Pour calculer cette somme posons

$$f(x) = (x+1-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-a)^{n-k}.$$

En dérivant deux fois, on obtient

$$f'(x) = n(x+1-a)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}(1-a)^{n-k},$$

puis

$$f''(x) = n(n-1)(x+1-a)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}(1-a)^{n-k}.$$

En particulier

$$f''(a) = n(n-1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} a^{k-2}(1-a)^{n-k},$$

et en multipliant par a^2

$$n(n-1)a^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} a^k(1-a)^{n-k}.$$

(La somme peut commencer à 0, puisque les deux premiers termes sont nuls).

On en déduit donc

$$\mathbb{E}(U) = n(n-1)a^2\,.$$

Alors, puisque $V = S^2 = U + S$, on obtient

$$\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(S) = n(n-1)a^2 + na = n^2a^2 + na(1-a)\,.$$

2. Introduisons $T = S(S-1)(S-2)$. On a

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k}a^k(1-a)^{n-k}\,.$$

En dérivant une troisième fois la fonction f, on obtient

$$f^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)(x+1-a)^{n-3} = \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k}x^{k-3}(1-a)^{n-k}\,,$$

donc

$$f^{(3)}(a) = n(n-1)(n-2) = \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k}a^{k-3}(1-a)^{n-k}\,,$$

et en multipliant par a^3

$$n(n-1)(n-2)a^3 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k}a^k(1-a)^{n-k}\,.$$

(La somme peut commencer à 0, puisque les trois premiers termes sont nuls).

On en déduit donc

$$\mathbb{E}(T) = n(n-1)(n-2)a^3\,.$$

Mais

$$T = S(S-1)(S-2) = S^3 - 3S^2 + 2S = W - 3V + 2S\,,$$

donc

$$W = T + 3V - 2S\,,$$

et l'on obtient

$$\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(T) + 3\mathbb{E}(V) - 2\mathbb{E}(S) = n(n-1)(n-2)a^3 + 3(n(n-1)a^2 + na) - 2na\,,$$

d'où

$$\mathbb{E}(W) = n(n-1)(n-2)a^3 + 3n(n-1)a^2 + na\,.$$

56 On tire au hasard des cartes d'un jeu de cartes. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire réelle X = « proportion de piques parmi les cartes tirées ».

EI 56

Solution

Notons $4N$ le nombre de cartes du jeu. Supposons tout d'abord que le nombre de cartes tirées est un nombre n fixé, et appelons X_n la variable « proportion de piques parmi les cartes tirées parmi n ».

Le nombre Y_n de piques suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, N, 4N)$, donc

$$\mathbb{E}(Y_n) = n\frac{N}{4N} = \frac{n}{4}\,.$$

et on en déduit

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = \frac{1}{4}\,.$$

Maintenant, le nombre de cartes tirées n'est plus fixé et suit une loi N. On a alors

$$\mathbb{P}(X = k/n) = \mathbb{P}((X = k/n)\,/N = n)\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(X_n = k/n)\mathbb{P}(N = n)\,.$$

Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{1\leq k\leq n\leq 4N} \frac{k}{n}\,\mathbb{P}(X_n = k/n)\mathbb{P}(N = n)\,.$$

ce que l'on peut écrire

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{4N}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\,\mathbb{P}(X_n = k/n)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{4N} \mathbb{P}(N = n)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\,\mathbb{P}(X_n = k/n)\right)\,.$$

Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{4N} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4N}\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{4}\,.$$

57 Soit Y une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{U}(\{y_1, \dots, y_n\})$ où les y_i forment une progression arithmétique. Déduire des exercices 47 et 52 une expression de $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de n, y_1 et y_n.

Solution

D'après l'exercice 47, on peut écrire

$$Y = \frac{y_n - y_1}{n-1}X + \frac{ny_1 - y_n}{n-1}\,,$$

où X suit une loi $\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$. Alors

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{y_n - y_1}{n-1}\mathbb{E}(X) + \frac{ny_1 - y_n}{n-1}\,.$$

Mais d'après l'exercice 52
$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2},$$
donc
$$\mathbb{E}(Y) = \frac{y_n - y_1}{n-1}\,\frac{n+1}{2} + \frac{ny_1 - y_n}{n-1} = \frac{y_1 + y_n}{2}.$$

58 On sait que si X est une variable aléatoire réelle et si φ est une fonction affine, $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \varphi(\mathbb{E}(X))$. A quelle condition sur la loi de probabilité de X cette égalité reste-t'elle vraie si φ est la fonction définie par $\varphi(x) = x^2$?

Solution

On a
$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$
La relation
$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \varphi(\mathbb{E}(X)),$$
est donc équivalente à
$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = 0.$$
Cela signifie que $\mathbb{P}(X \neq \mathbb{E}(X)) = 0$, c'est-à-dire que X est constante presque sûrement.

59 On a fait le relevé des notes k_i des 38 étudiants d'un groupe A et celui des notes ℓ_j des 34 étudiants d'un groupe B, et on a additionné au fur et à mesure ces notes et leurs carrés. On a obtenu :
$$\sum_{i=1}^{38} k_i = 520 \quad \sum_{j=1}^{34} \ell_j = 384 \quad \sum_{i=1}^{38} k_i^2 = 10792 \quad \sum_{j=1}^{34} \ell_j^2 = 5632.$$
La distribution des notes autour de la note moyenne du groupe est-elle plus dispersée dans le groupe A ou dans le groupe B ?

Solution

Notons N_A et N_B les variables aléatoires donnant les notes des groupes A et B respectivement. On compare les variances de ces variables aléatoires. On a
$$\mathbb{E}(N_A) = \frac{520}{38} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(N_A^2) = \frac{10\,792}{38},$$
donc
$$\mathbb{V}(N_A) = \frac{10\,792}{38} - \left(\frac{520}{38}\right)^2 = \frac{34924}{361} \approx 96,7.$$
De même
$$\mathbb{E}(N_B) = \frac{384}{34} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(N_B^2) = \frac{5\,632}{34},$$

donc
$$\mathbb{V}(N_B) = \frac{5\,632}{34} - \left(\frac{384}{34}\right)^2 = \frac{11\,008}{289} \approx 38,1\,.$$
On a donc
$$\mathbb{V}(N_B) < \mathbb{V}(N_A)\,.$$
La distribution des notes du groupe A est plus dispersée que celle du groupe B.

60 Déterminer la variance σ^2 de la loi de probabilité associée à la série statistique de l'exercice 51 :

1. par un calcul direct : $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{5}(x_i - m)^2 \frac{n_i}{30}$,
2. en utilisant la moyenne provisoire m_0, c'est-à-dire en déduisant σ^2 de la variance σ'^2 de la loi de probabilité associée à la série statistique des x'_1.

Solution

1. On a obtenu $m = 0,002627$. Le calcul de la somme donne
$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{30}\big[3(0,00261-0,002627)^2 + 9(0,00262-0,002627)^2 + 13(0,00263-0,002627)^2 \\ &\qquad +4(0,00264-0,002627)^2 + (0,00265-0,002627)^2\big] \\ &\approx 0,87666 \times 10^{-10}\,.\end{aligned}$$

2. Pour les x'_i, de moyenne $m' = -9/30$, on obtient

x'_i	-2	-1	0	1	2
x'^2_i	4	1	0	1	4
n_i	3	9	13	4	1

On en déduit que $\sum_{i=1}^{5} x'^2_i n_i = 29$, Donc
$$\sigma'^2 = \frac{29}{30} - \left(-\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{263}{300}\,.$$
Donc puisque $x_i = 10^{-5}x'_i + m_0$, on obtient
$$\sigma^2 = 10^{-10}\sigma'^2 = \frac{263}{300}\,10^{-10} \approx 0,87666 \times 10^{-10}\,.$$

61 Déterminer la variance de la loi de probabilité $\mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$.

Solution

On a
$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Donc
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}\,.$$

62 Que représente pour une série statistique la variance de la loi de probabilité associée ?

Solution

Elle représente la moyenne arithmétique des carrés des écarts de la série statistique avec la moyenne arithmétique de la série.

63 Déterminer la variance des variables aléatoires X, Y et Z des exercices 44, 45 et 46.

Solution

Le tableau des valeurs de X (exercice 44) est

x_i	0	1	2
x_i^2	0	1	4
p_i	5/16	5/8	1/16

Donc

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=0}^{3} x_i^2\, p_i = \frac{7}{8}\,.$$

et
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{7}{8} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{16} = 0,3125\,.$$

Le tableau des valeurs de Y (exercice 45) est

y_i	1	2	3	4	5
y_i^2	1	4	9	16	25
p_i	$1/6$	$5/6^2$	$5^2/6^3$	$5^3/6^4$	$5^4/6^4$

Donc

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{i=1}^{5} y_i^2\, p_i = \frac{6637}{432}\,,$$

et

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{6637}{432} - \left(\frac{4651}{1296}\right)^2 = \frac{4172855}{1679616} \approx 2,48\,.$$

Pour Z (exercice 46), on calcule tout d'abord $\mathrm{E}(Z(Z+1))$. On a

$$\mathbb{E}(Z(Z+1)) = \sum_{k=n}^{N} k(k+1)\,\frac{\binom{k-1}{n-1}\binom{N-k}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}}\,.$$

Mais

$$k(k+1)\binom{k-1}{n-1} = n(n+1)\binom{k+1}{n+1},$$

donc

$$\mathbb{E}(Z(Z+1)) = \sum_{k=n}^{N} n(n+1)\,\frac{\binom{k+1}{n+1}\binom{N-k}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}}\,.$$

En effectuant le changement d'indice de sommation $j = k+2$, on trouve

$$\mathbb{E}(Z(Z+1)) = \sum_{j=n+2}^{N+2} n(n+1)\,\frac{\binom{j-1}{n+1}\binom{(N+2)-j}{N_1-n}}{\binom{N}{N_1}}\,.$$

Posons $N_1 + 2 = M_1$, $N+2 = M$ et $n+2 = p$. On a alors

$$\mathbb{E}(Z(Z+1)) = \frac{n(n+1)}{\binom{N}{N_1}} \sum_{j=p}^{M} \binom{j-1}{p-1}\binom{M-j}{M_1-p}\,.$$

Mais d'après l'exercice 46,

$$\left\{ \left(j, \frac{\binom{j-1}{p-1}\binom{M-j}{M_1-p}}{\binom{M}{M_1}} \right) \mid j \in \{p, \dots, M\} \right\},$$

est le germe d'une probabilité $\mathbb{P}$, donc

$$\sum_{j=p}^{M} \frac{\binom{j-1}{p-1}\binom{M-j}{M_1-p}}{\binom{M}{M_1}} = 1\,,$$

soit

$$\sum_{j=p}^{M} \binom{j-1}{p-1}\binom{M-j}{M_1-p} = \binom{M}{M_1},$$

et il en résulte que

$$\mathbb{E}(Z(Z+1)) = \frac{n(n+1)\binom{M}{M_1}}{\binom{N}{N_1}} = \frac{n(n+1)\binom{N+2}{N_1+2}}{\binom{N}{N_1}} = \frac{n(n+1)(N+1)(N+2)}{(N_1+1)(N_1+2)}\,.$$

Il en résulte, en utilisant l'exercice 54, que

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z) &= \mathbb{E}(Z(Z+1)) - \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(Z)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(N+1)(N+2)}{(N_1+1)(N_1+2)} - \frac{n(N+1)}{N_1+1} - \left(\frac{n(N+1)}{N_1+1}\right)^2 \\
&= \frac{n(N+1)}{(N_1+1)^2(N_1+2)}\,(-nN + nN_1 + NN_1 + N - N_1 - N_1^2)
\end{aligned}$$

On peut écrire le dernier facteur

$$-nN + nN_1 + NN_1 + N - N_1 - N_1^2 = -[N_1^2 - ((n-1)+N)N_1 + N(n-1)]\,.$$

ce qui fait apparaître un trinôme du second degré de racines N et $n-1$, donc

$$-nN + nN_1 + NN_1 + N - N_1 - N_1^2 = -(N_1 - N)(N_1 - n + 1)\,.$$

Finalement

$$\mathbb{V}(Z) = \frac{n(N+1)(N-N_1)(N_1-n+1)}{(N_1+1)^2(N_1+2)}\,.$$

64 Soit Y une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{U}(\{y_1, \ldots, y_n\})$ où les réels y_i forment une progression arithmétique. Exprimer $\mathbb{V}(Y)$ en fonction de n, y_1 et y_n.

Solution

D'après l'exercice 47, on peut écrire

$$Y = \frac{y_n - y_1}{n-1} X + \frac{ny_1 - y_n}{n-1}\,,$$

où X suit une loi $\mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$.

Alors

$$\mathbb{V}(Y) = \left(\frac{y_n - y_1}{n-1}\right)^2 \mathbb{V}(X)\,.$$

et donc d'après l'exercice 61

$$\mathbb{V}(X) = \left(\frac{y_n - y_1}{n-1}\right)^2 \frac{n^2-1}{12} = \frac{(n+1)(y_n-y_1)^2}{12(n-1)}\,.$$

65 Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X^*, réduite d'une variable aléatoire réelle X de loi $\mathcal{B}(a)$.

Solution

Si X suit une loi $\mathcal{B}(a)$, on a $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathbb{V}(X) = a(1-a)$.
Donc
$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}} = \frac{X-a}{\sqrt{a(1-a)}}\,.$$

Lorsque $X = 1$, on a $X^* = \sqrt{\dfrac{1-a}{a}} = \alpha$

Lorsque $X = 0$, on a $X^* = -\sqrt{\dfrac{a}{1-a}} = -\dfrac{1}{\alpha}$

Donc $X^*(\Omega) = \{-1/\alpha, \alpha\}$, et
$$\mathbb{P}(X^* = \alpha) = \mathbb{P}(X=1) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X^* = -1/\alpha) = \mathbb{P}(X=0) = 1-a\,.$$

66 Calculer $\mathbb{P}(X = 30)$ si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{H}(n, N_1, 100)$ telle que $\mathbb{E}(X) = 10,2$ et $\mathbb{E}(X^2) = 108,8$.

Solution

Si l'on pose $a = N_1/N = N_1/100$, on a
$$\mathbb{E}(X) = na = 10,2 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = na(1-a)\,\frac{100-n}{99} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 4,76\,.$$

En faisant le quotient on en déduit
$$(1-a)\,\frac{100-n}{99} = \frac{4,76}{10,2}\,,$$

donc
$$100 - 100a - n + na = 99\,\frac{4,76}{10,2}\,,$$

et en remplaçant na par sa valeur, on en tire
$$n + N_1 = n + 100a = 100 + 10,2 - 99\,\frac{4,76}{10,2} = 64\,.$$

par ailleurs
$$nN_1 = 100na = 1020\,.$$

Les nombres n et N_1 sont racines du trinôme $X^2 - 64X + 1020$. Or ce trinôme a pour racines 30 et 34. On a donc deux possibilités
$$n = 30 \quad N_1 = 34 \qquad \text{ou} \qquad n = 34 \quad N_1 = 30\,.$$

Si l'on calcule la probabilité $\mathbb{P}(X = 30)$ pour la loi $\mathcal{H}(30, 34, 100)$ et pour la loi $\mathcal{H}(34, 30, 100)$, on obtient le même résultat

$$\mathbb{P}(X = 30) = \frac{\binom{34}{30}}{\binom{100}{30}} = \frac{\binom{70}{4}}{\binom{100}{34}} = \frac{34!\,70!}{4!\,100!} \approx 0,15 \times 10^{-20}\,.$$

67 Calculer $\mathbb{P}(X < \mathbb{E}(X))$ si X est une variable aléatoire de loi binomiale telle que $\mathbb{E}(X) \notin \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}(X) = 2\mathbb{V}(X)$.

Solution

Si n est entier et si $n/2$ ne l'est pas, notons α la partie entière de $n/2$. Alors

$$\alpha < \frac{n}{2} < \alpha + 1\,,$$

donc

$$2\alpha < n < 2\alpha + 2\,,$$

et comme n est entier, on en déduit

$$n = 2\alpha + 1\,.$$

Si X suit une loi $\mathcal{B}(n, a)$, on a

$$\mathbb{E}(X) = na \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = na(1 - a)\,.$$

Donc l'égalité $\mathbb{E}(X) = 2\mathbb{V}(X)$ se traduit par

$$na = 2na(1 - a)\,,$$

d'où l'on tire $a = 1/2$ et $\mathbb{E}(X) = n/2$. On a alors

$$\mathbb{P}(X < n/2) = \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{\binom{n}{k}}{2^n}\,.$$

En faisant le changement d'indice de sommation $j = n - k$, on a

$$\mathbb{P}(X < n/2) = \sum_{j=n-\alpha}^{n} \frac{\binom{n}{n-j}}{2^n}\,,$$

mais puisque $n - \alpha = \alpha + 1$,

$$\mathbb{P}(X < n/2) = \sum_{j=\alpha+1}^{n} \frac{\binom{n}{j}}{2^n}\,.$$

On a donc

$$\mathbb{P}(X < n/2) = \mathbb{P}(X > n/2)\,,$$

et puisque $\mathbb{P}(X = n/2)$ est nulle, on a

$$\mathbb{P}(X < n/2) + \mathbb{P}(X > n/2) = 1\,,$$

et on en déduit

$$\mathbb{P}(X < n/2) = \frac{1}{2}\,.$$

68 Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un univers fini $\Omega \subset \mathbb{R}$ et p un entier supérieur ou égal à 2. On dit que des réels $f_1, \dots, f_{p-1}$ sont des fractiles d'ordre p de $\mathbb{P}$ si

$$(\forall j \in [\![1,\, p-1]\!])\quad \sum_{x \le f_j} \mathbb{P}(\{x\}) \ge \frac{j}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{x \ge f_j} \mathbb{P}(\{x\}) \ge \frac{p-j}{p}\,.$$

1. Montrer que $f_1 \le \dots \le f_{p-1}$.

2. Déterminer une médiane (fractile d'ordre 2) et trois quartiles (fractiles d'ordre 4) de la loi de probabilité associée à la série statistique de l'exercice 51.

Solution

1. Supposons que l'on ait $f_j > f_{j+1}$. Alors

$$\mathbb{P}(\,]\,f_{j+1},\, f_j\,[\,) = 1 - \mathbb{P}(\,]\,-\infty,\, f_{j+1}\,] \cup [\,f_j,\, +\infty\,[\,) = 1 - (\mathbb{P}(\,]\,-\infty,\, f_{j+1}\,]\,) + \mathbb{P}(\,[\,f_j,\, +\infty\,[\,))\,.$$

Mais

$$\mathbb{P}(\,]\,-\infty,\, f_{j+1}\,]\,) = \sum_{x \le f_{j+1}} \mathbb{P}(\{x\}) \ge \frac{j+1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\,[\,f_j,\, +\infty\,[\,) = \sum_{x \ge f_j} \mathbb{P}(\{x\}) \ge \frac{p-j}{p}\,.$$

Alors

$$\mathbb{P}(\,]\,-\infty,\, f_{j+1}\,]\,) \le 1 - \frac{j+1}{p} - \frac{p-j}{p} = -\frac{1}{p} < 0\,,$$

ce qui est impossible.

2. Complétons le tableau de l'exercice 51 en y plaçant les nombres 1/4, 1/2 et 3/4.

x_i	0,00261		0,00262			0,00263			0,00264	0,00265
n_i	3		9			13			4	1
$\mathbb{P}(\{x_i\})$	3/30		9/30			13/30			4/30	1/30
$\mathbb{P}(\,]\,-\infty,\, x_i\,]\,)$	3/30	1/4	12/30	1/2	3/4	25/30			29/30	1
$\mathbb{P}(\,[\,x_i,\, +\infty\,[\,)$	1		27/30		3/4	18/30	1/2	1/4	5/30	1/30

Pour les quartiles, on cherche f_1, f_2, f_3 tels que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\,]-\infty,\, f_1\,]\,) \geq \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(\,[\,f_1,\, \infty\,[\,) \geq \frac{3}{4}\,,\\
\mathbb{P}(\,]-\infty,\, f_2\,]\,) \geq \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(\,[\,f_2,\, \infty\,[\,) \geq \frac{1}{2}\,,\\
\mathbb{P}(\,]-\infty,\, f_3\,]\,) \geq \frac{3}{4} \quad \mathbb{P}(\,[\,f_3,\, \infty\,[\,) \geq \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

On peut prendre

$$f_1 = x_2 \quad \text{et} \quad f_2 = f_3 = x_3\,.$$

De plus x_3 est également une médiane.

III - Vecteurs aléatoires

69 Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un produit cartésien fini $\Omega' \times \Omega''$.

1. Montrer que si $\mathbb{P}$ est l'équiprobabilité, les probabilités marginales $\mathbb{P}'$ et $\mathbb{P}''$ de $\mathbb{P}$ sont elles-mêmes des équiprobabilités.

2. Les probabilités $\mathbb{P}'$ et $\mathbb{P}''$ peuvent-elles êtres des équiprobabilités sans que $\mathbb{P}$ le soit ?

Solution

1. Si l'on a, pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$,

$$\mathbb{P}(\{(\omega'_i, \omega''_j)\}) = \frac{1}{mn},$$

Alors

$$\mathbb{P}'(\{\omega'_i\}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(\{(\omega'_i, \omega''_j)\}) = \frac{n}{mn} = \frac{1}{m},$$

et

$$\mathbb{P}''(\{\omega''_j\}) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(\{(\omega'_i, \omega''_j)\}) = \frac{m}{mn} = \frac{1}{n}.$$

Les probabilités marginales sont bien des équiprobabilités.

2. La réponse est NON. Prenons $\Omega' = \Omega'' = \{1, 2\}$, et posons

$$\mathbb{P}(\{(1,1)\}) = t.$$

Si l'on veut que $\mathbb{P}'$ et $\mathbb{P}''$ soient des équiprobabilités, on devra avoir

$$\mathbb{P}(\{(1,1)\}) + \mathbb{P}(\{(1,2)\}) = \mathbb{P}(\{(1,1)\}) + \mathbb{P}(\{(2,1)\}) = \frac{1}{2},$$

donc

$$\mathbb{P}(\{(1,2)\}) = \frac{1}{2} - t \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{(2,1)\}) = \frac{1}{2} - t,$$

et alors

$$\mathbb{P}(\{(2,2)\}) = \frac{1}{2} - \mathbb{P}(\{(1,2)\}) = t.$$

Il suffit de choisir t dans $]\,0,\ 1/2\,[\,\setminus\{1/4\}$ pour avoir des probabilités marginales équiprobables, sans que $\mathbb{P}$ le soit.

70 On lance un dé (juste) n fois, puis une pièce de monnaie (équilibrée) autant de fois qu'on a obtenu d'as sur le dé et on compte le nombre de *piles* obtenus. On note : $\Omega = \Omega' \times \Omega''$ où $\Omega' = \Omega'' = [\![\, 0,\ n\,]\!]$. Déterminer

1. la probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω qui modélise cette expérience,
2. les probabilités marginales $\mathbb{P}'$ et $\mathbb{P}''$,
3. les fonctions probabilités « conditionnelles » sur $[\![\, 0,\, n \,]\!]$, $\mathbb{P}'_{|j}$ et $\mathbb{P}''_{|i}$ définies par :

$$\left|\begin{array}{ll} (\forall j \in [\![\, 0,\, n \,]\!]) & \mathbb{P}'_{|j}(\{i\}) = \mathbb{P}_{|\Omega'\times\{j\}}(\{i\}\times\Omega'') \\ (\forall i \in [\![\, 0,\, n \,]\!]) & \mathbb{P}''_{|i}(\{j\}) = \mathbb{P}_{|\{i\}\times\Omega''}(\Omega'\times\{j\})\,. \end{array}\right.$$

$\boxed{\textit{Solution}}$

1. L'événement $\{(i,j)\}$ n'est possible que si $0 \leq j \leq i \leq n$. Donc, si $0 \leq i < j \leq n$, on a

$$\mathbb{P}(\{(i,j)\}) = 0\,.$$

Dans le cas où $0 \leq j \leq i \leq n$, notons
A_i l'événement « on a obtenu i as »
B_j l'événement « on a obtenu j piles ».
Alors

$$\mathbb{P}\{(i,j)\} = \mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{P}_{|A_i}(B_j)\mathbb{P}(A_i)\,.$$

Mais la probabilité $\mathbb{P}(A_i)$ est obtenue à partir d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/6)$, et la probabilité $\mathbb{P}_{|A_i}(B_j)$ est obtenue à partir d'une loi binomiale $\mathcal{B}(i, 1/2)$. Donc

$$\mathbb{P}(\{(i,j)\}) = \binom{n}{i}\frac{5^{n-i}}{6^n}\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}\,.$$

2. On a tout d'abord, si $0 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}'(\{i\}) &= \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(\{(i,j)\}) \\ &= \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{i}\frac{5^{n-i}}{6^n}\binom{i}{j}\frac{1}{2^i} \\ &= \binom{n}{i}\frac{5^{n-i}}{6^n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}\,. \end{aligned}$$

Et comme la somme vaut 1,

$$\mathbb{P}'(\{i\}) = \binom{n}{i}\frac{5^{n-i}}{6^n}\,,$$

ce qui était prévisible, puisque c'est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/6)$ déjà mentionnée.

EI 68

Si $0 \le j \le n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}''(\{j\}) &= \sum_{i=j}^{n} \mathbb{P}(\{(i,j)\})\\ &= \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i}\frac{5^{n-i}}{6^n}\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}\,.\end{aligned}$$

On a

$$\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \frac{n!}{j!(i-j)!(n-i)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\,,$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}''(\{j\}) &= \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{j}\frac{5^{n-i}}{6^n}\binom{n-j}{i-j}\frac{1}{2^i}\\ &= \binom{n}{j}\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}\frac{5^{n-i}}{6^n}\frac{1}{2^i}\,.\end{aligned}$$

En posant $k = i - j$, la somme devient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}''(\{j\}) &= \binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}\frac{5^{n-j-k}}{6^n}\frac{1}{2^{k+j}}\\ &= \binom{n}{j}\frac{1}{6^n}\frac{1}{2^j}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}5^{n-j-k}\frac{1}{2^k}\,.\end{aligned}$$

On reconnaît alors la formule du binôme, et l'on obtient

$$\mathbb{P}''(\{j\}) = \binom{n}{j}\frac{1}{6^n}\frac{1}{2^j}\left(\frac{1}{2}+5\right)^{n-j} = \binom{n}{j}\frac{11^{n-j}}{12^n}\,.$$

On a donc cette fois une loi $\mathcal{B}(n, 1/12)$.

3. On a

$$\mathbb{P}'_{|j}(\{i\}) = \mathbb{P}_{|\Omega'\times\{j\}}(\{i\}\times\Omega'') = \frac{\mathbb{P}((\{i\}\times\Omega'')\cap(\Omega'\times\{j\}))}{\mathbb{P}(\Omega'\times\{j\})} = \frac{\mathbb{P}(\{(i,j)\})}{\mathbb{P}''(\{j\})}\,.$$

Donc

$$\mathbb{P}'_{|j}(\{i\}) = \frac{\binom{n}{i}\frac{5^{n-i}}{6^n}\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}}{\binom{n}{j}\frac{11^{n-j}}{12^n}}\,.$$

Mais

$$\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \binom{n-j}{i-j}\binom{n}{j}\,,$$

donc
$$\mathbb{P}'_{|j}(\{i\}) = \binom{n-j}{i-j}\frac{2^{n-i}5^{n-i}}{11^{n-j}} = \binom{n-j}{i-j}\frac{10^{n-i}}{11^{n-j}}\,.$$
On a de manière analogue
$$\mathbb{P}''_{|i}(\{j\}) = \frac{\mathbb{P}(\{(i,j)\})}{\mathbb{P}'(\{i\})}\,.$$
Donc
$$\mathbb{P}''_{|i}(\{j\}) = \frac{\binom{n}{i}\frac{5^{n-i}}{6^n}\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}}{\binom{n}{i}\frac{5^{n-i}}{6^n}} = \binom{i}{j}\frac{1}{2^i}\,.$$

71 Une secrétaire très étourdie glisse trois lettres qui ne diffèrent que par le nom de leur destinataire dans les trois dernières enveloppes qui lui restent puis cachète les enveloppes avant d'y coller les timbres et les trois étiquettes portant les adresses.
On note :
E = « la lettre tapée la première parvient à son destinataire »
F_j = « exactement j lettres parviennent à leur destinataire ».
Pour chaque indice j, étudier :
1. l'incompatibilité des événements aléatoires E et F_j,
2. l'indépendance des événements aléatoires E et F_j.

Solution

Numérotons 1, 2, 3 les lettres. Nous avons les six possibilités suivantes, notées sous forme de triplet,
$$\Omega = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,3,1),(2,1,3),(3,1,2),(3,2,1)\}\,.$$
Chaque événement élémentaire a comme probabilité 1/6. On a alors

$E = \{(1,2,3),(1,3,2)\}$	$\mathbb{P}(E) = 1/3$
$F_1 = \{(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3)\}$	$\mathbb{P}(F_1) = 1/2$
$F_2 = \emptyset$	$\mathbb{P}(F_2) = 0$
$F_3 = \{(1,2,3)\}$	$\mathbb{P}(F_3) = 1/6$

On a également

$E \cap F_1 = \{(1,3,2)\}$	$\mathbb{P}(E \cap F_1) = 1/6$	$\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F_1) = 1/6$
$E \cap F_2 = \emptyset$	$\mathbb{P}(E \cap F_2) = 0$	$\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F_2) = 0$
$E \cap F_3 = \{(1,2,3)\}$	$\mathbb{P}(E \cap F_3) = 1/6$	$\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F_3) = 1/18$

1. On constate que E et F_2 sont incompatibles, mais que E et F_1 et E et F_3 ne le sont pas.

2. On constate donc que E et F_1 sont indépendants, ainsi que E et F_2, mais pas E et F_3.

72 Soit A et B deux événements aléatoires associés à un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Montrer que

$$A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow A^C \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow A \perp\!\!\!\perp B^C \Leftrightarrow A^C \perp\!\!\!\perp B^C\,.$$

$\boxed{\textit{Solution}}$

Cela résulte de l'exercice 25. On a toujours

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &= -\mathbb{P}(A^C \cap B) + \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B)\\ &= -\mathbb{P}(A\cap B^C) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^C)\\ &= \mathbb{P}(A^C\cap B^C) - \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B^C)\,.\end{aligned}$$

Donc, lorsque un de ces nombres est nul, les quatre le sont.

73 Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements aléatoires. Montrer que

$$(\forall J \subset [\![1,\, n]\!])\,(\{A_1, \dots, A_n\} \perp\!\!\!\perp \Leftrightarrow \{A'_1, \dots, A'_n\} \perp\!\!\!\perp)$$

où l'on a noté, pour tout j,

$$A'_j = \begin{cases} A_j & \text{si } j \in J \\ A_j^C & \text{si } j \notin J\,. \end{cases}$$

$\boxed{\textit{Solution}}$

On montre tout d'abord que

$$\{A_1, \dots, A_n\} \perp\!\!\!\perp \Rightarrow \{A_1, \dots, A_{n-1}, A_n^C\} \perp\!\!\!\perp\ .$$

Soit $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_p}\}$ un sous-ensemble non vide de $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_p}\cap A_n^C) &= \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_p}) - \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_p}\cap A_n)\\ &= \mathbb{P}(A_{i_1})\cdots\mathbb{P}(A_{i_p}) - \mathbb{P}(A_{i_1})\cdots\mathbb{P}(A_{i_p})\mathbb{P}(A_n)\\ &= (1-\mathbb{P}(A_n))\mathbb{P}(A_{i_1})\cdots\mathbb{P}(A_{i_p})\\ &= \mathbb{P}(A_{i_1})\cdots\mathbb{P}(A_{i_p})\mathbb{P}(A_n^C)\,.\end{aligned}$$

Si maintenant $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_p}\}$ un sous-ensemble non vide de $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}$, alors

$$\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_p}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\cdots\mathbb{P}(A_{i_p})\,.$$

Donc, pour tout sous ensemble non vide $\{A'_{i_1}, \dots, A'_{i_p}\}$ de $\{A_1, \dots, A_{n-1}, A_n^C\}$, on a

$$\mathbb{P}(A'_{i_1}\cap\cdots\cap A'_{i_p}) = \mathbb{P}(A'_{i_1})\cdots\mathbb{P}(A'_{i_p})\,.$$

Ceci montre que $\{A_1, \dots, A_{n-1}, A_n^C\} \perp\!\!\!\perp$.

Donc si l'on a une famille d'événements indépendants, on obtient une nouvelle famille d'événements indépendants en remplaçant un des événements par l'événement contraire. Une récurrence immédiate, montre que cela reste vrai si l'on remplace un nombre fini d'événements par les événements contraires. Donc

$$(\forall J \subset [\![1,\, n]\!])\,(\,\{A_1, \dots, A_n\}\ \perp\!\!\!\perp \Rightarrow \{A'_1, \dots, A'_n\}\ \perp\!\!\!\perp\,)\,.$$

Et comme $(A^C)^C = A$, on a également

$$(\forall J \subset [\![1,\, n]\!])\,(\,\{A'_1, \dots, A'_n\}\ \perp\!\!\!\perp \Rightarrow \{A_1, \dots, A_n\}\ \perp\!\!\!\perp\,)\,,$$

d'où l'équivalence.

74 Lors de trois donnes (= répartition au hasard de 52 cartes entre les 4 joueurs) successives d'une partie de bridge, on note I_k, R, S et T les événements aléatoires suivants :
I_k = « le nombre total de cartes rouges dans le jeu du donneur au cours de la $k-$ième donne est impair »
R= « le nombre total de cartes rouges dans le jeu du donneur au cours des deux premières donnes est impair »
S= « le nombre total de cartes rouges dans le jeu du donneur au cours des deux dernières donnes est impair »
T= « le nombre total de cartes rouges dans le jeu du donneur au cours des première et dernière donnes est impair »
Les événements R, S et T sont-ils indépendants ? Sont-ils indépendants deux à deux ?

Solution

Calculons la probabilité de I_k (elle ne dépend pas de k). Cherchons tout d'abord la probabilité p_r d'obtenir r cartes rouges au cours d'une donne. Cela revient à choisir 13 cartes parmi 52 et à regarder le nombre de cartes rouges obtenu. On a donc une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(13, 26, 52)$, et

$$p_r = \frac{\binom{26}{r}\binom{26}{13-r}}{\binom{52}{13}}\,.$$

Alors

$$\mathbb{P}(I_k) = \sum_{s=0}^{6} p_{2s+1} = \sum_{s=0}^{6} \frac{\binom{26}{2s+1}\binom{26}{12-2s}}{\binom{52}{13}}\,.$$

Si l'on fait le changement d'indice de sommation $t = 6 - s$, on obtient

$$\mathbb{P}(I_k) = \sum_{t=0}^{6} \frac{\binom{26}{13-2t}\binom{26}{2t}}{\binom{52}{13}} = \sum_{t=0}^{6} p_{2t} = 1 - \mathbb{P}(I_k)\,.$$

Il en résulte donc que $\mathbb{P}(I_k) = 1/2$.

On a alors

$$R = (I_1 \cap I_2^C) \uplus (I_2 \cap I_1^C)\,,$$

et comme les événements I_1 et I_2 sont indépendants, on a

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(I_1)\mathbb{P}(I_2^C) + \mathbb{P}(I_2)\mathbb{P}(I_1^C) = \frac{1}{2}\,.$$

On a pour les mêmes raisons

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(T) = \frac{1}{2}\,.$$

Notons n_i le nombre de cartes rouges obtenu à la $i-$ème donne. Il n'est pas possible que les trois nombres $n_1 + n_2$, $n_2 + n_3$ et $n_1 + n_3$ soient tous impairs. Si par exemple $n_1 + n_2$ et $n_2 + n_3$ étaient impairs, alors la somme $n_1 + n_3 + 2n_2$ serait paire et $n_1 + n_3$ aussi. Donc $R \cap S \cap T = \emptyset$, et

$$\mathbb{P}(R \cap S \cap T) = 0 \neq \mathbb{P}(R)\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(T)\,.$$

Les événements R, S, T ne sont pas indépendants.

On a

$$R \cap S = (I_1 \cap I_2^C \cap I_3) \uplus (I_1^C \cap I_2 \cap I_3^C)\,,$$

et comme les événements I_1, I_2, I_3 sont indépendants

$$\mathbb{P}(R \cap S) = \mathbb{P}(I_1)\mathbb{P}(I_2^C)\mathbb{P}(I_3) + \mathbb{P}(I_1^C)\mathbb{P}(I_2)\mathbb{P}(I_3^C) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(R)\mathbb{P}(S)\,,$$

ce qui montre que R et S sont indépendants. Par symétrie du problème, il en est de même pour les événements S, T et R, T.

75 Cent urnes, numérotées de 0 à 99, contiennent chacune 99 boules indiscernables au toucher. Pour tout i, l'urne numéro i contient i boules rouges et $99 - i$ boules blanches. On choisit au hasard une des cent urnes et on y fait cinq tirages au hasard d'une boule **avec remise**. On constate que les cinq tirages ont tous amené une boule rouge. Déterminer la probabilité p que les trois tirages suivants (toujours avec remise) donnent également des boules rouges.

Solution

Soit X la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne choisie. Le choix étant fait au hasard, on a donc

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{100}\,.$$

Soit R_k l'événement « le $k-$ième tirage donne une boule rouge », et S_k l'événement

$$S_k = \bigcap_{j=1}^{k} R_j\,.$$

On cherche la probabilité

$$p = \mathbb{P}_{|S_5}(R_6 \cap R_7 \cap R_8) = \frac{\mathbb{P}(S_8)}{\mathbb{P}(S_5)}\,.$$

Comme les événement $\{\{X=i\} \mid 0 \leq i \leq 99\}$ forment un système complet, on a, si $0 < k \leq 99$,

$$\mathbb{P}(S_k) = \sum_{i=0}^{99} \mathbb{P}_{|\{X=i\}}(S_k)\mathbb{P}(X=i) = \frac{1}{100} \sum_{i=0}^{99} \mathbb{P}_{|\{X=i\}}(S_k)\,.$$

Mais les événements R_k sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}_{|\{X=i\}}$ et ont la même probabilité. Sachant que l'urne contient i boules rouges, la probabilité de tirer une boule rouge est de $i/99$, donc

$$\mathbb{P}_{|\{X=i\}}(R_k) = \frac{i}{99} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{|\{X=i\}}(S_k) = \left(\frac{i}{99}\right)^k .$$

Finalement

$$\mathbb{P}(S_k) = \sum_{i=0}^{99} \left(\frac{i}{99}\right)^k ,$$

et

$$p = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{99} \left(\frac{i}{99}\right)^8}{\displaystyle\sum_{i=1}^{99} \left(\frac{i}{99}\right)^5} = \frac{1}{99^3} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{99} i^8}{\displaystyle\sum_{i=1}^{99} i^5} .$$

76 On dispose de r boules identiques qu'on répartit au hasard dans n boîtes dont n_1 sont de couleur c_1, n_2 d'une autre couleur c_2,..., n_d d'une autre couleur c_d (où $n_1 + \cdots + n_d = n$).

1. On procède d'une façon qui garantisse l'équiprobabilité sur l'ensemble des répartitions possibles (deux répartitions ne diffèrent donc que par le nombre de boules dans au moins une des n boîtes). Pour tout k, on note $X_k =$ « nombre de boules en tout dans des boîtes de la couleur c_k ». Déterminer la loi de probabilité du vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_d)$ ainsi que les lois marginales.
2. Mêmes questions si les boules sont numérotées de 1 à r (ce qui oblige à distinguer deux répartitions qui ne diffèrent que par les numéros de boules).
3. Mêmes questions si chaque boîte ne peut contenir qu'une boule au plus. (Les boules sont encore numérotées).

Solution

1. Si l'on place a boules dans q boîtes, et si l'on note a_i le nombre de boules de la boîte i, on a $a_1 + \cdots + a_q = a$. Le nombre de façon de placer les boules est le nombre de façons d'écrire l'entier a comme somme de q entiers naturels. Ce nombre vaut $\binom{a+q-1}{a}$ (voir l'exercice 17).

L'univers Ω est constitué des façons de placer r boules dans n boîtes, et donc

$$\operatorname{card} \Omega = \binom{n+r-1}{n} ,$$

On cherche $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d)$. Cette probabilité est nulle si $x_1 + \cdots + x_d$ est différent de r. Dans le cas contraire, cherchons le nombre de façons d'obtenir cet événement.
Il y a $\binom{n_j+x_j-1}{n_j}$ façons de remplir les n_j boîtes de couleur c_j avec les x_j boules. Donc

$$\mathrm{card}(\{X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d\}) = \prod_{j=1}^{d} \binom{n_j + x_j - 1}{n_j},$$

et on en déduit

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\prod_{j=1}^{d} \binom{n_j + x_j - 1}{n_j}}{\dbinom{n+r-1}{r}} & \text{si } x_1 + \cdots + x_d = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On étudie la variable X_i. Plutôt que de calculer

$$\mathbb{P}(X_j = x_j) = \sum_{x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_d} \mathbb{P}(X = (x_1, \ldots, x_d)),$$

on peut obtenir directement le nombre d'éléments de l'événement $\{X_j = x_j\}$. Il y a $\binom{n_j+x_j-1}{n_j-1}$ façons de placer x_j boules dans les n_j boîtes de couleur c_j et $\binom{n-n_j+r-x_j-1}{n-n_j-1}$ façons de placer les $r - x_j$ boules restantes dans les $n - n_j$ autres boîtes. Donc

$$\mathrm{card}\{X_j = x_j\} = \binom{n_j + x_j - 1}{n_j - 1}\binom{n - n_j + r - x_j - 1}{n - n_j - 1},$$

et

$$\mathbb{P}(X_j = x_j) = \frac{\binom{n_j+x_j-1}{n_j-1}\binom{n-n_j+r-x_j-1}{n-n_j-1}}{\binom{n+r-1}{n}}.$$

2. Remarquons tout d'abord que le nombre de façons de placer p objets distincts dans q boîtes est q^p, puisque pour chaque objet, il y a q façons de choisir la boîte qui le contient.

L'univers Ω est encore constitué des choix de r boules parmi n boîtes mais cette fois les boules sont numérotées. Donc

$$\mathrm{card}\,\Omega = n^r.$$

De nouveau $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d) = 0$ si $x_1 + \cdots + x_d \neq r$. Dans le cas contraire cherchons $\mathrm{card}(\{X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d\})$. Pour la couleur c_1, on choisit x_1 boules parmi r, il y a donc $\binom{r}{x_1}$ possibilités, et pour chacun de ces choix, il y a $n_1^{x_1}$ manières de placer les x_1 boules dans les n_1 boîtes.

Pour la couleur c_2, on choisit x_2 boules parmi les $r - x_1$ restantes. Il y a donc $\binom{r-x_1}{x_2}$ possibilités, et pour chacun de ces choix, il y a $n_2^{x_2}$ manières de placer les x_2 boules dans les n_2 boîtes.

De manière générale, pour la couleur c_j, on choisit x_j boules parmi les $r - x_1 - \cdots - x_{j-1}$ restantes. Il y a donc $\binom{r-x_1-\cdots-x_{j-1}}{x_j}$ possibilités, et pour chacun de ces choix, il y a $n_j^{x_j}$ manières de placer les x_j boules dans les n_j boîtes. Donc

$$\mathrm{card}(\{X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d\}) = \prod_{j=1}^{d} \left[\binom{r - x_1 - \cdots - x_{j-1}}{x_j} n_j^{x_j} \right] .$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d) &= \frac{\prod_{j=1}^{d} \left[\binom{r - x_1 - \cdots - x_{j-1}}{x_j} n_j^{x_j} \right]}{n^r} \\ &= \prod_{j=1}^{d} \left[\binom{r - x_1 - \cdots - x_{j-1}}{x_j} \left(\frac{n_j}{n} \right)^{x_j} \right] . \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\prod_{j=1}^{d} \binom{r - x_1 - \cdots - x_{j-1}}{x_j} = \frac{r!}{x_1! \cdots x_d!} .$$

On note ce nombre $\binom{r}{x_1,\ldots,x_d}$ que l'on appelle un coefficient multinomial car il apparaît dans le développement d'une somme de d termes à la puissance r

$$(a_1 + \ldots + a_d)^r = \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_d \\ x_1+\cdots+x_d=r}} \binom{r}{x_1, \ldots, x_d} a_1^{x_1} \cdots a_d^{x_d} ,$$

qui généralise la formule du binôme.

Pour déterminer $\mathrm{card}(\{X_j = x_j\})$ on choisit x_j boules parmi r, il y a donc $\binom{r}{x_j}$ possibilités, et pour chacun de ces choix, il y a $n_j^{x_j}$ manières de placer les x_j boules dans les n_j boîtes, et il y a $(n-n_j)^{r-x_j}$ manières de placer les $r - x_j$ autres boules parmi les $n - n_j$ autres boîtes. Donc

$$\mathrm{card}(\{X_j = x_j\}) = \binom{r}{x_j} n_j^{x_j} (n - n_j)^{r-x_j} ,$$

et

$$\mathbb{P}(X_j = x_j) = \frac{\binom{r}{x_j} n_j^{x_j} (n - n_j)^{r-x_j}}{n^r} = \binom{r}{x_j} \left(\frac{n_j}{n} \right)^{x_j} \left(1 - \frac{n_j}{n} \right)^{r-x_j} .$$

Donc X_j suit une loi binomiale $\mathcal{B}(r, n_j/n)$.

3. Dans cette situation chaque boîte contient 0 ou 1 boule et, nécessairement $r \leq n$. L'univers Ω est constitué des différentes façons de choisir les r boîtes contenant une boule parmi n en tenant compte de l'ordre, donc

$$\operatorname{card} \Omega = \mathrm{A}_n^r .$$

Cherchons maintenant $\operatorname{card}(\{X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d\})$, avec $x_1 \leq n_1, \ldots, x_d \leq n_d$ et $x_1 + \cdots + x_d = r$. (Les probabilités sont nulles si une de ces relations n'est pas vérifiée). Pour la couleur c_1, on choisit x_1 boules parmi r, il y a donc $\binom{r}{x_1}$ possibilités, et pour chacun de ces choix, il y a $\mathrm{A}_{n_1}^{x_1}$ façons de choisir les boîtes dans lesquelles iront ces x_1 boules.

Pour la couleur c_2, on choisit x_2 boules parmi les $r - x_1$ restantes. Il y a donc $\binom{r-x_1}{x_2}$ possibilités, et pour chacun de ces choix, il y a $\mathrm{A}_{n_2}^{x_2}$ façons de choisir les boîtes dans lesquelles iront ces x_2 boules.

De manière générale, pour la couleur c_j, on choisit x_j boules parmi les $r - x_1 - \cdots - x_{j-1}$ restantes. Il y a donc $\binom{r-x_1-\cdots-x_{j-1}}{x_j}$ possibilités, et pour chacun de ces choix, il y a $\mathrm{A}_{n_j}^{x_j}$ façons de choisir les boîtes dans lesquelles iront ces x_j boules.

Alors

$$\operatorname{card}(\{X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d\}) = \prod_{j=1}^{d} \left[\binom{r - x_1 - \cdots - x_{j-1}}{x_j} \mathrm{A}_{n_j}^{x_j} \right] .$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d\}) &= \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{d} \left[\binom{r - x_1 - \cdots - x_{j-1}}{x_j} \mathrm{A}_{n_j}^{x_j} \right]}{\mathrm{A}_n^r} \\
&= \frac{r!}{x_1! \cdots x_d!} \frac{n_1!}{(n_1 - x_1)!} \cdots \frac{n_d!}{(n_d - x_d)!} \frac{(n-r)!}{n!} \\
&= \frac{\binom{n_1}{x_1} \cdots \binom{n_d}{x_d}}{\binom{n}{r}} .
\end{aligned}$$

Pour déterminer $\operatorname{card}(\{X_j = x_j\})$ on choisit x_j boules parmi r, il y a donc $\binom{r}{x_j}$ possibilités, et pour chacun de ces choix, il y a $\mathrm{A}_{n_j}^{x_j}$ manières de choisir les boîtes qui les contiennent, et il y a $\mathrm{A}_{n-n_j}^{r-x_j}$ manières de choisir parmi les $n - n_j$ autres boîtes celles qui contiennent les $r - x_j$ autres boules. Donc

$$\operatorname{card}(\{X_j = x_j\}) = \binom{r}{x_j} \mathrm{A}_{n_j}^{x_j} \mathrm{A}_{n-n_j}^{r-x_j} ,$$

et

$$\mathbb{P}(X_j = x_j) = \frac{\binom{r}{x_j} \mathrm{A}_{n_j}^{x_j} \mathrm{A}_{n-n_j}^{r-x_j}}{\mathrm{A}_n^r} = \frac{\binom{n_j}{x_j} \binom{n-n_j}{r-x_j}}{\binom{n}{r}} .$$

Donc X_j suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(r, n_j, n)$.

77 On lance simultanément deux pièces de monnaie (équilibrées) et on note $(X, Y) =$ (nombre de « piles » obtenus, nombre de « faces » obtenus).
Déterminer la loi de probabilité de chacune des variables aléatoires réelles

$$X \quad , \quad Y \quad , \quad X+Y \quad , \quad X-Y \quad , \quad \frac{X-Y+2}{2} \,.$$

$\boxed{\textit{Solution}}$

Le vecteur (X, Y) est défini sur l'ensemble $\{P, F\} \times \{P, F\}$ et prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$.
On a

$$\{X = 0, Y = 2\} = \{(F, F)\} \quad , \quad \{X = 2, Y = 0\} = \{(P, P)\} \,,$$

donc

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = \frac{1}{4} \,.$$

On a également

$$\{X = 1, Y = 1\} = \{(P, F), (F, P)\} \,,$$

donc

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{2} \,.$$

Les autres probabilités sont nulles.

On a alors $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = 1/4 \\ \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/2 \\ \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = 1/4 \end{aligned}$$

On remarque que $X+Y = 2$, donc $X+Y$ est une variable certaine. (Il en résulte que $\mathbb{P}(X+Y = 2) = 1$ et $\mathbb{P}(X + Y = k) = 0$ si $k \neq 2$).

On a $(X - Y)(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$, et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X - Y = -2) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = 1/4 \\ \mathbb{P}(X - Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/2 \\ \mathbb{P}(X - Y = 2) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = 1/4 \end{aligned}$$

On a $((X - Y + 2)/2)(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X - Y + 2)/2 = 0) = \mathbb{P}(X - Y = -2) = 1/4 \\ \mathbb{P}((X - Y + 2)/2 = 1) = \mathbb{P}(X - Y = 0) = 1/2 \\ \mathbb{P}(X - Y + 2)/2 = 2) = \mathbb{P}(X - Y = 2) = 1/4 \end{aligned}$$

On obtient la même loi que pour X, ce qui est normal puisque $Y = 2 - X$ presque sûrement.

78 On lance deux dés équilibrés, l'un noir et l'autre blanc, chacun ayant six faces dont deux sont marquées d'un seul point, deux de deux points et les deux autres de trois points. On note

$X =$ nombre de points sur le dé noir	$Y =$ nombre de points sur le dé blanc
$R = \|X - Y\|$	$S = X + Y$
$T = (X + Y)^2$	$U = X^2 + Y^2$
$V = \min(X, Y)$	$W = \max(X, Y)$

1. Déterminer la loi de probabilité du couple aléatoire (X, Y).
2. En déduire celle de V et W.
3. Déduire la loi de (V, W) de celle de (X, Y) et retrouver les lois de V et W comme lois marginales.
4. Calculer $\mathbb{E}(V)$ et $\mathbb{E}(W)$ sans utiliser, les résultats des questions 2 et 3.
5. Exprimer R et S en fonction de V et W et en déduire $\mathbb{E}(R)$ et $\mathbb{E}(S)$.

Solution

1. Si (i, j) appartient à $[\![1, 3]\!] \times [\![1, 3]\!]$, les événements $\{X = i\}$ et $\{Y = j\}$ sont indépendants et ont une probabilité égale à $1/3$, donc

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{9}\,.$$

2. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V = 1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 3) + \\ &\qquad \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 1) = \frac{5}{9}\end{aligned}$$

puis

$$\mathbb{P}(V = 2) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) = \frac{1}{3}$$

et enfin

$$\mathbb{P}(V = 3) = \mathbb{P}(X = 3, Y = 3) = \frac{1}{9}\,.$$

De même

$$\mathbb{P}(W = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{9}$$

puis

$$\mathbb{P}(W = 2) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{3}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W = 3) &= \mathbb{P}(X = 3, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 3) + \\ &\qquad \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 3) = \frac{5}{9}\end{aligned}$$

3. Comme on a $V \leq W$, on a donc, si $i > j$, $\mathbb{P}(V = i, W = j) = 0$.

Supposons $1 \leq i \leq j \leq 3$. On a, si $i \neq j$,

$$\mathbb{P}(V = i, W = j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j) + \mathbb{P}(X = j, Y = i) = \frac{2}{9}\,,$$

et

$$\mathbb{P}(V = i, W = i) = \mathbb{P}(X = i, Y = i) = \frac{1}{9}\,.$$

La loi de (V, W) peut se représenter par la matrice triangulaire

$$\begin{bmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}\,,$$

ce qui en sommant les lignes redonne la loi de W, et en sommant les colonnes celles de V.

$$\begin{bmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5/9 \\ 3/9 \\ 1/9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/9 & 3/9 & 5/9 \end{bmatrix}$$

4. On a

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ 1 \leq i \leq 3}} \min(i, j)\, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{9} \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ 1 \leq i \leq 3}} \min(i, j)\,.$$

On décompose cette somme en trois morceaux suivant que $i = j$, $i > j$ ou $i < j$.

$$\mathbb{E}(V) = \frac{1}{9} \left(\sum_{i=1}^{3} i + \sum_{i=2}^{3} \sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=2}^{3} \sum_{i=1}^{j-1} i \right)\,,$$

les deux dernières sommes ont la même valeur par symétrie, et

$$\mathbb{E}(V) = \frac{1}{9} \left(6 + \sum_{i=2}^{3} i(i-1) \right) = \frac{14}{9}\,.$$

On calcule de la même manière pour W.

$$\mathbb{E}(W) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ 1 \leq i \leq 3}} \max(i, j)\, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{9} \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ 1 \leq i \leq 3}} \max(i, j)\,.$$

D'où

$$\mathbb{E}(W) = \frac{1}{9} \left(\sum_{i=1}^{3} i + \sum_{i=2}^{3} \sum_{j=1}^{i-1} i + \sum_{j=2}^{3} \sum_{i=1}^{j-1} j \right)\,,$$

les deux dernières sommes ont la même valeur par symétrie, et

$$\mathbb{E}(W) = \frac{1}{9}\left(6 + 2\sum_{i=2}^{3} i(i-1)\right) = \frac{22}{9}\,.$$

5. On a $R = W - V$ et $S = W + V$, d'où

$$\mathbb{E}(R) = \mathbb{E}(W) - \mathbb{E}(V) = \frac{8}{9} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(W) + \mathbb{E}(V) = 4\,.$$

79 Soit n, N_1, N trois entiers naturels non nuls tels que $N_1 \leq N$, $(a_{j,k})$ une suite double de nombres réels choisis dans $[\,0,\,1\,]$ et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\{0,1\}^n$ tel que

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{X_1} = \mathcal{B}(N_1/N) \\ (\forall (j,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N})\, \mathbb{P}(X_{j+1} = 1 \mid X_1 + \cdots + X_j = k) = a_{j,k}\,. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probabilité de $X_1 + \cdots + X_n$ dans les deux cas suivants :

(a) $$a_{j,k} = \begin{cases} \dfrac{N_1}{N} & \text{si } j \geq 1 \text{ et } 0 \leq k \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) $$a_{j,k} = \begin{cases} \dfrac{N_1 - k}{N - j} & \text{si } 1 \leq j \leq N-1\,,\ 0 \leq k \leq N_1 \text{ et } 0 \leq j - k \leq N - N_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Retrouver ainsi les moyennes des lois $\mathcal{B}(n, N_1/N)$ et $\mathcal{H}(n, N_1, N)$.

$\boxed{\textit{Solution}}$

Notons $Z_n = X_1 + \cdots + X_n$. Comme les variables X_i ne prennent que les valeurs 0 et 1, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n = n) &= \mathbb{P}(Z_{n-1} = n-1, X_n = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 1 | Z_{n-1} = n-1)\mathbb{P}(Z_{n-1} = n-1) \\ &= a_{n-1,n-1}\mathbb{P}(Z_{n-1} = n-1)\,, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n = 0) &= \mathbb{P}(Z_{n-1} = 0, X_n = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 0 | Z_{n-1} = 0)\mathbb{P}(Z_{n-1} = 0) \\ &= (1 - a_{n-1,0})\mathbb{P}(Z_{n-1} = 0)\,, \end{aligned}$$

et enfin, si $1 \leq k \leq n-1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n = k) &= \mathbb{P}(Z_{n-1} = k-1, X_n = 1) + \mathbb{P}(Z_{n-1} = k, X_n = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 1 | Z_{n-1} = k-1)\mathbb{P}(Z_{n-1} = k-1) + \mathbb{P}(X_n = 0 | Z_{n-1} = k)\mathbb{P}(Z_{n-1} = k) \\ &= a_{n-1,k-1}\mathbb{P}(Z_{n-1} = k-1) + (1 - a_{n-1,k})\mathbb{P}(Z_{n-1} = k)\,. \end{aligned}$$

(a) Notons $a = N_1/N$. On a donc les trois relations suivantes

$$\mathbb{P}(Z_n = n) = a\mathbb{P}(Z_{n-1} = n-1) \tag{1}$$
$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = (1-a)\mathbb{P}(Z_{n-1} = 0) \tag{2}$$
$$\mathbb{P}(Z_n = k) = a\mathbb{P}(Z_{n-1} = k-1) + (1-a)\mathbb{P}(Z_{n-1} = k) \tag{3}$$

On déduit immédiatement de (1) que

$$\mathbb{P}(Z_n = n) = a^{n-1}\mathbb{P}(Z_1 = 1) = a^{n-1}\mathbb{P}(X_1 = 1) = a^n ,$$

et de (2)

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = (1-a)^{n-1}\mathbb{P}(Z_1 = 0) = (1-a)^{n-1}\mathbb{P}(X_1 = 0) = (1-a)^n .$$

On montre par récurrence sur n, que, Z_n suit une loi $\mathcal{B}(n, a)$ c'est-à-dire que pour tout k compris entre 0 et n, on a

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} .$$

C'est vrai si $n = 1$, puisque $Z_1 = X_1$ suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(a) = \mathcal{B}(1, a)$.

Supposons la propriété vraie au rang $n-1$, et montrons qu'elle est vraie au rang n. Alors en utilisant (3) et l'hypothèse de récurrence, on a, si k est compris entre 1 et $n-1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_n = k) &= a\binom{n-1}{k-1} a^{k-1}(1-a)^{n-k} + (1-a)\binom{n-1}{k} a^k (1-a)^{n-k-1} \\
&= \binom{n-1}{k-1} a^k (1-a)^{n-k} + \binom{n-1}{k} a^k (1-a)^{n-k} \\
&= a^k (1-a)^{n-k} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) ,
\end{aligned}$$

Mais en utilisant la formule de récurrence liant les coefficients binomiaux

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = a^k (1-a)^{n-k} \binom{n}{k} .$$

Comme on a aussi

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = (1-a)^n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z_n = n) = a^n ,$$

on a donc bien montré que, pour tout k compris entre 0 et n,

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} .$$

et la propriété est vraie au rang n. Il en résulte qu'elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

Donc Z_n suit une loi $\mathcal{B}(n,a)$. Alors

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{P}(X_i = 1 | Z_{i-1} = k)\mathbb{P}(Z_{i-1} = k)\,,$$

mais, puisque

$$\mathbb{P}(X_i = 1 | Z_{i-1} = k) = a\,,$$

on obtient

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = a \sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{P}(Z_{i-1} = k) = a\,.$$

Les variables X_i suivent toutes des lois de Bernoulli $\mathcal{B}(a)$. Alors

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j) = \sum_{j=1}^{n} a = na\,.$$

(b) On va montrer, là aussi par récurrence, que si $1 \leq n \leq N$, alors Z_n suit une loi $\mathcal{H}(n, N_1, N)$.

C'est vrai si $n = 1$, puisque $Z_1 = X_1$ suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(N_1/N) = \mathcal{H}(1, N_1, N)$.

Supposons donc que $2 \leq n \leq N$. Et étudions les différents cas suivants.

$\boxed{1 \leq k \leq N_1, \text{ et } 1 \leq n-k \leq N-N_1}$

En utilisant la formule

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = a_{n-1,k-1}\mathbb{P}(Z_{n-1} = k-1) + (1 - a_{n-1,k})\mathbb{P}(Z_{n-1} = k)\,,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_n = k) &= \frac{N_1 - k + 1}{N - n + 1} \frac{\binom{N_1}{k-1}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n-1}} + \left(1 - \frac{N_1 - k}{N - n + 1}\right) \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-1-k}}{\binom{N}{n-1}} \\
&= \frac{N_1 - k + 1}{N - n + 1} \frac{\binom{N_1}{k-1}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n-1}} + \frac{N - n + 1 - N_1 + k}{N - n + 1} \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-1-k}}{\binom{N}{n-1}}\,.
\end{aligned}$$

Mais en utilisant la relation

$$(p-q)\binom{p}{q} = (q+1)\binom{p}{q+1}\,,$$

on en déduit

$$(N_1 - k + 1)\binom{N_1}{k-1} = k\binom{N_1}{k}$$

$$(N - n + 1)\binom{N}{n-1} = n\binom{N}{n}$$

$$(N-N_1-(n-k-1))\binom{N-N_1}{n-k-1} = (n-k)\binom{N-N_1}{n-k}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n = k) &= \frac{k\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{n\binom{N}{n}} + \frac{(n-k)\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{n\binom{N}{n}} \\ &= \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}}\,.\end{aligned}$$

$\boxed{k=n}$

$$P(Z_n = n) = a_{n-1,n-1}\mathbb{P}(Z_{n-1} = n-1) = a_{n-1,n-1}\,\frac{\binom{N_1}{n-1}}{\binom{N}{n-1}}\,,$$

d'où l'on déduit, si $n-1 \leq N_1$,

$$\mathbb{P}(Z_n = n) = \frac{N_1-n+1}{N-n+1}\frac{\binom{N_1}{n-1}}{\binom{N}{n-1}} = \frac{\binom{N_1}{n}}{\binom{N}{n}}\,.$$

et si $n-1 > N_1$,

$$\mathbb{P}(Z_n = n) = 0 = \frac{\binom{N_1}{n}}{\binom{N}{n}}\,.$$

$\boxed{k=0}$

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = (1-a_{n-1,0})\mathbb{P}(Z_{n-1} = 0) = (1-a_{n-1,0})\,\frac{\binom{N-N_1}{n-1}}{\binom{N}{n-1}}\,,$$

d'où l'on déduit, si $n-1 \leq N-N_1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n = 0) &= \left(1-\frac{N_1}{N-n+1}\right)\frac{\binom{N-N_1}{n-1}}{\binom{N}{n-1}} \\ &= \frac{N-N_1-n+1}{N-n+1}\,\frac{\binom{N-N_1}{n-1}}{\binom{N}{n-1}} \\ &= \frac{\binom{N-N_1}{n-N_1}}{\binom{N}{n}}\,,\end{aligned}$$

et si $n-1 > N-N_1$,

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = 0 = \frac{\binom{N-N_1}{n-N_1}}{\binom{N}{n}}\,.$$

Finalement, pour tout k entre 0 et N_1, tel que $n-k$ soit compris entre 0 et $N-N_1$ on a obtenu

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}}\,.$$

La variable Z_n suit bien une loi $\mathcal{H}(n, N_1, N)$, et la propriété est vraie au rang n. Elle est donc vraie pour tout $n \leq N$.

Calculons maintenant $\mathbb{P}(X_i = 1)$. On a toujours

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{P}(X_i = 1 | Z_{i-1} = k)\mathbb{P}(Z_{i-1} = k)\,,$$

donc

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{N_1 - k}{N - i + 1}\,\frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{i-1-k}}{\binom{N}{i-1}}\,.$$

Mais

$$(N_1 - k)\binom{N_1}{k} = N_1\binom{N_1 - 1}{k} \quad \text{et} \quad (N - (i-1))\binom{N}{i-1} = N\binom{N-1}{i-1}\,,$$

donc

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{N_1}{N}\,\frac{\binom{N_1-1}{k}\binom{N-N_1}{i-1-k}}{\binom{N-1}{i-1}} = \frac{N_1}{N}\sum_{k=0}^{i-1} \frac{\binom{N_1-1}{k}\binom{N-N_1}{i-1-k}}{\binom{N-1}{i-1}}\,.$$

Mais la somme qui apparaît est celle des coefficients d'une loi $\mathcal{H}(i-1, N_1, N-1)$ et vaut 1. Finalement

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{N_1}{N}\,.$$

Les variables X_i suivent toutes des lois de Bernoulli $\mathcal{B}(N_1/N)$. Alors

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{N_1}{N} = \frac{nN_1}{N}\,.$$

80 Soit (X, Y) un couple de variables indépendantes de même loi $\mathcal{U}(\{z_1, \ldots, z_n\})$ où les z_i sont n réels distincts. Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X \geq Y)$.

Solution

Puisque les variables sont indépendantes et de même loi uniforme,

$$\mathbb{P}(X = z_i, Y = z_j) = \mathbb{P}(X = z_i)\mathbb{P}(Y = z_j) = \frac{1}{n^2}\,.$$

On peut supposer que les nombres $z_1, \ldots, z_n$ sont ordonnés en croissant. On a alors

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = z_k, Y = z_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\,,$$

puis

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \mathbb{P}(X = z_i, Y = z_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}\,.$$

81 Soit $\{(x_i, p_i) \mid i \in [\![1, n]\!] \}$ le germe d'une loi de probabilité $\mathcal{V}$. Montrer que si (X, Y) est un couple de variables indépendants de loi $\mathcal{V}$, alors

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)\,.$$

Solution

Puisque les variables sont indépendantes et de même loi, on a

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = x_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = x_j) = p_i p_j\,.$$

Alors

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i, Y = x_i) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2\,.$$

Mais

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_i\,,$$

donc

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)\,.$$

82 Peut-on truquer un dé (à six faces, marquées 1,2,. . . ,6) de façon que la somme des points obtenus en deux lancers de ce dé suive une loi uniforme ?

Solution

Il s'agit de voir si l'on peut trouver 6 nombres positifs p_i pour $1 \leq i \leq 6$ de somme 1, tels que, si X et Y suivent la loi $\mathcal{V}$ de germe $\{(i, p_i) \mid i \in [\![1, n]\!] \}$ et sont indépendantes, alors $X + Y$ suit une loi uniforme. On a $(X + Y)(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et l'on voudrait que, si $2 \leq k \leq 12$,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \frac{1}{11}\,.$$

On a de plus
$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) = p_i p_j\,.$$

En calculant $\mathbb{P}(X+Y=k)$, on obtient un système (non linéaire) de 11 équations à 6 inconnues. Ecrivons seulement les premières et les dernières.

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}(X+Y=2) = p_1^2 \\ \mathbb{P}(X+Y=3) = 2p_1p_2 \\ \mathbb{P}(X+Y=4) = 2p_1p_3 + p_2^2 \\ \mathbb{P}(X+Y=10) = 2p_4p_6 + p_5^2 \\ \mathbb{P}(X+Y=11) = 2p_5p_6 \\ \mathbb{P}(X+Y=12) = p_6^2 \end{array}$$

En raison de la symétrie du problème, on aura $p_k = p_{7-k}$. On trouve successivement
$$p_1 = p_6 = \frac{1}{\sqrt{11}}\,,$$
$$p_2 = p_5 = \frac{1}{2p_1}\,\frac{1}{11} = \frac{1}{2\sqrt{11}}\,,$$
$$p_3 = p_4 = \frac{1}{2p_1}\left(\frac{1}{11} - p_2^2\right) = \frac{\sqrt{11}}{2}\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{44}\right) = \frac{3}{8\sqrt{11}}\,.$$
Mais alors
$$\sum_{k=1}^{6} p_i = 2(p_1+p_2+p_3) = \frac{15}{4\sqrt{11}} \neq 1\,,$$
et donc le problème est impossible.

83 Conjecturer à l'aide d'une expérience aléatoire bien choisie, puis vérifier dans le cas général que
$$\left.\begin{array}{c} X \perp\!\!\!\perp X' \\ \mathbb{P}_X = \mathcal{B}(n,a) \\ \mathbb{P}_{X'} = \mathcal{B}(n',a) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}_{X+X'} = \mathcal{B}(n+n',a)\,.$$

$\boxed{\textit{Solution}}$

On fait une expérience ne présentant que deux possibilités : réussite avec probabilité a et échec avec probabilité $1-a$, la variable X compte le nombre de réussites sur n expériences et la variable X' le nombre de réussites sur n' expériences. Alors la variables $X+X'$ donne le nombre de réussites sur $n+n'$ expériences. (Les expériences étant faites de manière indépendante).

On a $(X+X')(\Omega) = [\![\, 0,\, n+n' \,]\!]$. Si k appartient à $[\![\, 0,\, n+n' \,]\!]$, on cherche $\mathbb{P}(X+X'=k)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+X'=k) &= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j, X'=k-j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(X'=k-j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} a^j (1-a)^{n-j} \binom{n'}{k-j} a^{k-j}(1-a)^{n'-k+j} \\
&= a^k (1-a)^{n+n'-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{n'}{k-j}.
\end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{n'}{k-j} = \binom{n+n'}{k},$$

donc

$$\mathbb{P}(X+X'=k) = \binom{n+n'}{k} a^k (1-a)^{n+n'-k}.$$

Pour démontrer l'égalité

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{n'}{k-j} = \binom{n+n'}{k},$$

on peut introduire le polynôme

$$(X+1)^{n+n'} = (X+1)^n (X+1)^{n'},$$

et développer par la formule du binôme.

$$\sum_{k=0}^{n+n'} \binom{n+n'}{k} X^k = \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n'}{i} X^i\right).$$

Si l'on cherche le coefficient de X^k, on a alors

$$\binom{n+n'}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{n}{j}\binom{n'}{i} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{n'}{k-j}.$$

84 Soit $(x_i, y_j), (x_k, y_\ell)$ deux valeurs probables (distinctes) d'un couple aléatoire (X, Y). Montrer qu'il suffit que $\mathbb{P}((X,Y)=(x_i,y_\ell)) = 0$ ou $\mathbb{P}((X,Y)=(x_k,y_j)) = 0$ pour que X et Y ne soient pas indépendantes.

Solution

Par hypothèse $\mathbb{P}((X,Y)=(x_i,y_j))$ et $\mathbb{P}((X,Y)=(x_k,y_\ell))$ ne sont pas nuls. Supposons que $\mathbb{P}((X,Y)=(x_i,y_\ell))=0$ et que X et Y sont indépendantes. Alors

$$\mathbb{P}((X,Y)=(x_i,y_\ell))=\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_\ell)=0\,,$$

et un des deux nombres $\mathbb{P}(X=x_i)$, $\mathbb{P}(Y=y_\ell)$ est nul. Mais alors

$$\mathbb{P}((X,Y)=(x_i,y_j))=\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j)$$

et

$$\mathbb{P}((X,Y)=(x_k,y_\ell))=\mathbb{P}(X=x_k)\mathbb{P}(Y=y_\ell)\,,$$

et un de ces deux nombres est nul, d'où une contradiction. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Le raisonnement est analogue si c'est $\mathbb{P}((X,Y)=(x_k,y_j))$ qui est nul.

85 1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}10^{-i}X_i$ si $(X_1,\dots,X_n)$ est un $n-$uplet de variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{U}(\llbracket 0,\,n\rrbracket)$?

2. Soit n et r deux entiers naturels non nuls, $z_1,\dots,z_r$, des nombres réels tous distincts et $p_1,\dots,p_r$ des nombres rationnels de l'intervalle $]\,0,\,1\,[$ tels que

$$\begin{cases}\forall i\in\llbracket 1,\,r\rrbracket\,,\quad 10^n p_i\in\mathbb{N}\\[2mm] \displaystyle\sum_{i=1}^{r}p_i=1\end{cases}$$

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle Z définie sur le même univers Ω que les X_i par :

a) $\quad Z(\omega)=z_1\ \Leftrightarrow\ Y(\omega)<p_1$

b) $\quad \forall k\in\llbracket 2,\,r\rrbracket\quad Z(\omega)=z_k\ \Leftrightarrow\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}p_i\le Y(\omega)<\sum_{i=1}^{k}p_i$

Solution

1. Si l'on écrit

$$Y=\sum_{i=1}^{n}10^{-i}X_i=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}10^{n-i}X_i}{10^n}\,,$$

la somme $\sum_{i=1}^{n} 10^{n-i}X_i$ donne tous les nombres compris entre 0 et $10^n - 1$, (écriture décimale d'un nombre entier), et tous ces nombres sont distincts.

Donc

$$D = Y(\Omega) = \{p10^{-n} \mid 0 \leq p \leq 10^n - 1\}\,.$$

En particulier $\text{card}(\Omega) = 10^n$. L'ensemble D est l'ensemble des nombres décimaux ayant au plus 10 chiffres après la virgule.

Si r est un nombre de $[\![\, 0,\, 10^n - 1\,]\!]$, il s'écrit de manière unique

$$r = \sum_{i=1}^{n} 10^{n-i} r_i\,,$$

où r_i appartient à $[\![\, 0,\, 9\,]\!]$, donc

$$\mathbb{P}(Y = p10^{-n}) = \mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) = (r_1, \ldots, r_n)) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = r_i)\,,$$

et comme les lois sont uniformes, on a pour tout i,

$$\mathbb{P}(X_i = r_i) = \frac{1}{10}\,,$$

donc

$$\mathbb{P}(Y = r10^{-n}) = \frac{1}{10^n}\,.$$

La variable Y suit un loi uniforme $\mathcal{U}(D)$.

2. Si $p_i = r_i 10^{-n}$, avec $r_i \in [\![\, 0,\, 10^n - 1\,]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(Z = z_1) = \mathbb{P}(Y < p_1) = \frac{\text{card}(\,[\,0,\, p_1\,[\, \cap D)}{\text{card}\, D}\,.$$

Mais

$$\text{card}(\,[\,0,\, p_1\,[\, \cap D) = \text{card}(\,[\,0,\, r_1\,[\,) = r_1\,,$$

et donc

$$\mathbb{P}(Z = z_1) = \frac{r_1}{10^n} = p_1\,.$$

De même

$$\mathbb{P}(Z = z_r) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i \leq Y < \sum_{i=1}^{k} p_i\right) = \frac{\text{card}\left(\left[\sum_{i=1}^{k-1} p_i,\, \sum_{i=1}^{k} p_i\right[\cap D\right)}{\text{card}\, D}\,.$$

Mais

$$\text{card}\left(\left[\sum_{i=1}^{k-1} p_i,\, \sum_{i=1}^{k} p_i\right[\cap D\right) = \text{card}\left(\left[\sum_{i=1}^{k-1} r_i,\, \sum_{i=1}^{k} r_i\right[\right) = r_k\,,$$

et donc
$$\mathbb{P}(Z = z_r) = \frac{r_k}{10^n} = p_k\,.$$
Donc Z suit une loi de probabilité de germe $\{(z_k, p_k) \mid k \in [\![1, r]\!]\}$.

86 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles et $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

1. Exprimer $\mathbb{C}\mathrm{ov}(aX + b, cY + d)$ en fonction de $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$.

Solution

On a
$$aX + b - \mathbb{E}(aX + b) = a(X - \mathbb{E}(X)) \quad \text{et} \quad cY + d - \mathbb{E}(cY + d) = c(Y - \mathbb{E}(Y))\,,$$
donc
$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{ov}(aX + b, cY + d) &= \mathbb{E}((aX + b - \mathbb{E}(aX + b))(cY + d - \mathbb{E}(cY + d)))\\
&= \mathbb{E}(ac(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))\\
&= ac\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))\\
&= ac\,\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)\,.
\end{aligned}$$

87 Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives ou nulles et h une fonction croissante de $]\,0, +\infty\,[$ dans $]\,0, +\infty\,[$. Etablir l'inégalité de Markov : pour tout $\varepsilon > 0$
$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(h(X))}{h(\varepsilon)}\,.$$

Solution

Notons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. On a alors
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X)) &= \sum_{i=1}^{n} h(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)\\
&= \sum_{\{i\,|\,x_i \geq \varepsilon\}} h(x_i)\mathbb{P}(X = x_i) + \sum_{\{i\,|\,x_i < \varepsilon\}} h(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)\,.
\end{aligned}$$
Mais comme la deuxième somme est positive, on a
$$\mathbb{E}(h(X)) \geq \sum_{\{i\,|\,x_i \geq \varepsilon\}} h(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)\,.$$
Comme la fonction h est croissante, si $x_i \geq \varepsilon$, on en déduit $h(x_i) \geq h(\varepsilon)$, et donc

$$\mathbb{E}(h(X)) \geq \sum_{\{i \,|\, x_i \geq \varepsilon\}} h(\varepsilon)\mathbb{P}(X = x_i) = h(\varepsilon) \sum_{\{i \,|\, x_i \geq \varepsilon\}} \mathbb{P}(X = x_i)\,.$$

Mais

$$\sum_{\{i \,|\, x_i \geq \varepsilon\}} \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)\,,$$

d'où

$$\mathbb{E}(h(X)) \geq h(\varepsilon)\mathbb{P}(X \geq \varepsilon)\,,$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

88 (suite de l'exercice 78)

6. Vérifier que les variables (R, S) ne sont pas indépendantes mais que leur coefficient de corrélation est nul cependant.

7. Représenter par un nuage de points la loi de probabilité du couple (T, U).

8. Doit-on s'attendre à une forte corrélation linéaire entre T et U ?

9. Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression $\Delta_{U/T}$ de U en T et la représenter sur le diagramme de la question 7.

10. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\mathrm{r}_{T,U}$.
La valeur obtenue est-elle en accord avec la réponse à la question 8 de l'exercice 18 ?

Solution

6. L'événement $\{R = 0, S = 3\} = \{X = Y, X + Y = 3\} = \{X = Y = 3/2\}$ est impossible. Donc

$$\mathbb{P}(R = 0, S = 3) = 0\,.$$

Mais

$$\{R = 0\} = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \quad \text{et} \quad \{S = 3\} = \{(1,2), (2,1)\}\,.$$

Les probabilités $\mathbb{P}(R = 0)$ et $\mathbb{P}(S = 3)$ ne sont donc pas nulles et on n'a pas l'égalité

$$\mathbb{P}(R = 0, S = 3) = \mathbb{P}(R = 0)\mathbb{P}(S = 3)\,,$$

ce qui montre que R et S ne sont pas indépendantes.

On a $RS = |X^2 - Y^2|$ et cette variable aléatoire ne peut prendre que les valeurs 0, 3, 5, 8. On obtient

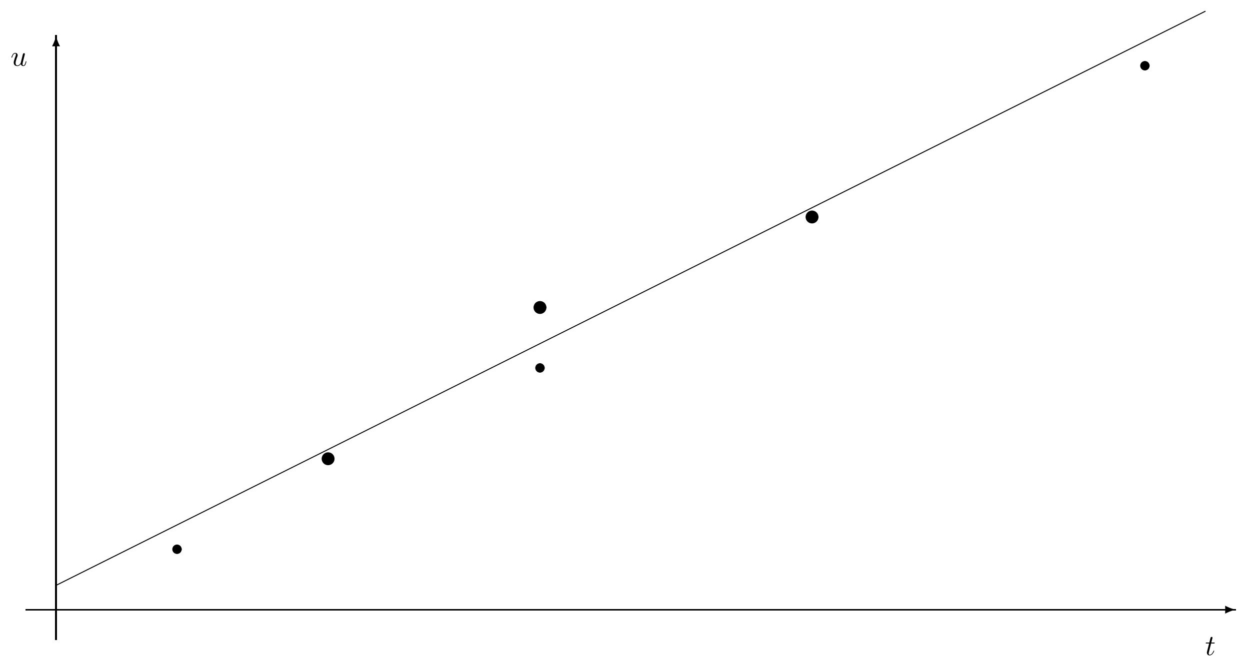
$$\{RS = 3\} = \{(2,1), (1,2)\}\,,\ \{RS = 5\} = \{(2,3), (3,2)\}\,,\ \{RS = 8\} = \{(1,3), (3,1)\}\,,$$

donc
$$\mathbb{P}(RS = 3) = \mathbb{P}(RS = 5) = \mathbb{P}(RS = 8) = \frac{2}{9}\,.$$
Alors
$$\mathbb{E}(XY) = (3+5+8)\,\frac{2}{9} = \frac{32}{9} = \frac{8}{9} \times 4 = \mathbb{E}(R)\mathbb{E}(S)\,.$$
Le coefficient de corrélation de R et S sera donc nul.

7. Calculons les probabilités $\mathbb{P}(T = i, U = j)$. On a le tableau

(i,j)	$\{T = i, U = j\}$	$\mathbb{P}(T = i, U = j)$
$(4,2)$	$\{(1,1)\}$	$1/9$
$(9,5)$	$\{(1,2),(2,1)\}$	$2/9$
$(16,10)$	$\{(1,3),(3,1)\}$	$2/9$
$(16,8)$	$\{(2,2)\}$	$1/9$
$(25,13)$	$\{(2,3),(3,2)\}$	$2/9$
$(36,18)$	$\{(3,3)\}$	$1/9$

d'où l'ensemble de points, auquel on a ajouté la droite de régression de la question 9. :



8. On doit s'attendre à une forte corrélation entre T et U car le nuage de points est très effilé.

9. L'équation de la droite de régression $\Delta_{U/T}$ est
$$u = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(T,U)}{\mathbb{V}(T)}\,t + \left(\mathbb{E}(U) - \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(T,U)}{\mathbb{V}(T)}\,\mathbb{E}(T)\right)\,.$$

On part des germes des variables T et U.

i	4	9	16	25	36
$\mathbb{P}(T=i)$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

j	2	5	8	10	13	18
$\mathbb{P}(U=j)$	1/9	2/9	1/9	2/9	2/9	1/9

On obtient successivement

$$\mathbb{E}(T) = \frac{52}{3} \ , \ \mathbb{E}(T^2) = 388 \ , \ \mathbb{V}(T) = \frac{788}{9} \, .$$

puis

$$\mathbb{E}(U) = \frac{28}{3} \, .$$

Enfin

$$\mathbb{E}(TU) = \frac{1844}{9} \ , \ \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(U) = \frac{1456}{9} \ , \ \mathbb{C}\mathrm{ov}(T,U) = \frac{388}{9} \, ,$$

donc l'équation de la droite de régression de U par rapport à T est

$$u = \frac{97}{197}\, t + \frac{472}{591} \, .$$

avec comme valeur approchée

$$u = 0,5\, t + 0,8 \, .$$

10. On a

$$\mathrm{r}_{T,U} = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(T,U)}{\sigma_U \sigma_T} \, .$$

On a déjà obtenu

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(T,U) = \frac{388}{9} \, , \ \mathbb{V}(T) = \frac{788}{9} \ , \ \mathbb{E}(U) = \frac{28}{3} \, .$$

On obtient aussi

$$\mathbb{E}(U^2) = \frac{980}{9} \, , \ \mathbb{V}(U) = \frac{196}{9} \, .$$

Donc

$$\mathrm{r}_{\,T,U} = \frac{\frac{388}{9}}{\sqrt{\frac{788}{9}}\sqrt{\frac{196}{9}}} = \frac{97}{1379}\sqrt{197} \approx 0,987 \, .$$

Ce coefficient est proche de 1, ce qui montre que les variables U et T sont très liées comme l'indiquait le nuage de points.

89 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles non dégénérées.
Montrer que la mesure de l'angle aigu que font entre elles les deux droites de régression peut servir de mesure de la corrélation linéaire entre X et Y.

EI 94

$\boxed{\textit{Solution}}$

Les équations des droites de régression sont données par

$$\begin{aligned}
\Delta_{Y/X} \ &: \ y = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{\sigma_X^2}\,x + \left(m_Y - \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{\sigma_X^2}\,m_X\right)\\
\Delta_{X/Y} \ &: \ x = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{\sigma_Y^2}\,y + \left(m_X - \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{\sigma_Y^2}\,m_Y\right)
\end{aligned}$$

donc si l'on exprime y en fonction de x pour la deuxième équation lorsque $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) \neq 0$, on obtient

$$y = \frac{\sigma_Y^2}{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}\,x - \left(m_X\,\frac{\sigma_Y^2}{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)} - m_Y\right) .$$

La tangente de l'angle que fait une droite avec Ox est le coefficient directeur de cette droite (en axes orthonormés), donc, pour la première droite

$$\tan\alpha = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{\sigma_X^2} ,$$

et pour la seconde

$$\tan\beta = \frac{\sigma_Y^2}{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)} .$$

Alors la tangente de l'angle formé par les deux droites vaut

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\
&= \frac{\dfrac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{\sigma_X^2} - \dfrac{\sigma_Y^2}{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}}{1+\dfrac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}}\\
&= \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)^2 - \sigma_X^2\sigma_Y^2}{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)} ,
\end{aligned}$$

et puisque

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = \mathrm{r}_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y ,$$

on obtient finalement

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\,\frac{\mathrm{r}_{X,Y}^2-1}{\mathrm{r}_{X,Y}} = \frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\left(\mathrm{r}_{X,Y} - \frac{1}{\mathrm{r}_{X,Y}}\right) .$$

L'angle aigu formé par les deux droites a une mesure (appartenant à l'intervalle $[\,0,\ \pi/2\,]$) donnée par

$$\theta_{X,Y} = \arctan\left|\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\left(\mathrm{r}_{X,Y} - \frac{1}{\mathrm{r}_{X,Y}}\right)\right| .$$

On remarque que

$$0 \leq \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \leq \frac{1}{2},$$

ce qui résulte du fait que $(\sigma_X - \sigma_Y)^2 \geq 0$. Ce quotient est donc borné, et $\theta_{X,Y}$ se comporte comme $\mathrm{r}_{X,Y} - \dfrac{1}{\mathrm{r}_{X,Y}}$.

Etudions les variations de la fonction f définie sur $]\,0,\,1\,[$ par

$$f(r) = r - 1/r\,.$$

On a

$$f'(r) = 1 + 1/r^2\,,$$

Donc f est strictement croissante et varie de $-\infty$ à 0. Il en résulte que $\theta_{X,Y}$ est nul si et seulement si $\mathrm{r}_{X,Y}^2 - 1 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si X et Y sont liés par une relation affine.

Si $\mathrm{r}_{X,Y}$ est nul, alors $\Delta_{Y/X}$ est parallèle à Ox, et $\Delta_{X/Y}$ est parallèle à Oy. Donc $\theta_{X,Y} = \pi/2$, ce qui est en particulier le cas lorsque X et Y sont indépendantes.

L'angle $\theta_{X,Y}$ se comporte comme $\mathrm{r}_{X,Y}^2 - 1$ et donne donc une autre façon de mesurer la corrélation entre X et Y.

90 Suite de l'exercice 86

2. On suppose que $\sigma_X\sigma_Y \neq 0$ et $ac \neq 0$. Exprimer $\mathrm{r}_{aX+b,cY+d}$ en fonction de $\mathrm{r}_{X,Y}$.

Solution

On a

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(aX+b, cY+d) = ac\,\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)\,, \mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)\,,\ \mathbb{V}(cY+d) = c^2\mathbb{V}(Y)\,,$$

donc

$$\mathrm{r}_{aX+b,cY+d} = \frac{ac\,\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{|a|\sigma_X|c|\sigma_Y} = \mathrm{sign}(ac)\,\mathrm{r}_{X,Y}\,.$$

91 Déterminer la loi de probabilité d'un couple (X,Y) de variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli de même paramètre a et telles que $\mathrm{r}_{X,Y} = r$, où r est dans $[-1,\,1]$.

Solution

Notons $u = \mathbb{P}(X=1, Y=1)$. La variable XY suit aussi une loi de Bernoulli et

$$\mathbb{P}(XY=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = u\,,$$

donc c'est une loi $\mathcal{B}(u)$. Alors
$$\mathbb{E}(XY) = u\,.$$
Comme
$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = a\,,$$
on a
$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = u - a^2\,.$$
On a également
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = a(1-a)\,,$$
donc
$$\mathrm{r}_{X,Y} = \frac{u - a^2}{a(1-a)} = r\,,$$
et l'on en déduit
$$u = ra(1-a) + a^2\,.$$
Alors
$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = a\,,$$
donc
$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = a - ra(1-a) - a^2 = a(1-a)(1-r)\,,$$
et de même par symétrie du problème
$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = a(1-a)(1-r)\,.$$
Enfin
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) &= \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) \\
&= 1 - a - a(1-a)(1-r) \\
&= (1-a)(1 - a(1-r)) \\
&= ra(1-a) + (1-a)^2\,.
\end{aligned}$$

IV - Probabilité sur un ensemble dénombrable

92 Soit Ω un univers dénombrable et $\mathbb{P}$ une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$.
Montrer que $\mathbb{P}$ est $\sigma-$additive si et seulement si

$$(\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)) \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})\,.$$

Solution

Supposons que $\mathbb{P}$ est $\sigma-$additive. Si A n'est pas vide, on a

$$A = \biguplus_{\omega \in A} \{\omega\}\,,$$

et on on aura donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})\,.$$

Réciproquement, supposons que

$$(\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)) \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})\,,$$

et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω deux à deux disjointes. On a alors

$$\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} \biguplus_{\omega\in A_n} \{\omega\}\,.$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\omega\in A_n} \mathbb{P}(\{\omega\})\,.$$

Mais, pour tout entier n,

$$\sum_{\omega\in A_n} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(A_n)\,,$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)\,,$$

ce qui montre que $\mathbb{P}$ est $\sigma-$additive.

93 Soit Ω un univers dénombrable et $\mathbb{P}$ une application additive de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$, telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité si et seulement si, pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)\,.$$

EI 98

$\boxed{\textit{Solution}}$

Si $\mathbb{P}$ est additive, c'est-à-dire si quels que soient A et B dans $\mathcal{P}(\Omega)$ incompatibles,

$$\mathbb{P}(A \uplus B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\,,$$

alors on déduit par récurrence que, si $(A_0, \ldots, A_p)$ sont deux à deux disjoints,

$$\mathbb{P}\left(\biguplus_{n=0}^{p} A_n\right) = \sum_{n=0}^{p} \mathbb{P}(A_n)\,.$$

C'est vrai de manière évidente si $p = 0$. Si la propriété est vraie au rang p alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\biguplus_{n=0}^{p+1} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(\left[\biguplus_{n=0}^{p} A_n\right] \biguplus A_{p+1}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\biguplus_{n=0}^{p} A_n\right) + \mathbb{P}(A_{p+1})\end{aligned}$$

Mais l'hypothèse de récurrence donne

$$\mathbb{P}\left(\biguplus_{n=0}^{p} A_n\right) = \sum_{n=0}^{p} \mathbb{P}(A_n)\,,$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\biguplus_{n=0}^{p+1} A_n\right) = \sum_{n=0}^{p+1} \mathbb{P}(A_n)\,,$$

et la propriété est vraie au rang $p + 1$ donc pour tout $p \geq 0$.

Supposons que, pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de Ω, on ait

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)\,.$$

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties deux à deux disjointes de Ω, posons

$$B_p = \biguplus_{n=0}^{p} A_n\,.$$

On obtient une suite croissante et

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{p=0}^{\infty} B_p\,.$$

Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=0}^{\infty} B_p\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}(B_p)\,.$$

Mais
$$\mathbb{P}(B_p) = \sum_{n=0}^{p} \mathbb{P}(A_n)\,,$$
donc
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)\,,$$
et $\mathbb{P}$ est $\sigma-$additive. Ce sera donc une probabilité.

Inversement si $\mathbb{P}$ est une probabilité, et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties de Ω, alors posons, $B_0 = A_0$, et si $n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Les ensembles B_n sont alors deux à deux disjoints et
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n\,.$$
Donc
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n)\,.$$
Mais, on a $\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(B_0)$, et puisque $A_{n-1} \subset A_n$, on a, si $n \geq 1$
$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})\,,$$
et donc on obtient une série télescopique, d'où
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})) + \mathbb{P}(A_0) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)\,.$$

94 Montrer que pour toute suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements aléatoires d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)\,.$$

Solution

Montrons tout d'abord par récurrence que, pour tout entier $p \geq 0$,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{p} E_n\right) \leq \sum_{n=0}^{p} \mathbb{P}(E_n)\,.$$

C'est vrai si $p = 0$ car on a alors égalité. Supposons la formule vraie au rang p. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{p+1} E_n\right) &= \mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{n=0}^{p} E_n\right]\bigcup E_{p+1}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{p} E_n\right) + \mathbb{P}(E_{p+1}) - \mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{n=0}^{p} E_n\right]\bigcap E_{p+1}\right)\\ &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{p} E_n\right) + \mathbb{P}(E_{p+1})\,.\end{aligned}$$

Mais l'hypothèse de récurrence donne

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{p} E_n\right) \leq \sum_{n=0}^{p} \mathbb{P}(E_n)\,,$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{p+1} E_n\right) \leq \sum_{n=0}^{p+1} \mathbb{P}(E_n)\,,$$

et la propriété est vraie au rang $p+1$ donc pour tout $p \geq 0$.

Comme la suite $\left(\bigcup_{n=0}^{p} E_n\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, on a

$$\lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{p} E_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right)\,,$$

et comme la suite $(\mathbb{P}(E_n))_{n\geq 0}$ est positive, la suite $\left(\sum_{n=0}^{p} \mathbb{P}(E_n)\right)_{p\geq 0}$ est croissante et possède une limite finie au non. Alors par passage à la limite dans les inégalités, on obtient, lorsque p tend vers l'infini

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)\,.$$

95 Montrer qu'il ne peut exister d'équiprobabilité sur un univers infini dénombrable.

Solution

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. S'il existait une équiprobabilité sur Ω, il existerait un nombre a non nul, tel que, pour tout entier i,

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = a\,,$$

mais la série de terme général $\mathbb{P}(\{\omega_i\})$ devrait converger, ce qui n'est possible que si $a = 0$. Donc il n'existe pas d'équiprobabilité sur Ω.

96 Montrer qu'à toute suite décroissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, on peut associer une unique loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ telle que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \mathbb{P}(\{n, n+1, \dots\}) = \frac{a_n}{a_0}\,.$$

Solution

Si une telle loi existe, on a alors, si $n \geq 0$

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}(\{n, n+1, \dots\}) - \mathbb{P}(\{n+1, \dots\}) = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}\,,$$

ce qui est un nombre positif. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{a_0} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1})\,,$$

et on a une série télescopique donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{a_0}\,(a_0 - \lim_{n\to\infty} a_n) = 1\,.$$

On a donc bien obtenu une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$, et c'est la seule possible.

Inversement si une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ est définie par

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}\,,$$

on a bien

$$\mathbb{P}(\{n, n+1, \dots\}) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_0} = \frac{1}{a_0}\,(a_n - \lim_{k\to\infty} a_k) = \frac{a_n}{a_0}\,.$$

97 1. Montrer que l'ensemble $\{(0,0)\} \cup \{(i, \frac{3}{\pi^2 i^2}) \mid i \in \mathbb{Z}^*\}$ est le germe d'une loi de probabilité $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{Z}$.

2. Une variable aléatoire de loi $\mathcal{V}$ possède-t-elle une espérance mathématique ?

Solution

1. On sait que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Alors
$$\sum_{i\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{i^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}\,,$$
et donc
$$\sum_{i\in\mathbb{Z}^*}\frac{3}{\pi^2 i^2}=1\,,$$
ce qui montre que l'on a bien le germe d'une probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{V}$. Comme la série de terme général $1/n$ diverge, il en résulte que la somme $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}^*}|i|\mathbb{P}(X=i)$ est infinie, et donc que X n'a pas d'espérance.

Remarque : on a pour tout n
$$\sum_{i=-n}^{n} i\mathbb{P}(X=i)=0\,,$$
mais cela ne suffit pas pour dire que l'espérance est nulle. En fait elle n'existe pas.

98 Montrer que si une variable aléatoire réelle discrète X prend toutes ses valeurs dans un intervalle fermé borné I de $\mathbb{R}$, elle possède une espérance mathématique et $\mathbb{E}(X)$ appartient à I.

Solution

Si $X(\Omega)=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$, et $I=[\,m,\,M\,]$, on a donc, pour tout entier n,
$$m\leq a_n\leq M\,,$$
et en particulier
$$|a_n|\leq K=\max(|m|,|M|)\,,$$
donc
$$|a_n|\,\mathbb{P}(X=a_n)\leq K\,\mathbb{P}(X=a_n)\,,$$
et comme la série de terme général $\mathbb{P}(X=a_n)$ converge (sa somme vaut 1), la série de terme général $a_n\mathbb{P}(X=a_n)$ converge absolument. Il en résulte que la variable aléatoire X a une espérance.

Alors, puisque l'on a pour tout $n\geq 0$,
$$m\,\mathbb{P}(X=a_n)\leq a_n\mathbb{P}(X=a_n)\leq M\,\mathbb{P}(X=a_n)\,,$$
on obtient en sommant
$$m\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=a_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathbb{P}(X=a_n)\leq M\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=a_n)\,,$$
c'est-à-dire
$$m\leq\mathbb{E}(X)\leq M\,,$$

ce qui montre que $\mathbb{E}(X)$ est dans I.

99 1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k, il existe un réel α_k tel que l'ensemble $\{(j, \frac{\alpha_k}{1+j^{2k}} \mid j \in \mathbb{Z}\}$ soit le germe d'une loi de probabilité $\mathcal{W}$.

2. Etudier, selon les valeurs de k, l'existence de l'espérance mathématique et de la variance d'une variable aléatoire réelle X de loi $\mathcal{W}$.

Solution

La série de terme général $1/(1+n^{2k})$ converge puisque

$$\frac{1}{1+n^{2k}} \sim \frac{1}{n^{2k}}\,,$$

et que la série de Riemann de terme général $1/n^{2k}$ converge si $2k > 1$, donc si $k \geq 1$. Alors, si l'on pose

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^{2k}}\,,$$

on a

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+j^{2k}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^{2k}} = 1 + 2S_k > 0\,.$$

Par suite, si l'on pose

$$\alpha_k = 1/(1+2S_k)$$

on a

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha_k}{1+j^{2k}} = 1\,.$$

2. L'espérance de X existe si et seulement si la somme $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} |j|\,\mathbb{P}(X=j)$ est finie ou encore, si et seulement si la série de terme général $\dfrac{n}{1+n^{2k}}$ converge absolument. Mais

$$\frac{n}{1+n^{2k}} \sim \frac{1}{n^{2k-1}}\,,$$

et la série converge si et seulement si $2k-1 > 1$, soit $k \geq 2$.

La variance de X existe si et seulement si l'espérance de X et celle de X^2 existent. Celle de X^2 existe si et seulement si la somme $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} j^2\,\mathbb{P}(X=j)$ est finie ou encore, si et seulement si la série de terme général $\dfrac{n^2}{1+n^{2k}}$ converge absolument. Mais

$$\frac{n^2}{1+n^{2k}} \sim \frac{1}{n^{2k-2}}\,,$$

et la série converge si et seulement si $2k-2>1$, soit encore $k \geq 2$.

Donc si $k=1$ l'espérance n'existe pas, et si $k=2$, espérance et variance existent.

100 1. Montrer qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ possède une espérance mathématique si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) < +\infty$ et que, si c'est le cas,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)\,.$$

2. En déduire un calcul de la moyenne de la loi géométrique $\mathcal{B}^{-}(a)$.

Solution

1. Puisque

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{p=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = p)\,,$$

on a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = p)\,.$$

Comme tous les termes de cette somme sont positifs, on peut intervertir les sommations et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{p} \mathbb{P}(X = p) = \sum_{p=1}^{\infty} p\,\mathbb{P}(X = p)\,.$$

On constate donc que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$ est finie si et seulement si $\sum_{p=1}^{\infty} p\,\mathbb{P}(X = p)$ est finie, c'est-à-dire si et seulement si X possède une espérance. Et dans ce cas les deux nombres sont égaux, donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)\,.$$

2. La loi $\mathcal{B}^{-}(a)$ a pour germe $\{(k, (1-a)^{k-1}a) \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. On cherche donc à calculer

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)\,.$$

Or en utilisant les séries géométriques

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{j=n}^{\infty} a(1-a)^{j-1} = a(1-a)^{n-1} \frac{1}{1-(1-a)} = (1-a)^{n-1}\,,$$

puis

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-a)^{n-1} = \frac{1}{1-(1-a)} = \frac{1}{a}\,.$$

101 On décide de jouer à pile ou face jusqu'à ce qu'on obtienne un résultat différent du précédent.
1. Quel est le « nombre moyen » de lancers à effectuer ?
2. Retrouver le résultat en utilisant les fonctions génératrices.

Solution

1. Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers effectués.

Si l'on s'est arrêté au $n-$ième lancé ($n \geq 2$), c'est que l'on a obtenu une des deux situations suivantes

$$P_1P_2\dots P_{n-1}F_n \quad \text{ou} \quad F_1F_2\dots F_{n-1}P_n\,.$$

La probabilité de chacun de ces événements est de $1/2^n$, donc, si $n \geq 2$, on a

$$\mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

Mais alors $X-1$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\mathbb{P}(X-1=n) = \mathbb{P}(X=n+1) = \frac{1}{2^n} = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}\,.$$

Donc $X-1$ suit une loi $\mathcal{B}^-(a)$ avec $a=1/2$ et son espérance vaut $1/a=2$. Donc

$$\mathbb{E}(X) = 3\,.$$

2. Posons

$$g(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^n}{2^{n-1}}\,.$$

On a

$$g(s) = s\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-1} = \frac{s^2}{2}\,\frac{1}{1-\frac{s}{2}} = \frac{s^2}{2-s}\,,$$

donc

$$g'(s) = \frac{2s(2-s)+s^2}{(2-s)^2} = \frac{4s-s^2}{(2-s)^2}\,.$$

Alors

$$\mathbb{E}(X) = g'(1) = 3\,.$$

102 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]\,0,\,1\,[$.

1. Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $s \mapsto \left[\dfrac{as}{1-(1-a)s}\right]^n$.

2. En déduire que l'ensemble $\{(k, \binom{k-1}{n-1}a^n(1-a)^{k-n} \mid k \in \{n, n+1, \ldots\}\}$ est le germe d'une loi de probabilité sur l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à n. On note cette loi $\mathcal{B}^-(n,a)$.

3. Si $n \geq 2$, étudier l'existence et déterminer éventuellement la valeur de l'espérance mathématique de $\frac{n-1}{X-1}$ si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}^-(n,a)$.

4. Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire qui ne peut que « réussir » avec la probabilité a ou « échouer » avec la probabilité $1-a$. On décide de faire des répétitions indépendantes de $\mathcal{E}$ jusqu'à ce qu'on ait obtenu n réussites.
Montrer que la variable aléatoire : X = « nombre d'essais nécessaires » suit la loi $\mathcal{B}^-(n,a)$. (Noter qu'en particulier $\mathcal{B}^-(a) = \mathcal{B}^-(1,a)$).

5. (a) Conjecturer, à l'aide d'une expérience aléatoire bien choisie que

$$\left.\begin{array}{l} X \perp\!\!\!\perp X' \\ \mathbb{P}_X = \mathcal{B}^-(n,a) \\ \mathbb{P}_{X'} = \mathcal{B}^-(n',a) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{X+X'} = \mathcal{B}^-(n+n',a)\,.$$

(b) En utilisant la relation suivante, vraie si $1 \leq n \leq m$, (voir exercice 2)

$$\binom{m}{n} = \sum_{i=n-1}^{m-1} \binom{i}{n-1},$$

montrer que

$$\left.\begin{array}{l} X \perp\!\!\!\perp Y \\ \mathbb{P}_X = \mathcal{B}^-(n,a) \\ \mathbb{P}_Y = \mathcal{B}^-(a) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{X+Y} = \mathcal{B}^-(n+1,a)\,,$$

et en déduire la preuve de la conjecture précédente.

6. Montrer que si $(X_1, \ldots, X_n)$ est un $n-$uplet de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}^-(a)$ alors

$$\mathbb{P}_{X_1+\cdots+X_n} = \mathcal{B}^-(n,a)\,,$$

et en déduire la moyenne et la variance de la loi $\mathcal{B}^-(n,a)$.

7. Déterminer la fonction génératrice de la loi $\mathcal{B}^-(n,a)$ et retrouver ainsi les résultats obtenus aux deux items précédents.

$\boxed{\textit{Solution}}$

1. En utilisant le développement de Taylor, on a, pour $|u| < 1$,

$$\begin{aligned}
(1-u)^{-n} &= 1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{-n(-n-1)\cdots(-n-j+1)}{j!}(-u)^j\\
&= 1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{n(n+1)\cdots(n+j-1)}{j!}u^j\\
&= 1+\sum_{j=1}^{\infty}\binom{n+j-1}{n-1}u^j\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n-1}u^j\,.
\end{aligned}$$

Alors

$$\left[\frac{as}{1-(1-a)s}\right]^n = a^n s^n (1-(1-a)s)^{-n}\,,$$

et d'après le calcul précédent,

$$\left[\frac{as}{1-(1-a)s}\right]^n = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n-1}a^n s^{n+j}(1-a)^j\,.$$

En effectuant le changement d'indice $k=n+j$, on obtient le développement en série entière cherché :

$$\left[\frac{as}{1-(1-a)s}\right]^n = \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k-1}{n-1}a^n s^k (1-a)^{k-n}\,.$$

2. En particulier, si $s=1$,

$$1=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k-1}{n-1}a^n(1-a)^{k-n}\,,$$

ce qui montre que l'on a bien le germe d'une loi de probabilité.

3. On a

$$\mathbb{E}\left(\frac{n-1}{X-1}\right)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{n-1}{k-1}\binom{k-1}{n-1}a^n(1-a)^{k-n}=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k-2}{n-2}a^n(1-a)^{k-n}\,.$$

Effectuons les changement de variable $K=k-1$ et $N=n-1$. On obtient

$$\mathbb{E}\left(\frac{n-1}{X-1}\right)=\sum_{K=N}^{\infty}\binom{K-1}{N-1}a^{N+1}(1-a)^{K-N}=a\sum_{K=N}^{\infty}\binom{K-1}{N-1}a^N(1-a)^{K-N}\,.$$

La somme qui apparaît à droite est la somme des coefficients de la loi $\mathcal{B}^-(N,a)$ et vaut 1. On trouve donc

$$\mathbb{E}\left(\frac{n-1}{X-1}\right)=a\,.$$

4. On a nécessairement $k \geq n$. Cherchons dans ce cas $\mathbb{P}(X = k)$. On a effectué k expériences, et $n - 1$ ont réussies sur les $k - 1$ premières expériences (la $n-$ième est nécessairement réussie), si l'on choisit les positions des expériences réussies, on a donc $\binom{k-1}{n-1}$ possibilités. La probabilité d'un de ces choix est $a^n(1-a)^{k-n}$, donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} a^n (1-a)^{k-n},$$

et l'on a bien la loi $\mathcal{B}^-(n, a)$.

5. (a) On veut avoir n réussites avec X et n' avec X', donc $X + X'$ donnera $n + n'$ réussites.

(b) Comme X prend ses valeurs dans $[n, \infty[\cap \mathbb{N}$ et Y dans $[1, \infty[\cap \mathbb{N}$, la variable $X + Y$ prend ses valeurs dans $[n+1, \infty[\cap \mathbb{N}$. Soit donc k un entier plus grand que $n + 1$. Alors

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{r=n}^{k-1} \mathbb{P}(X = r, Y = k - r),$$

et puisque $X \perp\!\!\!\perp Y$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{r=n}^{k-1} \mathbb{P}(X = r)\mathbb{P}(Y = k - r) \\
&= \sum_{r=n}^{k-1} \left[\binom{r-1}{n-1} a^n (1-a)^{r-n} \right] [a(1-a)^{k-r-1}] \\
&= a^{n+1}(1-a)^{k-(n+1)} \sum_{r=n}^{k-1} \binom{r-1}{n-1}.
\end{aligned}$$

Mais d'après la formule rappelée dans l'énoncé

$$\binom{m}{n} = \sum_{i=n-1}^{m-1} \binom{i}{n-1},$$

donc en posant $m = k - 1$ et en faisant le changement d'indice $r = i + 1$, on trouve

$$\sum_{i=n-1}^{k-2} \binom{i}{n-1} = \sum_{r=n}^{k-1} \binom{r-1}{n-1} = \binom{k-1}{n},$$

d'où

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \binom{k-1}{n} a^{n+1} (1-a)^{k-(n+1)}.$$

La variable aléatoire $X + Y$ suit donc une loi $\mathcal{B}^-(n + 1, a)$.

Supposons maintenant que

$$\begin{array}{l}
\mathbb{P}_X = \mathcal{B}^-(n, a) \\
\mathbb{P}_{Y_i} = \mathcal{B}^-(a) \text{ si } 1 \leq i \leq n' \\
\{X, Y_1, \ldots, Y_{n'}\} \perp\!\!\!\perp
\end{array}.$$

Une récurrence immédiate montre que $Y = Y_1 + \cdots + Y_{n'}$ suit une loi $\mathcal{B}(n', a)$ et que $X + Y$ suit une loi $\mathcal{B}(n + n', a)$, ce qui démontre la conjecture.

6. Il résulte de la question précédente que la somme de n variables aléatoires indépendantes X_i suivant une loi $\mathcal{B}^-(a)$ suit une loi $\mathcal{B}^-(n, a)$. Comme on a pour une des variables X_i

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_i) = \frac{1-a}{a^2},$$

on en déduit immédiatement

$$\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots \mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{a},$$

et puisque les variables sont indépendantes

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots \mathbb{V}(X_n) = \frac{n(1-a)}{a^2}.$$

7. Le calcul de la question 1. a montré que si X suit une loi $\mathcal{B}^-(n, a)$, on a

$$g_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \left[\frac{as}{1-(1-a)s}\right]^n.$$

Si X' suit une loi $\mathcal{B}^-(n', a)$, on a de même

$$g_{X'}(s) = \mathbb{E}(s^{X'}) = \left[\frac{as}{1-(1-a)s}\right]^{n'}.$$

Alors, si X et X' sont indépendantes

$$g_{X+X'}(s) = g_X(s)g_{X'}(s) = \left[\frac{as}{1-(1-a)s}\right]^{n+n'},$$

et on retrouve que $X + X'$ suit une loi $\mathcal{B}^-(n + n', a)$.

De même, si les variables X_i sont indépendantes et de même loi $\mathcal{B}^-(a)$, on a

$$g_{X_i}(s) = \frac{as}{1-(1-a)s},$$

et comme les variables sont indépendantes

$$g_{X_1+\cdots+X_n}(s) = g_{X_1}(s) \cdots g_{X_n}(s) = \left[\frac{as}{1-(1-a)s}\right]^n,$$

donc $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi $\mathcal{B}^-(n, a)$.

Pour une variable X suivant une loi $\mathcal{B}^-(n, a)$, on a

$$g_X(s) = \left[\frac{as}{1-(1-a)s}\right]^n.$$

donc en dérivant

$$g_X'(s) = n\left[\frac{as}{1-(1-a)s}\right]^{n-1}\frac{a}{(1-(1-a)s)^2}\,,$$

d'où

$$\mathbb{E}(X) = g_X'(1) = \frac{n}{a}\,.$$

Puis en dérivant une seconde fois

$$g_X''(s) = n(n-1)\left[\frac{as}{1-(1-a)s}\right]^{n-2}\frac{a^2}{(1-(1-a)s)^4} + n\left[\frac{as}{1-(1-a)s}\right]^{n-1}\frac{2a(1-a)}{(1-(1-a)s)^3}\,,$$

d'où

$$g_X''(1) = \frac{n(n-1)}{a^2} + \frac{2n(1-a)}{a^2} = \frac{n^2+n-2na}{a^2}\,.$$

Alors

$$\mathbb{V}(X) = g_X''(1) + g_X'(1) - g_X'(1)^2 = \frac{n^2+n-2na}{a^2} + \frac{n}{a} - \frac{n^2}{a^2} = \frac{n-na}{a^2}\,.$$

103 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent la même loi géométrique. Calculer $\mathbb{P}(X \geq j)$ et en déduire que la variable aléatoire $\min(X,Y)$ suit, elle-aussi, une loi géométrique.

$\boxed{\textit{Solution}}$

On a, si $j \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X \geq j) = \sum_{k=j}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=j}^{\infty} a(1-a)^{k-1} = (1-a)^{j-1}\,.$$

Posons $Z = \min(X,Y)$. Si $j \geq 1$, l'événement $\{Z=j\}$ est la réunion des événements $\{X=j, Y\geq j\}$ et $\{X \geq j, Y=j\}$, donc

$$\mathbb{P}(Z=j) = \mathbb{P}(X=j, Y\geq j) + \mathbb{P}(X\geq j, Y=j) - \mathbb{P}(X=j, Y=j)\,,$$

et comme les variables X et Y sont indépendantes

$$\mathbb{P}(Z=j) = \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y\geq j) + \mathbb{P}(X\geq j)\mathbb{P}(Y=j) - \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=j)\,,$$

ce qui donne en remplaçant

$$\mathbb{P}(Z=j) = a(1-a)^{j-1}(1-a)^{j-1} + a(1-a)^{j-1}(1-a)^{j-1} - a(1-a)^{j-1}a(1-a)^{j-1}\,,$$

donc

$$\mathbb{P}(Z=j) = (2a-a^2)(1-a)^{2j-2} = (2a-a^2)(1-(2a-a^2))^{j-1}\,.$$

La variable Z suit donc une loi $\mathcal{B}^-(2a-a^2)$.
(On remarquera que l'on a bien $0 < 2a-a^2 < 1$).

104 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On note Y une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ que X, telle que, pour tout entier naturel i,

$$\mathbb{P}(Y=j\,|X=i) = \begin{cases} \mathbb{P}(Y=j) & \text{si } |i-j|\geq 2 \\ 0 & \text{si } |i-j|=1 \\ \dfrac{\lambda^{i-1}[\lambda^2+\lambda(i+1)+i(i+1)]e^{-\lambda}}{(i+1)!} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que Y suit, elle aussi, une loi de Poisson.

Solution

On a

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y=j, X=i) = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y=j|X=i)\mathbb{P}(X=i)\,.$$

En distinguant suivant les valeurs de i

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=j) &= \sum_{i=0}^{j-2}\mathbb{P}(Y=j|X=i)\mathbb{P}(X=i)\\ &\qquad +\mathbb{P}(Y=j|X=j-1)\mathbb{P}(X=j-1)+\mathbb{P}(Y=j|X=j)\mathbb{P}(X=j)\\ &\qquad +\mathbb{P}(Y=j|X=j+1)\mathbb{P}(X=j+1)+\sum_{i=j+2}^{\infty}\mathbb{P}(Y=j|X=i)\mathbb{P}(X=i)\,.\end{aligned}$$

D'après les propriétés données dans l'énoncé

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=0}^{j-2}\mathbb{P}(Y=j)\mathbb{P}(X=i)+\mathbb{P}(Y=j|X=j)\mathbb{P}(X=j)+\sum_{i=j+2}^{\infty}\mathbb{P}(Y=j)\mathbb{P}(X=i)\,.$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=j) &= \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y=j)\mathbb{P}(X=i)\\ &= \sum_{i=0}^{j-2}\mathbb{P}(Y=j)\mathbb{P}(X=i)+\mathbb{P}(Y=j)\sum_{i=j-1}^{j+1}\mathbb{P}(X=i)+\sum_{i=j+2}^{\infty}\mathbb{P}(Y=j)\mathbb{P}(X=i)\,.\end{aligned}$$

Donc en soustrayant les deux relations précédentes, on obtient

$$0=\mathbb{P}(Y=j|X=j)\mathbb{P}(X=j)-\mathbb{P}(Y=j)\sum_{i=j-1}^{j+1}\mathbb{P}(X=i)\,,$$

d'où l'on tire

$$\mathbb{P}(Y=j) = \frac{\mathbb{P}(Y=j|X=j)\mathbb{P}(X=j)}{\displaystyle\sum_{i=j-1}^{j+1}\mathbb{P}(X=i)}\,.$$

Il reste à expliciter la formule précédente, qui va se simplifier et l'on obtient

$$\mathbb{P}(Y=j)=\frac{\dfrac{\lambda^{j-1}[\lambda^2+\lambda(j+1)+j(j+1)]e^{-\lambda}}{(j+1)!}\,\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}}{\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{j-1}}{(j-1)!}+\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}+\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{j+1}}{(j+1)!}}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}\,.$$

Donc Y suit aussi une loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

105 Calculer le moment centré d'ordre 3 d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Solution

En utilisant la fonction caractéristique

$$g(s)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k s^k}{k!}=e^{\lambda(s-1)}\,,$$

on obtient les dérivées successives dont on déduit les moments factoriels

$$\begin{array}{ll} g'(s)=\lambda e^{\lambda(s-1)} & \text{donc } g'(1)=\mathbb{E}(X)=\lambda \\ g''(s)=\lambda^2 e^{\lambda(s-1)} & \text{donc } g''(1)=\mathbb{E}(X(X-1))=\lambda^2 \\ g'''(s)=\lambda^3 e^{\lambda(s-1)} & \text{donc } g'''(1)=\mathbb{E}(X(X-1)(X-2))=\lambda^3 \end{array}$$

cela permet de calculer

$$\mathbb{E}(X^2)=\mathbb{E}(X(X-1))+\mathbb{E}(X)=\lambda^2+\lambda\,,$$

puis

$$\mathbb{E}(X^3)=\mathbb{E}(X(X-1)(X-2))+3\mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}(X)=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda\,.$$

Or

$$(X-\mathbb{E}(X))^3=X^3-3X^2\mathbb{E}(X)+3X\mathbb{E}(X)^2-\mathbb{E}(X)^3\,,$$

Donc

$$\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^3)=\mathbb{E}(X^3)-3\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X)+3\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)^2-\mathbb{E}(X)^3\,,$$

ce qui donne

$$\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^3)=\mathbb{E}(X^3)-3\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X)+2\mathbb{E}(X)^3\,,$$

donc

$$\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^3)=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda-3(\lambda^2+\lambda)\lambda+2\lambda^3=\lambda\,.$$

106 Soit d variables aléatoires indépendantes $X_1,\dots,X_d$ suivant respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$,..., $\mathcal{P}(\lambda_d)$.

1. (a) Calculer $\mathbb{P}(X_1=j|X_1+X_2=k)$ si j et k sont deux entiers tels que $k\geq j\geq 0$.

(b) Quelle est la loi de X_1 conditionnellement à $\{X_1 + X_2 = k\}$?

2. On note $S = \sum_{i=1}^{d} X_i$. Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_d)$ conditionnellement à $\{S = n\}$.

$\boxed{\textit{Solution}}$

1. (a) Si $0 \leq j \leq k$, on a, puisque X_1 et X_2 sont indépendantes,

$$\mathbb{P}(X_1 = j, X_1 + X_2 = k) = \mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k - j) = \mathbb{P}(X_1 = j)\mathbb{P}(X_2 = k - j)\,,$$

donc

$$\mathbb{P}(X_1 = j | X_1 + X_2 = k) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = j)\mathbb{P}(X_2 = k - j)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k)}\,.$$

Comme $X_1 + X_2$ suit une loi $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = j | X_1 + X_2 = k) &= \frac{\dfrac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^j}{j!}\dfrac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!}}{\dfrac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}} \\
&= \binom{k}{j}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^j \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-j}\,.
\end{aligned}$$

(b) On obtient donc une loi $\mathcal{B}(k, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$.

2. Si $k_1 + \cdots + k_d \neq n$ la probabilité $\mathbb{P}(X_1 = k_1, \ldots, X_d = k_d | S = n)$ est nulle. Dans le cas contraire, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = k_1, \ldots, X_d = k_d | S = n) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = k_1, \ldots, X_d = k_d)}{\mathbb{P}(S = n)} \\
&= \frac{\dfrac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{k_1}}{k_1!}\cdots\dfrac{e^{-\lambda_d}\lambda_d^{k_d}}{k_d!}}{\dfrac{e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_d)}(\lambda_1+\cdots+\lambda_d)^n}{n!}} \\
&= \binom{n}{k_1, \ldots, k_d}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\cdots+\lambda_d}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\lambda_d}{\lambda_1+\cdots+\lambda_d}\right)^{k_d}\,,
\end{aligned}$$

où

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_d} = \frac{n!}{k_1!\cdots k_d!}\,.$$

107 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs entières naturelles paires qui suivent la même loi de probabilité telle que

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ \mathbb{P}(X = 2k) = (k+1)\mathbb{P}(X = 2k+2)\,.$$

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle $Z = \dfrac{X+Y}{2}$.

Solution

On déduit immédiatement de la relation

$$\mathbb{P}(X = 2k+2) = \frac{\mathbb{P}(X = 2k)}{k+1}\,,$$

que, si $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X = 2k) = \frac{\mathbb{P}(X = 0)}{k!}\,.$$

Alors, si X et Y prennent des valeurs paires positives, Z prend des valeurs entières positives et, si $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X + Y = 2k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = 2i, Y = 2k - 2i)\,.$$

Comme les variables X et Y sont indépendantes et de même loi

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathbb{P}(X = 0)}{i!} \frac{\mathbb{P}(X = 0)}{(k-i)!} = \mathbb{P}(X = 0)^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!}\,.$$

Alors

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{\mathbb{P}(X = 0)^2}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = \frac{\mathbb{P}(X = 0)^2}{k!} 2^k\,,$$

et il en résulte que Z suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$, et que

$$\mathbb{P}(X = 0)^2 = e^{-2}\,,$$

donc

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-1}\,.$$

108 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements aléatoires d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ mutuellement indépendants de même probabilité non nulle.

1. On note $B_0 = \Omega$ et pour tout entier naturel n, on note $B_{n+1} = B_n \cap A_{n+1}^C$.
Montrer que la suite de terme général $\mathbb{P}(B_n)$ décroît vers 0.

2. On note E l'événement aléatoire « au moins un des A_n se réalise ».
Montrer que $\mathbb{P}(E) = 1$.

Solution

1. Posons $\mathbb{P}(A_i) = p > 0$.

On obtient immédiatement par récurrence que, si $n \geq 1$,

$$B_n = A_1^C \cap \cdots \cap A_n^C \,.$$

Comme les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants, il en est de même de $A_1^C, \ldots, A_n^C$ et

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_1^C) \cdots \mathbb{P}(A_n^C) = (1-p)^n \,,$$

et comme $0 \leq 1-p < 1$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0 \,.$$

Mais B_{n+1} est inclus dans B_n, et la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante d'événements, donc

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0 \,.$$

2. On a

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \bigcap_{n\geq 1} B_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n^C = \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)^C = E^C \,.$$

On a donc obtenu

$$\mathbb{P}(E^C) = \lim_{n\to+\infty} B_n = 0 \,,$$

et par suite $\mathbb{P}(E) = 1$.

109 Un casino propose le jeu suivant :
le joueur paie une mise de 14 € puis lance un dé autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir autre chose qu'un as. La banque lui verse alors $(5^k - 1)$ € où k est le nombre d'as obtenus.

1. Déterminer le gain net moyen du joueur et celui du casino.

2. Quelle est la probabilité que ce joueur fasse « sauter la banque » si les réserves du casino se montent à 10^7 €.

Solution

1. Le joueur gagne donc $(5^k - 1) - 14$ € s'il a tiré k as puis une autre valeur.
Si X désigne la variable aléatoire donnant le gain du joueur, cette variable prend les valeurs $5^k - 15$ pour $k \geq 0$, et

$$\mathbb{P}(X = 5^k - 15) = \frac{1}{6^k}\,\frac{5}{6} \,,$$

puisque la probabilité de tirer un as est $1/6$ et celle de tirer une autre valeur est $5/6$, les événements étant indépendants.

Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty}(5^k - 15)\mathbb{P}(X = 5^k - 15) = \sum_{k=0}^{\infty}(5^k - 15)\,\frac{5}{6^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k+1} - 75\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{6^{k+1}}\,.$$

Comme on obtient des séries géométriques, on trouve immédiatement

$$\mathbb{E}(X) = \frac{5}{6}\,\frac{1}{1-\frac{5}{6}} - \frac{75}{6}\,\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = 5 - 15 = -10\,.$$

L'espérance de gain moyen du joueur est donc de -10 € et pour la banque de 10 € .

2. La probabilité de faire sauter la banque est $\mathbb{P}(X \geq 10^7)$. Cherchons les valeurs de k pour lesquelles $5^k - 15 \geq 10^7$. On a

$$k \geq \frac{\ln(10^7 + 15)}{\ln 5} \approx 10,01\,,$$

donc $k \geq 11$. Alors

$$\mathbb{P}(X \geq 10^7) = \sum_{k=11}^{\infty}\frac{5}{6^{k+1}} = \frac{5}{6^{12}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{6^{11}}\,.$$

110 Un joueur J, passionné de « Pile ou face », a trouvé un « pigeon » P qui accepte, à condition que J lui verse d'abord 5 €, de jouer contre lui selon la règle suivante :

- à chaque partie, P devra miser la même somme que J et le gagnant de la partie empochera la mise des deux joueurs ;
- le nombre de parties n'est pas fixé à l'avance : le match durera jusqu'à ce que J décide de l'arrêter.

La tactique choisie par J est la suivante : il commence par jouer 10 € sur pile. Si pile sort, il empochera les 20 € et cessera de jouer. Sinon il aura perdu sa mise mais fera un nouveau pari sur pile en misant le double de sa mise précédente et ainsi de suite jusqu'à ce que pile sorte.

1. Quel est le nombre moyen de paris ?
2. Quelle est l'espérance de gain net de J ?
3. Quelle somme doit engager P ? Quelle somme doit pouvoir engager J ?
4. La fortune de J n'est pas infinie. Quelle est réellement l'espérance de gain de son gain ?

Solution

1. Si l'on note la suite des résultats des parties, J s'arrête au bout de n parties lorsque l'on a $FF\dots FP$, où F est sortie $n-1$ fois. On a donc

$$\mathbb{P}(FF\dots FP) = \frac{1}{2^n}\,.$$

La variable aléatoire N donnant le nombres de parties vérifie donc, pour $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2^n}\,.$$

On remarque que cette variable suit une loi $\mathcal{B}^-(a)$, avec $a = 1/2$ et en particulier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) = 1\,.$$

Donc la probabilité pour que le jeu ne s'éternise pas est nulle. Par ailleurs

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{a} = 2\,.$$

2. Le gain de J en € est, dans le cas où n parties ont été effectuées,

$$G_J = 10(2^n - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k) - 5 = 10(2^n - (2^n - 1)) - 5 = 5\,.$$

On a donc une variable certaine et $\mathbb{E}(G_J) = 5$.

3. Pour jouer la première partie P doit disposer de 5 €, puisqu'il a déjà 5 € donnés par J. Ensuite ce qu'il gagne à chaque fois lui permet de couvrir la mise suivante de J. Par contre J doit disposer d'une somme infinie s'il veut être sûr de pouvoir continuer le jeu.

4. Si J ne dispose pas d'une somme infinie. Le jeu s'arrête soit lorsque J a gagné, soit lorsque la somme qu'il doit miser dépasse ce qu'il possède.

Supposons que J puisse miser au plus p fois. Pour $n \in [\![1, p]\!]$, il peut avoir gagné 5 € après la $n-$ième partie, et ceci avec la probabilité $1/2^n$, mais il peut avoir perdu à chacune des p parties. Il a donc perdu, en €

$$5 + 10 \sum_{k=0}^{p-1} 2^k = 5 + 10(2^p - 1) = 10\,2^p - 5\,,$$

avec la probabilité $\mathbb{P}(FF\ldots F)$ où F figure p fois,

$$\mathbb{P}(FF\ldots F) = \frac{1}{2^p}\,,$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_J) &= 5\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2^n} - (10\,2^p - 5)\,\frac{1}{2^p} \\
&= 5\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) - (10\,2^p - 5)\,\frac{1}{2^p} \\
&= -5
\end{aligned}$$

111 1. De quel événement le nombre $\frac{g(1)+g(-1)}{2}$ est-il la probabilité si g est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$?

EI 118

2. En effectuant mille répétitions indépendantes de l'expérience aléatoire « choisir au hasard (avec équiprobabilité) une des lettres d'un même livre de cent pages », on a obtenu quatre fois la lettre z. En déduire une estimation de la probabilité de trouver un nombre pair de z dans un paragraphe de cent vingt cinq lettres choisi au hasard dans ce livre.

Solution

1. On a

$$g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) s^k \,,$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{g(s) + g(-s)}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)(s^k + (-s)^k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)(1 + (-1)^k) s^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2j) s^{2j} \,. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{g(1) + g(-1)}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2j) = \mathbb{P}(X \text{ pair}) \,.$$

2. Soit N le nombre de lettres du livre, et N_1 le nombre de lettres z. La probabilité de tirer un z en choisissant une lettre au hasard est donc

$$p = \frac{N_1}{N} \,.$$

Soit Z_i la variable aléatoire valant 1 si z a été obtenu au $i-$ème tirage et 0, sinon. Les variables Z_i sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ d'espérance p. La loi des grands nombres nous dit que la variable Z définie par

$$Z = \frac{Z_1 + \cdots Z_{1000}}{1000} \,,$$

a pour limite p.

Or $Z_1 + \cdots + Z_{1000}$ donne le nombre de lettres z obtenues sur 1000 tirages. Donc Z tend vers $4/1000$, et on peut prendre

$$p = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250} \,.$$

Si X est la variable aléatoire donnant le nombre de lettres z obtenues dans un paragraphe de 125 lettres, elle suit une loi $\mathcal{H}(125, N_1, N)$, et peut s'approcher tout d'abord par une loi $\mathcal{B}(125, p)$, puis par une loi $\mathcal{P}(125p) = \mathcal{P}(1/2)$, dont la fonction caractéristique g est définie par

$$g(s) = e^{(s-1)/2} \,.$$

Donc la probabilité que le nombre de lettres z soit pair peut s'approcher par

$$\frac{g(1)+g(-1)}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)\approx 0,68\,.$$

112 1. Montrer que, pour tout p entier naturel

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\ \text{impair}}}^{4p+1} i=(2p+1)^2\,.$$

2. Deux joueurs A et B jouent avec un dé truqué selon la règle suivante : A lance le dé, puis B lance le dé 3 fois, puis A le relance 5 fois, puis B 7 fois, etc... jusqu'à ce que l'un des deux obtienne un 6 et emporte ainsi la partie. On note a la probabilité que le dé montre un 6 et $b=1-a$, et on suppose $a\neq 0$.

Montrer que :

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne})=\sum_{k=0}^{\infty}(-b)^{k^2}\,.$$

3. Le dé peut-il être truqué de façon à rendre le jeu équitable ?
Indication : utiliser la formule d'Euler. Si $|\alpha|<1$, on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha^{k^2}=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha^{2k})(1+\alpha^{2k-1})^2\,.$$

Solution

On écrit

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\ \text{impair}}}^{4p+1} i=\sum_{k=0}^{2p}(2k+1)=2\sum_{k=0}^{2p}k+(2p+1)\,,$$

donc, en utilisant la somme

$$\sum_{k=0}^{s}k=\frac{s(s+1)}{2}\,,$$

on obtient

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\ \text{impair}}}^{4p+1} i=(2p)(2p+1)+(2p+1)=(2p+1)^2\,.$$

2. Si l'on écrit les premières situations où A gagne avec les probabilités correspondantes, on a

A	a
$ABBBA$	b^4a
$ABBBAA$	b^5a
$ABBBAAA$	b^6a
$ABBBAAAA$	b^7a
$ABBBAAAAA$	b^8a
$ABBBAAAAABBBBBBBA$	$b^{16}a$

De manière générale, on constate que pour tout entier p positif et pour tout k compris entre $(2p)^2$ et $(2p+1)^2-1$, A gagne après k parties perdues, donc avec une probabilité $b^k a$. Alors

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=(2p)^2}^{(2p+1)^2-1} ab^k .$$

Mais

$$\sum_{k=(2p)^2}^{(2p+1)^2-1} ab^k = \sum_{k=(2p)^2}^{(2p)^2+4p} ab^k = ab^{(2p)^2} \sum_{k=0}^{4p} b^k = b^{(2p)^2}(1-b^{4p+1}) = b^{(2p)^2} - b^{(2p+1)^2} .$$

Posons

$$u_n = (-b)^{n^2} .$$

Les nombres n et n^2 ayant la même parité, on a $(-1)^n = (-1)^{n^2}$, et donc

$$u_n = (-1)^n b^{n^2} ,$$

et l'on peut alors remarquer que la série de terme général u_n converge, car c'est une série alternée. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \text{ gagne}) &= \sum_{p=0}^{\infty}(b^{(2p)^2} - b^{(2p+1)^2}) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{p=0}^{N}(b^{(2p)^2} - b^{(2p+1)^2}) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{p=0}^{N}((-b)^{(2p)^2} + (-b)^{(2p+1)^2}) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{p=0}^{N}(-b)^{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{N}(-b)^{(2p+1)^2} \right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{2N+1} (-b)^k = \sum_{n=0}^{\infty}(-b)^{n^2} .
\end{aligned}$$

3. En remarquant que $(-b)^{k^2}$ ne dépend pas du signe de k, tous les termes, sauf si $k=0$, de la somme de gauche ci-dessous figurent deux fois ce qui permet d'écrire

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-b)^{k^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-b)^{n^2} - 1 .$$

Donc

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-b)^{k^2} ,$$

et en utilisant la formule d'Euler

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}(1-b^{2k})(1-b^{2k-1})^2 .$$

Etudions la limite du produit

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - b^{2k})(1 - b^{2k-1})^2 .$$

On a

$$-\ln(P_n) = \sum_{k=1}^{n} (-\ln(1 - b^{2k}) - 2\ln(1 - b^{2k-1})) .$$

Or, lorsque k tend vers l'infini,

$$-\ln(1 - b^{2k}) \sim b^{2k} \quad \text{et} \quad -\ln(1 - b^{2k-1}) \sim b^{2k-1} .$$

Comme la série de terme général b^{2k} et celle de terme général b^{2k-1} sont des séries convergentes et positives, alors il en est de même de la série de terme général $-\ln(1 - b^{2k})$ et de celle de terme général $-\ln(1 - b^{2k-1})$. Donc la série de terme général $\ln(P_n)$ converge. Notons S sa somme. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln P_n} = e^S > 0 .$$

et

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \frac{1}{2} + \frac{e^S}{2} > \frac{1}{2} .$$

Le jeu ne sera jamais équitable.

113 Deux joueurs A et B disposent chacun d'une urne qui contient dix boules indiscernables au toucher. Il y a $b \geq 1$ boules noires dans l'urne de B et $a \geq 2$ boules noires dans celle de A.
A joue le premier. Pour cela, il tire au hasard une boule dans son urne. Si celle-ci n'est pas noire, il la replace dans son urne et c'est au tour de B de jouer. Sinon A tire une seconde boule dans son urne sans avoir remis la première tirée. Si cette deuxième boule n'est pas noire, il replace les deux boules dans son urne et c'est au tour de B de jouer. Sinon A a gagné la partie.
Pour jouer, B tire une boule de son urne. Si celle-ci n'est pas noire, il la replace dans son urne et c'est au tour de A de jouer. Sinon B a gagné la partie.
Peut-on choisir a et b pour que ce jeu soit équitable ?

Solution

Notons A_g, A_p, B_g, B_p, respectivement les événements : A tire une boule noire, A ne tire pas une boule noire, B tire une boule noire, B ne tire pas une boule noire.

Le joueur A gagne la partie lorsque après un nombre fini de séquences A_gA_p ou A_p chacune suivie de B_p on trouve une séquence A_gA_g.

On a

$$\mathbb{P}(A_gA_p) = \frac{a}{10}\,\frac{10-a}{9} \,,\; \mathbb{P}(B_p) = \frac{10-b}{10} \,,\; \mathbb{P}(A_p) = \frac{10-a}{10} \,,\; \mathbb{P}(A_gA_g) = \frac{a}{10}\,\frac{a-1}{9} .$$

EI 122

Si l'on a k séquences A_gA_p et $n-k$ séquences A_p, comme elles peuvent figurer dans un ordre quelconque, il y aura $\binom{n}{k}$ façons de les placer, par ailleurs B_p figure n fois. La probabilité que le jeu s'arrête après n séquences est donc

$$\begin{aligned}
p_n &= \left(\frac{10-b}{10}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{10}\frac{10-a}{9}\right)^k \left(\frac{10-a}{10}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{10-b}{10}\right)^n \left(\frac{10-a}{10}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{9}\right)^k .
\end{aligned}$$

Mais on peut alors appliquer la formule du binôme et l'on obtient

$$p_n = \left(\frac{10-a}{10}\frac{10-b}{10}\right)^n \left(\frac{a}{9}+1\right)^n = \left(\frac{10-a}{10}\frac{10-b}{10}\frac{9+a}{9}\right)^n .$$

La probabilité pour que A gagne est alors

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \frac{a}{10}\frac{a-1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} p_n ,$$

(il peut ne pas y avoir de séquence autre que A_gA_g et donc la sommation se fait à partir de $n=0$). On trouve donc la somme d'une série géométrique

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \frac{a}{10}\frac{a-1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{10-a}{10}\frac{10-b}{10}\frac{9+a}{9}\right)^n = \frac{\dfrac{a}{10}\dfrac{a-1}{9}}{1-\dfrac{10-a}{10}\dfrac{10-b}{10}\dfrac{9+a}{9}} .$$

Le joueur B gagne la partie lorsqu'après un certain nombre de séquences A_gA_p ou A_p entre lesquelles s'intercale B_p, apparaît l'événement B_g.
Le calcul est le même que dans le cas précédent, mais cette fois B_p figure $n-1$ fois. Donc la probabilité que le jeu s'arrête après n séquences sera

$$\begin{aligned}
q_n &= \left(\frac{10-b}{10}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{10}\frac{10-a}{9}\right)^k \left(\frac{10-a}{10}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{10-b}{10}\right)^{n-1} \left(\frac{10-a}{10}\frac{9+a}{9}\right)^n .
\end{aligned}$$

La probabilité pour que B gagne est alors

$$\mathbb{P}(B \text{ gagne}) = \frac{b}{10}\sum_{n=1}^{\infty} q_n ,$$

(il y a au moins une séquence A_gA_p ou A_p avant B_g et donc la sommation se fait à partir de $n=1$). On trouve de nouveau la somme d'une série géométrique

$$\mathbb{P}(B \text{ gagne}) = \frac{b}{10}\frac{10-a}{10}\frac{9+a}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10-a}{10}\frac{10-b}{10}\frac{9+a}{9}\right)^{n-1} = \frac{\dfrac{b}{10}\dfrac{10-a}{10}\dfrac{9+a}{9}}{1-\dfrac{10-a}{10}\dfrac{10-b}{10}\dfrac{9+a}{9}} .$$

On peut vérifier que
$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) + \mathbb{P}(B \text{ gagne}) = 1\,,$$
ce qui montre que le la probabilité que le jeu s'éternise est nulle.

Les probabilités $\mathbb{P}(A$ gagne) et $\mathbb{P}(B$ gagne) sont égales si et seulement si
$$\frac{a}{10}\,\frac{a-1}{9} = \frac{b}{10}\,\frac{10-a}{10}\,\frac{9+a}{9}\,,$$
ce qui équivaut à
$$10a(a-1) = (10-a)(9+a)b\,,$$
soit à
$$10a(a-1) = (90+a-a^2)b\,,$$
ou encore à
$$10a(a-1) = 90b - a(a-1)b\,,$$
puis à
$$a(a-1)(10+b) = 90b\,,$$
et finalement à
$$a(a-1) = \frac{3^2 \times 2 \times 5 \times b}{10+b}\,.$$
Comme ce nombre est entier, et que les facteurs premiers du numérateur sont inférieurs à 10, cela exclu les valeurs de b telles que $10+b$ soit premier c'est-à-dire $b = 1, 3, 7, 9$. On peut aussi éliminer 4, car 90 n'est pas divisible par 7, et 6, car le numérateur est divisible par 4 et non par 16. Il est facile de tester les valeurs restantes :
- pour $b = 2$, l'équation devient $a(a-1) = 15$ qui n'a pas de solution entière
- pour $b = 8$, on trouve $a(a-1) = 40$ qui n'a pas non plus de solution entière,
- par contre, pour $b = 5$, on trouve
$$\frac{90b}{10+b} = 30 = 6 \times 5 = a(a-1)\,,$$
qui a comme solution entière $a = 6$.

114 Deux joueurs A et B, de fortunes initiales respectives n_A et $n_B = N - n_A$ € décident de s'affronter en une suite de parties indépendantes.
A chaque partie le joueur A peut gagner avec la probabilité a, sinon c'est B qui gagne avec la probabilité $b = 1 - a$, le perdant donnant 1€ au gagnant. Le match ne s'arrête qu'avec la ruine d'un des deux joueurs.
La fortune de chaque joueur varie donc au cour du match ; on note α_n la probabilité que A gagne par ruine de B quand on se place à une étape du match où la fortune de A s'élève à n €.

1. Montrer que $\forall n \in [\![1,\, N-1]\!] \quad \alpha_n = a\alpha_{n+1} + (1-a)\alpha_{n-1}$.

2. On note $u_1 = \alpha_1$ et, pour tout n dans $[\![1,\, N-1]\!]$, $u_{n-1} = \alpha_{n-1} - \alpha_n$.

EI 124

Montrer que $\forall n \in [\![1,\, N]\!]\,,\ u_n = \alpha_1 \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n-1}$.

3. En déduire que, si $a \neq b$, $\forall n \in [\![1,\, N]\!]$

$$\alpha_n = \frac{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^n}{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^N}\,.$$

4. Que vaut α_n si $a = b$.

$\boxed{\textit{Solution}}$

1. Notons X la variable aléatoire donnant la fortune de A, et A_g l'événement « A gagne une partie ». On a donc

$$\alpha_n = \mathbb{P}_{|X=n}(A \text{ gagne})\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \mathbb{P}_{|X=n}(A \text{ gagne}|A_g)\mathbb{P}(A_g) + \mathbb{P}_{|X=n}(A \text{ gagne}|A_g^C)\mathbb{P}(A_g^C)\\ &= a\mathbb{P}(A \text{ gagne}|A_g \text{ et } X = n) + (1-a)\mathbb{P}(A \text{ gagne}|A_g^C \text{ et } X = n)\,.\end{aligned}$$

Mais

$$\{A_g \text{ et } X = n\} = \{X = n+1\} \quad \text{et} \quad \{A_g^C \text{ et } X = n\} = \{X = n-1\}\,,$$

donc

$$\alpha_n = a\mathbb{P}(A \text{ gagne}|X = n+1) + (1-a)\mathbb{P}(A \text{ gagne}|X = n-1) = a\alpha_{n+1} + (1-a)\alpha_{n-1}\,.$$

2. On peut écrire la relation de la question précédente

$$a\alpha_n + (1-a)\alpha_n = a\alpha_{n+1} + (1-a)\alpha_{n-1}\,,$$

soit

$$a(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = (1-a)(\alpha_n - \alpha_{n-1})\,,$$

et finalement

$$u_{n+1} = \frac{b}{a}\,u_n\,,$$

avec $u_1 = \alpha_1$. On a donc une suite géométrique et il en résulte que, si $1 \leq n \leq N$,

$$u_n = \alpha_1 \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\,.$$

3. Alors, si $1 \leq p \leq n \leq N$,

$$\alpha_p - \alpha_{p-1} = \alpha_1 \left(\frac{b}{a}\right)^{p-1}\,,$$

et en sommant ces égalités
$$\sum_{p=2}^{n}(\alpha_p-\alpha_{p-1})=\alpha_1\sum_{p=2}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{p-1},$$
on a à droite une somme télescopique, donc
$$\alpha_n-\alpha_1=\alpha_1\sum_{p=2}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{p-1},$$
ce qui donne
$$\alpha_n=\alpha_1\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{p-1}.$$
On a à gauche la somme des termes d'une suite géométrique, donc, si $a\neq b$,
$$\alpha_n=\alpha_1\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1-\frac{b}{a}}.$$
Mais, pour N
$$1=\alpha_N=\alpha_1\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^N}{1-\frac{b}{a}},$$
donc, en faisant le quotient
$$\alpha_n=\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^N}.$$
Si $a=b$, on a
$$\alpha_n=\alpha_1\sum_{p=1}^{n}1=n\alpha_1.$$
et donc
$$1=\alpha_N=N\alpha_1,$$
ce qui donne
$$\alpha_n=\frac{n}{N}.$$

115 Trois joueurs A, B, C jouent à pile ou face selon la règle suivante : A et B jouent une première partie. C remplace le perdant et le match se poursuit ainsi, le gagnant d'une partie jouant contre le perdant de la partie précédente, jusqu'à ce que l'un des trois gagne consécutivement contre les deux autres.

EI 126

Montrer que la probabilité que le match s'éternise est nulle et déterminer la probabilité de gagner le match pour chacun des trois joueurs.

Solution

A chaque partie un joueur a une probabilité 1/2 de gagner, et donc la probabilité de gain de trois joueurs successifs est 1/8. Etudions la suite des gagnants, et regardons dans quelles situations chacun des joueurs emporte le match.

Le joueur A emporte le match lorsque l'on a un des deux cas suivants :

si A emporte la première partie $ACB\ldots ACB\ AA$
si B emporte la première partie $BCA\ldots BCA\ A$

dans le premier cas, si n est le nombre de triplets ACB, la probabilité sera pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(ACB\ldots ACB\ AA) = \frac{1}{4.8^n},$$

dans le second cas si n est le nombre de triplets BCA, la probabilité sera pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(BCA\ldots BCA\ A) = \frac{1}{2.8^n},$$

et donc la probabilité que A gagne le match est

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4.8^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2.8^n},$$

ce qui se calcule facilement puisque l'on a des séries géométriques :

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{8}} + \frac{1}{16}\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{5}{16}\frac{8}{7} = \frac{5}{14}.$$

En raison de la symétrie du problème entre A et B, on a également

$$\mathbb{P}(B \text{ gagne}) = \frac{5}{14}.$$

Pour le joueur C on a un des deux cas suivants :

si A emporte la première partie $ACB\ldots ACB\ ACC$
si B emporte la première partie $BCA\ldots BCA\ BCC$

Si $n \geq 1$ est le nombre de triplets, on a

$$\mathbb{P}(C \text{ gagne}) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{2}{7}.$$

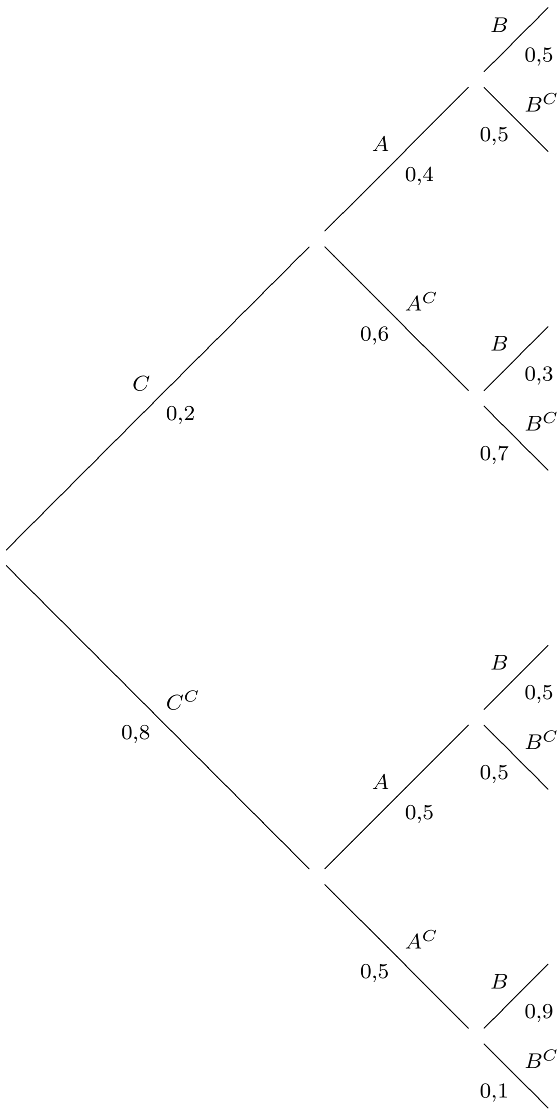
Comme

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) + \mathbb{P}(B \text{ gagne}) + \mathbb{P}(C \text{ gagne}) = 1\,,$$

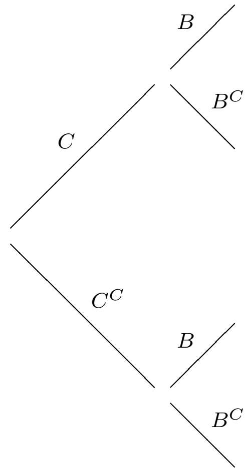
la probabilité pour que le jeu s'éternise est donc nulle.

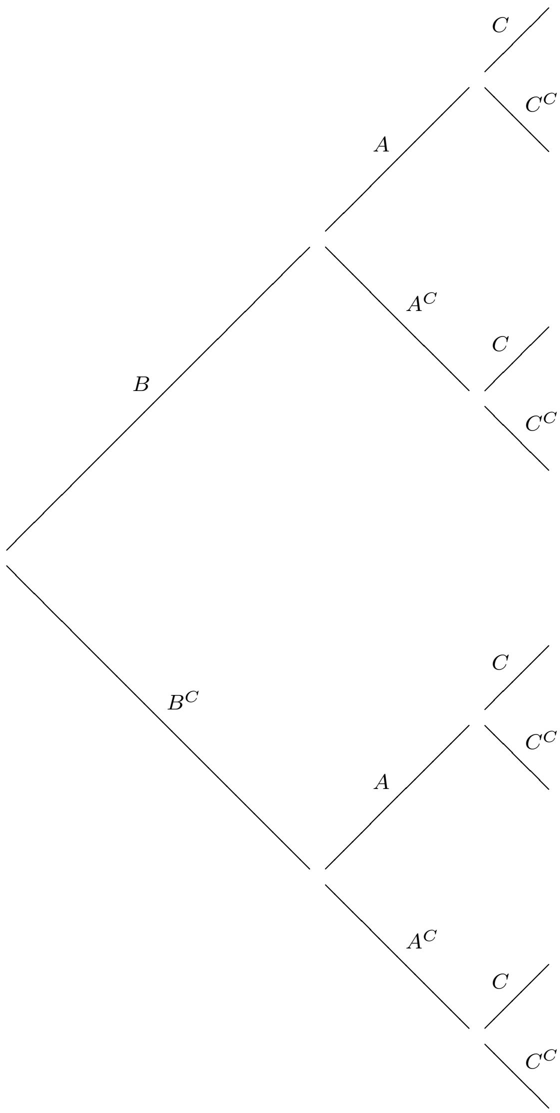
V - Partiels et devoirs

116 On a représenté sur le diagramme c-dessous :
– les probabilités des événements C et C^C : $\mathbb{P}(C) = 0,2$
– les probabilités conditionnelles sachant C des événements A et A^C : $\mathbb{P}_{|C}(A^C) = 0,6$
– les probabilités conditionnelles sachant $C \cap A^C$ des événements B et B^C : $\mathbb{P}_{|C \cap A^C}(B) = 0,3$
– etc ...



Compléter de la même façon, **en justifiant tous les calculs**, les deux diagrammes suivants :





EI 130

$\boxed{\textit{Solution}}$

Puisque $\{A, A^C\}$ est un système complet d'événements, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{|C}(B) &= \mathbb{P}_{|C}(A\cap B)+\mathbb{P}_{|C}(A^C\cap B)\\
&= (\mathbb{P}_{|C})_{|A}(B)\mathbb{P}_{|C}(A)+(\mathbb{P}_{|C})_{|A^C}(B)\mathbb{P}_{|C}(A^C)\\
&= \mathbb{P}_{|C\cap A}(B)\mathbb{P}_{|C}(A)+\mathbb{P}_{|C\cap A^C}(B)\mathbb{P}_{|C}(A^C)\\
&= 0,5\times 0,4+0,3\times 0,6=0,38\,.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathbb{P}_{|C}(B^C)=1-0,38=0,62\,.$$

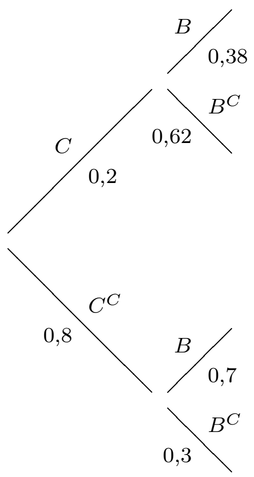
De même

$$\mathbb{P}_{|C^C}(B)=\mathbb{P}_{|C^C\cap A}(B)\mathbb{P}_{|C^C}(A)+\mathbb{P}_{|C^C\cap A^C}(B)\mathbb{P}_{|C^C}(A^C)=0,5\times 0,5+0,9\times 0,5=0,7\,,$$

et

$$\mathbb{P}_{|C^C}(B^C)=1-0,7=0,3\,.$$

D'où le diagramme



Puisque $\{C, C^C\}$ est un système complet d'événements, on a,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}_{|C}(B)\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}_{|C^C}(B)\mathbb{P}(C^C)\\
&= 0,38\times 0,2+0,7\times 0,8=0,636
\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{P}(B^C)=1-0,636=0,364\,.$$

Puisque $\{C, C^C\}$ est un système complet d'événements, on a, en utilisant la formule

$$\mathbb{P}(U \cap V \cap W) = \mathbb{P}_{V\cap W}(U)\mathbb{P}_W(V)\mathbb{P}(W)\,,$$

la relation

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C^C)\\ &= \mathbb{P}_{|C\cap A}(B)\mathbb{P}_{|C}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}_{|C^C\cap A}(B)\mathbb{P}_{|C^C}(A)\mathbb{P}(C^C)\\ &= 0,5 \times 0,4 \times 0,2 + 0,5 \times 0,5 \times 0,8 = 0,24\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{P}_{|B}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,24}{0,636} = \frac{20}{53} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A^C) = 1 - \frac{20}{53} = \frac{33}{53}\,.$$

On a également

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B^C) &= \mathbb{P}(A \cap B^C \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B^C \cap C^C)\\ &= \mathbb{P}_{|C\cap A}(B^C)\mathbb{P}_{|C}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}_{|C^C\cap A}(B^C)\mathbb{P}_{|C^C}(A)\mathbb{P}(C^C)\\ &= 0,5 \times 0,4 \times 0,2 + 0,5 \times 0,5 \times 0,8 = 0,24\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{P}_{|B^C}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^C)}{\mathbb{P}(B^C)} = \frac{0,24}{0,364} = \frac{60}{91} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A^C) = 1 - \frac{60}{91} = \frac{31}{91}\,.$$

Déterminons maintenant les dernières branches du diagramme.

$$\mathbb{P}_{|A\cap B}(C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(A \cap B)} = \frac{\mathbb{P}(C)\mathbb{P}_{|C}(A)\mathbb{P}_{A\cap C}(B)}{\mathbb{P}(A \cap B)} = \frac{0,2 \times 0,4 \times 0,5}{0,24} = \frac{1}{6}\,.$$

Donc

$$\mathbb{P}_{|A\cap B}(C^C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\,.$$

De même

$$\mathbb{P}_{|A^C\cap B}(C) = \frac{\mathbb{P}(A^C \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(A^C \cap B)} = \frac{\mathbb{P}(C)\mathbb{P}_{|C}(A^C)\mathbb{P}_{A^C\cap C}(B)}{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)} = \frac{0,2 \times 0,6 \times 0,3}{0,636 - 0,24} = \frac{1}{11}\,.$$

Donc

$$\mathbb{P}_{|A^C\cap B}(C^C) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}\,.$$

Ensuite

$$\mathbb{P}_{|A\cap B^C}(C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^C \cap C)}{\mathbb{P}(A \cap B^C)} = \frac{\mathbb{P}(C)\mathbb{P}_{|C}(A)\mathbb{P}_{A\cap C}(B^C)}{\mathbb{P}(A \cap B^C)} = \frac{0,2 \times 0,4 \times 0,5}{0,24} = \frac{1}{6}\,.$$

Donc

$$\mathbb{P}_{|A\cap B^C}(C^C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\,.$$

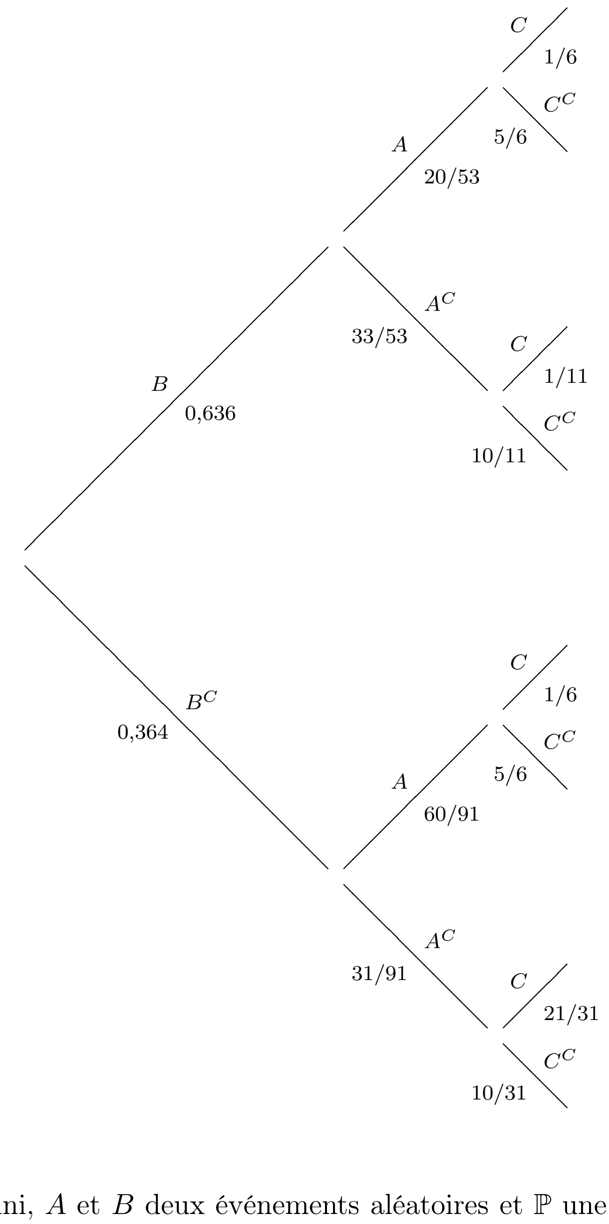
Et enfin

$$\mathbb{P}_{|A^C\cap B^C}(C) = \frac{\mathbb{P}(A^C\cap B^C\cap C)}{\mathbb{P}(A^C\cap B^C)} = \frac{\mathbb{P}(C)\mathbb{P}_{|C}(A^C)\mathbb{P}_{A^C\cap C}(B^C)}{\mathbb{P}(B^C)-\mathbb{P}(A\cap B^C)} = \frac{0,2\times 0,6\times 0,7}{0,364-0,24} = \frac{21}{31}\,.$$

Donc

$$\mathbb{P}_{|A^C\cap B^C}(C^C) = 1-\frac{21}{31} = \frac{10}{31}\,.$$

On obtient le diagramme suivant :



117 Soit Ω un univers fini, A et B deux événements aléatoires et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω telle que $(\forall\omega\in\Omega)\ \mathbb{P}(\{\omega\})>0$. On note Φ l'application définie sur $\mathcal{P}(\Omega)\times\mathcal{P}(\Omega)$ par

$$\Phi(E,F) = \mathbb{P}(E\cap F)-\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)\,.$$

1) Montrer que

a) $-\frac{1}{4} \leq \Phi(A, A^C) \leq 0 \leq \Phi(A, A) \leq \frac{1}{4}$,

b) si $\Phi(A, A) = \frac{1}{4}$, alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A^C)$.

2) a) Que vaut $\Phi(A, B) + \Phi(A^C, B)$?

b) Calculer $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B^C)$ et en déduire un encadrement de $\Phi(A, B)$.

3) A tout événement aléatoire K de $\mathcal{P}(\Omega)$ on associe la variable aléatoire U_K définie sur Ω par :

$$U_K(\omega) = \mathbb{1}_K(\omega) - \mathbb{P}(K) = \begin{cases} 1 - \mathbb{P}(K) & \text{si } \omega \in K \\ -\mathbb{P}(K) & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Calculer $S(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} U_A(\omega) U_B(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$.

b) Soit Q la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par

$$Q(t) = \sum_{\omega \in \Omega} [tU_A(\omega) + U_B(\omega)]^2 \mathbb{P}(\{\omega\}) .$$

Etudier le signe de $Q(t)$ et en déduire un autre encadrement de $\Phi(A, B)$.

4) a) Montrer que si $|\Phi(A, B)| = 1/4$, alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

b) Que vaut $\mathbb{P}(A \,\Delta\, B)$ si $|\Phi(A, B)| = 1/4$?

c) Qu'en déduit-on si $\Phi(A, B) = 1/4$? si $\Phi(A, B) = -1/4$?

$\boxed{\textit{Solution}}$

1) a) On a

$$\Phi(A, A) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 \quad \text{et} \quad \Phi(A, A^C) = -\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) = -\Phi(A, A) .$$

Mais la fonction polynomiale φ définie par $\varphi(x) = x - x^2$ est positive sur l'intervalle $[\,0,\,1\,]$ et atteint son maximum pour $x = 1/2$. Ce maximum vaut $1/4$. On en déduit donc, en prenant $x = \mathbb{P}(A)$, que

$$0 \leq \Phi(A, A) \leq \frac{1}{4} .$$

Alors

$$-\frac{1}{4} \leq \Phi(A, A^C) = -\mathbb{P}(A, A) \leq 0 .$$

On peut également écrire

$$\Phi(A, A) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \mathbb{P}(A)\right)^2 ,$$

ce qui permet de retrouver l'inégalité

$$0 \leq \Phi(A, A) \leq \frac{1}{4}\,.$$

b) Comme la fonction φ atteint son maximum en $1/2$ uniquement, on en déduit donc que l'égalité

$$\Phi(A, A) = \varphi(\mathbb{P}(A)) = 1/4$$

implique

$$\mathbb{P}(A) = 1/2\,,$$

et donc

$$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\,.$$

Cela se déduit également de l'égalité

$$\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \mathbb{P}(A)\right)^2 = \frac{1}{4}\,,$$

2) a) On a

$$\Phi(A, B) + \Phi(A^C, B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^C \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B)\,.$$

Mais, puisque le système $\{A, A^C\}$ est complet, on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^C \cap B) = \mathbb{P}(B)\,,$$

et

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C)) = \mathbb{P}(B)\,.$$

On en déduit donc que

$$\Phi(A, B) + \Phi(A^C, B) = 0\,.$$

b) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B^C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\
&= 1 - \Phi(A, B)\,.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B^C)$ appartient à l'intervalle $[\,0,\,2\,]$, on a donc

$$0 \leq 1 - \Phi(A, B) \leq 2\,,$$

d'où

$$-1 \leq \Phi(A, B) \leq 1\,.$$

3) Pour calculer la somme

$$S(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} U_A(\omega) U_B(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})\,,$$

on peut procéder de plusieurs manières :

$\boxed{\text{Première méthode}}$ On utilise le fait que le système $\{A \cap B, A \cap B^C, A^C \cap B, A^C \cap B^C\}$ est complet, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \sum_{\omega \in A \cap B} U_A(\omega) U_B(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in A \cap B^C} U_A(\omega) U_B(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &\quad + \sum_{\omega \in A^C \cap B} U_A(\omega) U_B(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in A^C \cap B^C} U_A(\omega) U_B(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \,. \end{aligned}$$

On calcule alors les quatre sommes qui apparaissent dans l'expression précédente. On a pour la première

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= \sum_{\omega \in A \cap B} U_A(\omega) U_B(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in A \cap B} (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) \sum_{\omega \in A \cap B} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) \mathbb{P}(A \cap B) \,. \end{aligned}$$

Pour la deuxième somme

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= \sum_{\omega \in A \cap B^C} U_A(\omega) U_B(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in A \cap B^C} (1 - \mathbb{P}(A))(-\mathbb{P}(B)) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= (1 - \mathbb{P}(A))(-\mathbb{P}(B)) \sum_{\omega \in A \cap B^C} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= -\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) \mathbb{P}(A \cap B^C) \,, \end{aligned}$$

et de manière symétrique pour la troisième

$$S_3(\omega) = \sum_{\omega \in A^C \cap B} U_A(\omega) U_B(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) = -\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) \mathbb{P}(A^C \cap B) \,.$$

Enfin pour la quatrième somme

$$\begin{aligned} S_4(\omega) &= \sum_{\omega \in A^C \cap B^C} U_A(\omega) U_B(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in A^C \cap B^C} (-\mathbb{P}(A))(-\mathbb{P}(B)) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \sum_{\omega \in A^C \cap B^C} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(A^C \cap B^C) \,. \end{aligned}$$

Alors, en développant

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= (1-\mathbb{P}(A))(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(B)(1-\mathbb{P}(A))\mathbb{P}(A\cap B^C)\\
&\qquad -\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(A^C\cap B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A^C\cap B^C)\\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)[\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap B^C)+\mathbb{P}(A^C\cap B)+\mathbb{P}(A^C\cap B^C)]\\
&\qquad -\mathbb{P}(A)[\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A^C\cap B)] - \mathbb{P}(B)[\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap B^C)] + \mathbb{P}(A\cap B)\\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A\cap B)\\
&= \Phi(A,B)\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Deuxième méthode}}$ On utilise les propriétés de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_K$

$$\mathbb{1}_A\,\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_K) = \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{1}_K(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in K}\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(K)$$

On a alors en développant

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= \sum_{\omega\in\Omega}(\mathbb{1}_A(\omega)-\mathbb{P}(A))(\mathbb{1}_B(\omega)-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(\{\omega\})\\
&= \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{1}_A(\omega)\,\mathbb{1}_B(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}) - \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\{\omega\})\\
&\qquad - \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{1}_B(\omega)\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\{\omega\})\\
&= \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) - \mathbb{P}(B)\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\\
&\qquad -\mathbb{P}(A)\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{1}_B(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})\\
&= \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\
&= \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,.
\end{aligned}$$

b) Le polynôme $Q(t)$ est un trinôme du second degré positif. Il en résulte donc que son discriminant est négatif. On a, en développant,

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \sum_{\omega\in\Omega}(t^2U_A(\omega)^2 + 2tU_A(\omega)U_B(\omega) + U_B(\omega)^2)\mathbb{P}(\{\omega\})\\
&= t^2\left(\sum_{\omega\in\Omega}U_A(\omega)^2\mathbb{P}(\{\omega\})\right)^2 + 2t\sum_{\omega\in\Omega}U_A(\omega)U_B(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega}U_B(\omega)^2\mathbb{P}(\{\omega\})\,.
\end{aligned}$$

Donc en utilisant le calcul de a)

$$Q(t) = t^2\Phi(A,A) + 2t\Phi(A,B) + \Phi(B,B)\,.$$

Alors le discriminant

$$\delta = 4(\Phi(A,B)^2 - \Phi(A,A)\Phi(B,B))\,,$$

est négatif, d'où l'on déduit

$$\Phi(A,B)^2 \leq \Phi(A,A)\Phi(B,B)\,,$$

Mais on a vu que $\Phi(A,A)$ et $\Phi(B,B)$ sont inférieurs à $1/4$. Donc

$$\Phi(A,B)^2 \leq \frac{1}{16}\,,$$

et finalement

$$-\frac{1}{4} \leq \Phi(A,B) \leq \frac{1}{4}\,.$$

4) a) Si $|\Phi(A,B)| = 1/4$, on a

$$\frac{1}{16} \leq \Phi(A,A)\Phi(B,B) \leq \frac{1}{16}\,,$$

et donc

$$\Phi(A,A)\Phi(B,B) = \frac{1}{16}\,.$$

Puisque $\Phi(A,A)$ et $\Phi(B,B)$ sont inférieurs à $1/4$, ceci n'est possible que s'ils sont exactement égaux à $1/4$. (Si l'un était strictement inférieur à $1/4$, l'autre serait strictement plus grand). Donc

$$\Phi(A,A) = \Phi(B,B) = \frac{1}{4}\,,$$

et d'après la question 1)b), cela implique

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\,.$$

b) On a $A\,\Delta\,B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$, avec $A\cap B \subset A\cup B$, donc

$$\mathbb{P}(A\,\Delta\,B) = \mathbb{P}(A\cup B) - \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A\cap B)\,,$$

ce que l'on peut exprimer en fonction de $\Phi(A,B)$,

$$\mathbb{P}(A\,\Delta\,B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - 2\Phi(A,B)\,,$$

Lorsque $|\Phi(A,B)| = 1/4$, on a donc

$$\mathbb{P}(A\,\Delta\,B) = \frac{1}{2} - 2\Phi(A,B)\,.$$

c) Remarquons que, dire que $\mathbb{P}(\{\omega\})$ n'est jamais nul, implique pour un événement U que $\mathbb{P}(U) = 0$ ne peut avoir lieu que si $U = \emptyset$, et que $\mathbb{P}(U) = 1$ ne peut avoir lieu que si $U^C = \emptyset$, c'est-à-dire que si $U = \Omega$.

Si $\Phi(A,B) = 1/4$. Alors

$$\mathbb{P}(A\,\Delta\,B) = 0\,.$$

et donc

$$A\,\Delta\,B = (A\cup B)\setminus(A\cap B) = \emptyset\,.$$

Il en résulte que $A\cap B = A\cup B$, c'est-à-dire que $A = B$.

Si $\Phi(A,B) = -1/4$. Alors

$$\mathbb{P}(A\,\Delta\,B) = 1\,.$$

On en déduit que

$$A\,\Delta\,B = (A\cup B)\setminus(A\cap B) = \Omega\,,$$

et donc que $A\cup B = \Omega$ et $A\cap B = \emptyset$, c'est-à-dire que $A = B^C$.

118 Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur l'univers $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, de moyenne $m = 4{,}816$. On connaît les nombres $q_k = \mathbb{P}(\Omega\cap[\,0,\,k\,])$ pour tout entier k compris entre 1 et 5 :

k	1	2	3	4	5
q_k	$0,024$	$0,056$	$0,104$	$0,304$	$0,720$

La variable aléatoire réelle X définie sur Ω par $X(\omega) =$ « reste de la division entière de ω par 4 », suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3;\,0,4)$.

Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire réelle Y définie sur Ω par
$Y(\omega) =$ « reste de la division entière de ω par 3 »

Solution

La variable aléatoire Y est telle que $Y(\Omega) = \{0,1,2\}$, et donc

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(Y=1) + 2\mathbb{P}(Y=2)\,.$$

On a

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(\{1,4,7\}) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(\{2,5,8\})\,.$$

Si l'on pose $p_k = \mathbb{P}(\{k\})$, on a

$$\mathbb{P}(Y=1) = p_1+p_4+p_7 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y=2) = p_2+p_5+p_8\,.$$

Pour obtenir l'espérance de Y, il suffit de calculer les valeurs p_k pour $0\leq k\leq 8$. Les données de l'exercice vont fournir 11 équations à 9 inconnues.

Exprimons tout d'abord les probabilités q_k. On obtient les 5 relations suivantes

$$\begin{aligned}
q_1 &= \mathbb{P}(\{0,1\}) = p_0+p_1\\
q_2 &= \mathbb{P}(\{0,1,2\}) = p_0+p_1+p_2\\
q_3 &= \mathbb{P}(\{0,1,2,3\}) = p_0+p_1+p_2+p_3\\
q_4 &= \mathbb{P}(\{0,1,2,3,4\}) = p_0+p_1+p_2+p_3+p_4\\
q_5 &= \mathbb{P}(\{0,1,2,3,4,5\}) = p_0+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5
\end{aligned}$$

Pour la loi de X, on a les quatre relations suivantes

$$\begin{array}{l}
\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(\{0,4,8\})=p_0+p_4+p_8=(0,6)^3=0,216\\
\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(\{1,5\})=p_1+p_5=3(0,4)(0,6)^2=0,432\\
\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(\{2,6\})=p_2+p_6=3(0,4)^2(0,6)=0,288\\
\mathbb{P}(X=3)=\mathbb{P}(\{3,7\})=p_3+p_7=(0,4)^3=0,064
\end{array}$$

Le système obtenu est formé de 9 équations à 9 inconnues, auxquelles s'ajoutent deux équations provenant des égalités

$$\mathbb{P}(\Omega)=\sum_{k=0}^{8} p_k=1 \quad \text{et} \quad m=\sum_{k=0}^{8} kp_k=4,816\,.$$

On a donc le système

$$(\mathcal{S})\ \left\{\begin{array}{l}
p_0+p_1=0,024\\
p_0+p_1+p_2=0,056\\
p_0+p_1+p_2+p_3=0,104\\
p_0+p_1+p_2+p_3+p_4=0,304\\
p_0+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=0,720\\
p_0+p_4+p_8=0,216\\
p_1+p_5=0,432\\
p_2+p_6=0,288\\
p_3+p_7=0,064\\
p_0+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7+p_8=1\\
p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5+6p_6+7p_7+8p_8=4,816
\end{array}\right.$$

On pourrait bien sûr résoudre ce système par la méthode du pivot, mais on peut le faire également par combinaison de lignes dans le système. On rappelle qu'ajouter à une ligne d'un système d'équations linéaires une combinaison linéaire des autres donne un système équivalent.

En soustrayant la ligne i de la ligne $i+1$, pour i variant de 1 à 4, le système est équivalent à

$$(\mathcal{S}_1)\ \left\{\begin{array}{l}
p_0+p_1=0,024\\
p_2=0,032\\
p_3=0,048\\
p_4=0,2\\
p_5=0,416\\
p_0+p_4+p_8=0,216\\
p_1+p_5=0,432\\
p_2+p_6=0,288\\
p_3+p_7=0,064\\
p_0+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7+p_8=1\\
p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5+6p_6+7p_7+8p_8=4,816
\end{array}\right.$$

EI 140

En soustrayant la ligne 2 de la ligne 8, la ligne 3 de la ligne 9 et la ligne 5 de la ligne 7, la système est équivalent à

$$(\mathcal{S}_2)\quad \begin{cases} p_0 + p_1 = 0,024 \\ p_2 = 0,032 \\ p_3 = 0,048 \\ p_4 = 0,2 \\ p_5 = 0,416 \\ p_0 + p_4 + p_8 = 0,216 \\ p_1 = 0,016 \\ p_6 = 0,256 \\ p_7 = 0,016 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 = 1 \\ p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 = 4,816 \end{cases}$$

En soustrayant la ligne 9 de la ligne 1 la système est équivalent à

$$(\mathcal{S}_3)\quad \begin{cases} p_0 = 0,008 \\ p_2 = 0,032 \\ p_3 = 0,048 \\ p_4 = 0,2 \\ p_5 = 0,416 \\ p_0 + p_4 + p_8 = 0,216 \\ p_1 = 0,016 \\ p_6 = 0,256 \\ p_7 = 0,016 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 = 1 \\ p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 = 4,816 \end{cases}$$

Enfin, en soustrayant de la ligne 6 la somme des lignes 4 et 1, on obtient

$$(\mathcal{S}_4)\quad \begin{cases} p_0 = 0,008 \\ p_2 = 0,032 \\ p_3 = 0,048 \\ p_4 = 0,2 \\ p_5 = 0,416 \\ p_8 = 0,008 \\ p_1 = 0,016 \\ p_6 = 0,256 \\ p_7 = 0,016 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 = 1 \\ p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 = 4,816 \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que les deux dernières équations sont satisfaites et le système a donc comme solution

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	$0,008$	$0,016$	$0,032$	$0,048$	$0,2$	$0,416$	$0,256$	$0,016$	$0,008$

Alors

$$\mathbb{P}(Y=1) = p_1 + p_4 + p_7 = 0,232 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y=2) = p_2 + p_5 + p_8 = 0,456\,,$$

d'où

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(Y=1) + 2\mathbb{P}(Y=2) = 1,144\,.$$

Partiel 1

119 La moitié des mails reçus par la messagerie d'une entreprise sont des SPAM (messages indésirables). Le responsable du service informatique est intéressé par un logiciel qui met automatiquement au rebut les mails qu'il considère comme des SPAM. Ce logiciel est paramétrable : on peut régler de 0 à 1 la probabilité p qu'un vrai SPAM soit mis au rebut mais la probabilité q qu'un mail soit mis au rebut alors que ce n'est pas un SPAM est liée à p par la relation $q = \left(\frac{p}{3}\right)^2$.

1. Exprimer en fonction de p la probabilité $r(p)$ qu'un mail arrivant à la messagerie de cette entreprise soit automatiquement mis au rebut.

2. La perte d'un mail qui n'est pas un SPAM coûte cinq fois plus cher à l'entreprise que la prise en compte et l'élimination d'un SPAM. Montrer que, si le paramétrage du logiciel anti-SPAM est réglé pour minimiser le coût total, $49,5\%$ des mails seront automatiquement mis au rebut.

Solution

Notons S l'événement « le mail est un SPAM », et E l'événement « le mail est éliminé ».

1. Les données de l'énoncé se traduisent alors par

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S^C) = \frac{1}{2}\,,\ \mathbb{P}_{|S}(E) = p\,,\ \mathbb{P}_{|S^C}(E) = q\,.$$

Donc

$$r(p) = \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_{|S}(E)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}_{|S^C}(E)\mathbb{P}(S^C) = \frac{1}{2}\left[p + \left(\frac{p}{3}\right)^2\right]\,.$$

2. Notons c le coût d'un mail perdu, et b le bénéfice d'un SPAM éliminé. On a donc $c = 5b$.

Si N est le nombre de mails reçus, le coût total pour l'entreprise est donc

$$\begin{aligned} C(p) &= cN\mathbb{P}(E\cap S^C) - bN\mathbb{P}(E\cap S) \\ &= Nb(5\mathbb{P}(E\cap S^C) - N\mathbb{P}(E\cap S)) \\ &= Nb(5\mathbb{P}_{|S^C}(E)\mathbb{P}(S^C) - \mathbb{P}_{|S}(E)\mathbb{P}(S)) \\ &= \frac{Nb}{2}\left[5\left(\frac{p}{3}\right)^2 - p\right]\,. \end{aligned}$$

La fonction C est dérivable sur $[\,0,\,1\,]$ et son minimum est obtenu lorsque $C'(p) = 0$. Or

$$C'(p) = \frac{Nb}{2}\left[\frac{10p}{9} - 1\right]\,.$$

Donc le minimum est obtenu pour

$$p_m = \frac{9}{10}\,.$$

Alors
$$r(p_m) = \frac{1}{2}\left[\frac{9}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^2\right] = \frac{99}{200} = \frac{49,5}{100}\,.$$
Donc $49,5\%$ des mails seront mis au rebut.

120 Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur l'univers $\Omega = \{-2,-1,0,1,2\}$.

On définit sur Ω deux variables aléatoires réelles X et Y par :
$$X(k) = \frac{1}{24}\,(k^2-2k)(-k^2+8k+17)+1 \quad \text{et} \quad Y(k) = k^2(5k^2-17)\,.$$
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2,\frac{1}{2})$ et Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\{-12,0,12\})$.

1. Pour tout k de Ω, on note $p_k = \mathbb{P}(\{k\})$.
 (a) Montrer que $p_{-1} = \frac{1}{4}$ et $p_0 = \frac{1}{3}$.
 (b) En déduire les valeurs de p_1 et p_2.

2. Déterminer la moyenne m de la loi de probabilité $\mathbb{P}$.

Solution

1. Calculons les valeurs de X et de Y sur Ω. On obtient le tableau suivant

k	-2	-1	0	1	2
$X(k)$	0	2	1	0	1
$Y(k)$	12	-12	0	-12	12

Puisque X suit une loi $\mathcal{B}(2,\frac{1}{2})$, on a
$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}\,,$$
et puisque Y suit une loi $\mathcal{U}(\{-12,0,12\})$,
$$\mathbb{P}(Y=-12) = \mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(Y=12) = \frac{1}{3}\,.$$
(a) On a donc en particulier,
$$\{X=2\} = \{-1\} \quad \text{et} \quad \{Y=0\} = \{0\}\,,$$
donc,
$$\mathbb{P}(X=2) = p_{-1} = \frac{1}{4}\,,$$
et
$$\mathbb{P}(Y=0) = p_0 = \frac{1}{3}\,.$$

(b) On a également

$$\{X=0\}=\{-2,1\}\,,\ \{X=1\}=\{0,2\}\,,\ \{Y=-12\}=\{-1,1\}\,,\ \{Y=12\}=\{-2,2\}\,.$$

ce qui donne tout d'abord

$$p_0+p_2=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad p_1+p_{-1}=\frac{1}{3}\,,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$p_1=\frac{1}{12}\quad\text{et}\quad p_2=\frac{1}{6}\,.$$

Il reste les équations

$$p_1+p_{-2}=\frac{1}{4}\quad\text{et}\quad p_2+p_{-2}=\frac{1}{3}\,,$$

qui donnent toutes les deux

$$p_{-2}=\frac{1}{6}\,.$$

On constate alors que

$$p_{-2}+p_{-1}+p_0+p_1+p_2=1\,,$$

ce qui montre que l'on a bien défini une probabilité sur Ω.

2. On en déduit la moyenne

$$m=-2p_{-2}-p_{-1}+p_1+2p_2=-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}\,.$$

121 La loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X est donnée par

$$\mathbb{P}(X=k)=\begin{cases}\binom{n-1}{k-1}a^{k-1}(1-a)^{n-k} & \text{si } k\in[\![1,\,n]\!]\\[2mm] 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\,]\,0,\,1\,[$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)\mathbb{P}(X=k)$.

2. En déduire l'espérance mathématique de X.

Solution

1. Première méthode

Notons S_n la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)\mathbb{P}(X=k)$. Comme le premier terme est nul, on a, si $n\geq 2$,

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}a^{k-1}(1-a)^{n-k}\,.$$

Mais

$$(k-1)\binom{n-1}{k-1} = (k-1)\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = (n-1)\,\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} = (n-1)\binom{n-2}{k-2},$$

et donc

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}(n-1)\binom{n-2}{k-2}a^{k-1}(1-a)^{n-k}.$$

Effectuons le changement d'indice de sommation $j = k-2$. On obtient

$$S_n = (n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}a^{j+1}(1-a)^{n-2-j},$$

ou encore, en mettant a en facteur,

$$S_n = (n-1)a\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}a^{j}(1-a)^{n-2-j}.$$

Mais la somme est le développement de $(a+(1-a))^{n-2}$ et vaut 1 ; donc

$$S_n = (n-1)a,$$

ce qui reste vrai si $n = 1$ car la somme est nulle dans ce cas.

$\boxed{\text{Deuxième méthode}}$

Si $n \geq 2$, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1-a)^{n-1}.$$

On a, par la formule du binôme,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{j}(1-a)^{n-1-j},$$

et en dérivant

$$f'(x) = (n-1)(x+1-a)^{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1}j\binom{n-1}{j}x^{j-1}(1-a)^{n-1-j}.$$

Donc

$$f'(a) = (n-1) = \sum_{j=1}^{n-1}j\binom{n-1}{j}a^{j-1}(1-a)^{n-1-j}.$$

Alors en multipliant par a,

$$a(n-1) = \sum_{j=1}^{n-1}j\binom{n-1}{j}a^{j}(1-a)^{n-1-j}.$$

En faisant le changement d'indice de sommation $k = j + 1$, on obtient

$$a(n-1) = \sum_{k=2}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} a^{k-1} (1-a)^{n-k} = S_n \,.$$

2. On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)\mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = S_n + 1\,.$$

Donc

$$\mathbb{E}(X) = (n-1)a + 1\,.$$

122 1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul N,

$$\sum_{j=1}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{N} j^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\,.$$

2. Soit n un entier naturel non nul, et g la fonction réelle d'une variable réelle définie par

$$g(x) = n + \frac{1}{2} - \left| x - n - \frac{1}{2} \right| \,.$$

On note X une variable aléatoire réelle telle que, pour tout $k \in [\![1,\, 2n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{k}{n(2n+1)}\,.$$

et on définit une nouvelle variable aléatoire réelle par $Y = g(X)$.

(a) i. Calculer $\mathbb{E}(X)$
   ii. Calculer $\mathbb{E}(1/X)$.

(b) i. Déterminer la loi de probabilité de Y.
   ii. Calculer de deux manières l'espérance mathématique de Y.

Solution

1. Première méthode

On peut démontrer les deux formules par récurrence par exemple. Elles sont vraies pour $N = 1$. Supposons les deux formules vraies au rang N. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N+1} j &= \sum_{j=1}^{N} j + N + 1 \\ &= \frac{N(N+1)}{2} + N + 1 \\ &= \frac{N(N+1) + 2(N+1)}{2} \\ &= \frac{(N+1)(N+2)}{2}\,. \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N+1} j^2 &= \sum_{j=1}^{N} j^2 + (N+1)^2 \\
&= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 \\
&= \frac{N(N+1)(2N+1) + 6(N+1)^2}{6} \\
&= \frac{(N+1)(2N^2 + N + 6N + 6)}{6} \\
&= \frac{(N+1)(2N^2 + 7N + 6)}{6} \\
&= \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}\,.
\end{aligned}$$

On obtient donc les formules au rang $N+1$. Il en résulte que les formules sont vraies pour tout $N \geq 1$.

$\boxed{\text{Deuxième méthode}}$

On peut calculer les sommes directement. Notons $S_1(N)$ et $S_2(N)$ les deux sommes. Pour la première, on a

$$2S_1(N) = \sum_{j=1}^{N} j + \sum_{j=1}^{N} (N+1-j) = \sum_{j=1}^{N} (N+1) = N(N+1)\,,$$

ce qui redonne la valeur de $S_1(N)$.

On peut aussi écrire

$$(j+1)^2 - j^2 = 2j + 1\,,$$

et en sommant

$$\sum_{j=0}^{N} ((j+1)^2 - j^2) = 2\sum_{j=0}^{N} j + \sum_{j=0}^{N} 1\,,$$

ce qui donne

$$(N+1)^2 = 2S_1(N) + N + 1\,,$$

d'où l'on tire

$$S_1(N) = \frac{1}{2}((N+1)^2 - (N+1)) = \frac{N(N+1)}{2}\,.$$

Pour la deuxième somme,

$$(j+1)^3 - j^3 = 3j^2 + 3j + 1\,,$$

donc

$$\sum_{j=0}^{N} ((j+1)^3 - j^3) = 3\sum_{j=0}^{N} j^2 + 3\sum_{j=0}^{N} j + \sum_{j=0}^{N} 1\,,$$

ce qui donne

$$(N+1)^3 = 3S_2(N) + 3S_1(N) + N + 1\,,$$

et donc

$$\begin{aligned} S_2(N) &= \frac{(N+1)^3 - (N+1)}{3} - \frac{N(N+1)}{2} \\ &= \frac{(N+1)N(N+2)}{3} - \frac{N(N+1)}{2} \\ &= \frac{N(N+1)}{6}\,(2N+4-3) \\ &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\,. \end{aligned}$$

2. On constate tout d'abord que l'on a

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n(2n+1)} = \frac{1}{n(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{1}{n(2n+1)} \frac{2n(2n+1)}{2} = 1\,,$$

donc on peut effectivement avoir une variable aléatoire X telle que pour tout $k \in [\![1,\, 2n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{n(2n+1)}\,.$$

(a) i. On a alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{2n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n} k^2 = \frac{1}{n(2n+1)} \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} = \frac{4n+1}{3}\,.$$

ii. On a aussi

$$\mathbb{E}(1/X) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\mathbb{P}(X = k)}{k} = \frac{1}{n(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n} 1 = \frac{2}{2n+1}\,.$$

(b) i. Soit k dans $[\![1,\, n]\!]$. Alors $k - n$ appartient à $[\![1-n,\, 0]\!]$ et $k - n - 1/2$ est négatif. Donc

$$g(k) = n + \frac{1}{2} + \left(k - n - \frac{1}{2}\right) = k\,,$$

et $g(k)$ se trouve dans $[\![1,\, n]\!]$.

Si k se trouve dans $[\![n+1,\, 2n]\!]$, alors $k - n$ appartient à $[\![1,\, n]\!]$ et $k - n - 1/2$ est positif. Donc

$$g(k) = n + \frac{1}{2} - \left(k - n - \frac{1}{2}\right) = 2n - k + 1\,,$$

et $g(k)$ se trouve aussi dans $[\![1,\, n]\!]$.

Alors, si k appartient à $[\![1,\, n]\!]$, le nombre $2n+1-k$ appartient à $[\![n+1,\, 2n]\!]$, et

$$g(2n+1-k) = 2n-(2n+1-k)+1 = k = g(k)\,.$$

Donc $Y(\Omega) = [\![1,\, n]\!]$, et

$$\{Y = k\} = \{X = k\} \uplus \{X = 2n+1-k\}\,.$$

On en déduit alors

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X = 2n+1-k) = \frac{k}{n(2n+1)} + \frac{2n+1-k}{n(2n+1)} = \frac{1}{n}\,.$$

La variable Y suit une loi uniforme $\mathcal{U}([\![1,\, n]\!])$.

ii. On a tout d'abord

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} = \frac{n+1}{2}\,.$$

Mais on a également

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{2n} g(k)\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{kg(k)}{n(2n+1)} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kg(k)}{n(2n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(2n+1)} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k(2n+1-k)}{n(2n+1)}\,.
\end{aligned}$$

Dans la deuxième somme, on fait le changement d'indice de sommation $k' = 2n+1-k$, et on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(2n+1)} + \sum_{k'=1}^{n} \frac{k'(2n+1-k')}{n(2n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 + k(2n+1-k)}{n(2n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(2n+1)}{n(2n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}\,.
\end{aligned}$$

123 A toute variable aléatoire Z définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on associe la fonction H_Z définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H_Z(t) = \mathbb{P}(Z \geq t)\,.$$

EI 150

1. Montrer que
$$(\forall k \in \mathbb{N}^*)\ \mathbb{P}(Z = k-1) = H_Z(k-1) - H_Z(k)\,.$$
2. Représenter H_Z dans le cas particulier où la loi de Z est donnée par

k	0	1	3
$\mathbb{P}(Z=k)$	1/6	1/2	1/3

3. Soit q la plus grande des valeurs que peut prendre Z.
Montrer par récurrence (décroissante) sur n que
$$(\forall n \in [\![\,0,\, q\,]\!]\,)\ \sum_{k=n}^{q} H_Z(k) = \sum_{j=n}^{q} j\mathbb{P}(Z=j) - (n-1)H_Z(n)\,.$$
4. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$. Démontrer l'implication
$$[\ (\forall t \in \mathbb{R})\ H_X(t) \geq H_Y(t)\ ]\ \Rightarrow\ (\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y))\,.$$

Solution

1. On a
$$H_Z(k-1) - H_Z(k) = \mathbb{P}(Z \geq k-1) - \mathbb{P}(Z \geq k)\,.$$
Mais comme l'événement $\{Z \geq k\}$ est inclus dans $\{Z \geq k-1\}$, on en déduit
$$\begin{aligned} H_Z(k-1) - H_Z(k) &= \mathbb{P}(\{Z \geq k-1\} \setminus \{Z \geq k\}) \\ &= \mathbb{P}(\{Z \geq k-1\} \cap \{Z \geq k\}^C) \\ &= \mathbb{P}(\{Z \geq k-1\} \cap \{Z < k\}) \\ &= \mathbb{P}(k-1 \leq Z < k)\,. \end{aligned}$$
Mais puisque X est à valeurs entières, on a
$$\{k-1 \leq Z < k\} = \{Z = k-1\}\,,$$
donc
$$H_Z(k-1) - H_Z(k) = \mathbb{P}(Z = k-1)\,.$$
2. On calcule les valeurs de $H_Z(t)$ suivant la position de t dans $\mathbb{R}$.

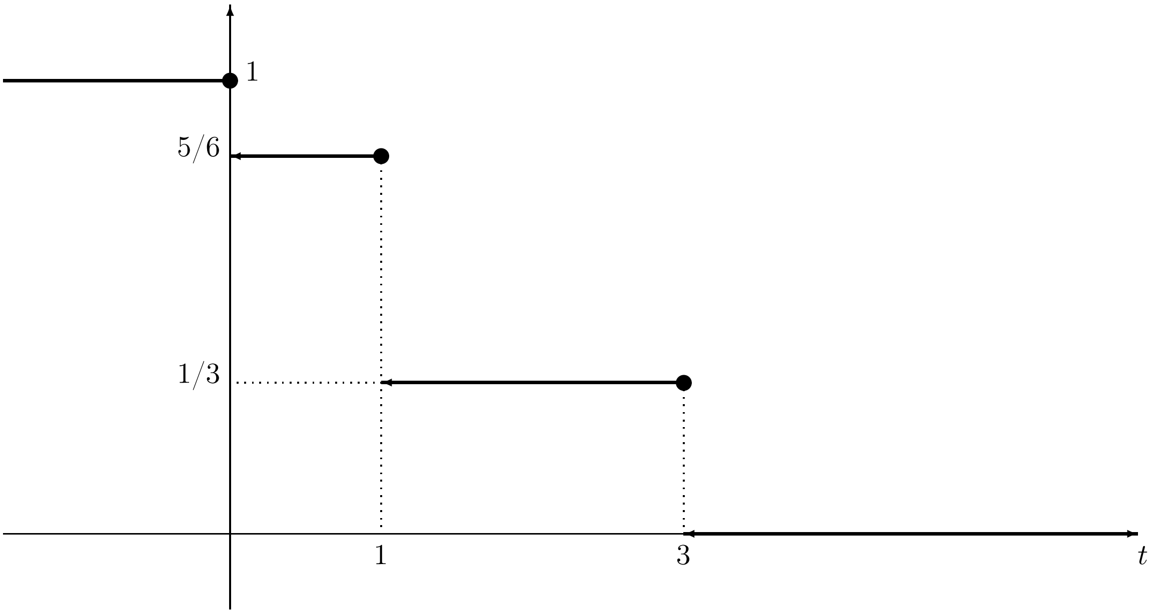
Si $t \in]\,3,\, \infty\,[$, $\{Z \geq t\} = \emptyset$ et $H_Z(t) = 0$

Si $t \in]\,1,\, 3\,]$, $\{Z \geq t\} = \{3\}$ et $H_Z(t) = \dfrac{1}{3}$

Si $t \in]\,0,\, 1\,]$, $\{Z \geq t\} = \{1, 3\}$ et $H_Z(t) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$

Si $t \in]\,-\infty,\, 0\,]$, $\{Z \geq t\} = \Omega$ et $H_Z(t) = 1$

La fonction H_Z est une fonction en escalier, dont le graphe est le suivant :



3. Puisque q est la plus grande valeur prise par Z, on a

$$\{Z \geq q\} = \{Z = q\}\,,$$

et donc

$$H_Z(q) = \mathbb{P}(Z = q)\,,$$

alors

$$q\mathbb{P}(Z = q) - (q-1)H_Z(q) = qH_Z(q) - (q-1)H_Z(q) = H_Z(q)\,,$$

et ceci donne la formule au rang q.

Supposons la formule vraie au rang n, où n est un entier compris entre 1 et q, et montrons qu'elle est vraie au rang $n-1$. On a donc

$$\sum_{k=n-1}^{q} H_Z(k) = \sum_{k=n}^{q} H_Z(k) + H_Z(n-1)\,,$$

et, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=n-1}^{q} H_Z(k) = \sum_{j=n}^{q} j\mathbb{P}(Z = j) - (n-1)H_Z(n) + H_Z(n-1)\,.$$

Alors d'après la question 1

$$\sum_{k=n-1}^{q} H_Z(k) = \sum_{j=n}^{q} j\mathbb{P}(Z = j) - (n-1)(H_Z(n-1) - \mathbb{P}(Z = n-1)) + H_Z(n-1)\,,$$

ce qui donne

$$\sum_{k=n-1}^{q} H_Z(k) = \sum_{j=n}^{q} j\mathbb{P}(Z=j) + (n-1)\mathbb{P}(Z=n-1) - (n-2)H_Z(n-1)\,,$$

et finalement

$$\sum_{k=n-1}^{q} H_Z(k) = \sum_{j=n-1}^{q} j\mathbb{P}(Z=j) - (n-2)H_Z(n-1)\,,$$

ce qui est la formule au rang $n-1$. La formule est donc vraie pour tout entier n compris entre 0 et q.

4. En particulier, si $n=0$,

$$\sum_{k=0}^{q} H_Z(k) = \sum_{j=0}^{q} j\mathbb{P}(Z=j) + H_Z(0)\,,$$

ou encore en soustrayant $H_Z(0)$ aux deux membres

$$\sum_{k=1}^{q} H_Z(k) = \sum_{j=0}^{q} j\mathbb{P}(Z=j)\,.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{q} H_Z(k)\,.$$

Remarquons aussi que si $k>q$, on a $H_Z(k)=0$, donc, si $N \geq q$

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{N} H_Z(k)\,.$$

Soit N un nombre supérieur aux plus grandes valeurs prises par X et Y. Alors

$$\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{N} H_X(k) - \sum_{k=1}^{N} H_Y(k) = \sum_{k=1}^{N} (H_X(k) - H_Y(k))\,,$$

mais comme on a, pour tout entier k,

$$H_X(k) \geq H_Y(k)\,,$$

tous les nombres $H_X(k) - H_Y(k)$ sont positifs, et leur somme $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)$ également. On en déduit que

$$\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)\,.$$

Partiel 2

124 Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Montrer l'équivalence des deux propriétés $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ définies par

$$\mathcal{Q}(X,Y)\ :\qquad (\forall x \in X(\Omega))\ (\forall y \in Y(\Omega)) \qquad \{X = x\} \perp\!\!\!\perp \{Y = y\}$$

$$\mathcal{R}(X,Y)\ :\qquad (\forall A \subset X(\Omega))\ (\forall B \subset Y(\Omega)) \qquad \{X \in A\} \perp\!\!\!\perp \{Y \in B\}$$

$\boxed{\textit{Solution}}$

Si $\mathcal{R}(X,Y)$ est vérifiée, et si x et y sont dans $X(\Omega)$, on peut prendre $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$, alors $\{X \in A\} \perp\!\!\!\perp \{Y \in B\}$ n'est autre que $\{X = x\} \perp\!\!\!\perp \{Y = y\}$, et $\mathcal{Q}(X,Y)$ est vérifiée.

Si $\mathcal{Q}(X,Y)$ est vérifiée, soit A et B deux sous-ensembles de Ω.

Si A ou B est vide on a

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = 0 = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(X \in B)\,.$$

Si A et B ne sont pas vides, posons

$$A = \{a_1, \dots, a_n\} \quad \text{et} \quad B = \{b_1, \dots, b_p\}\,.$$

Alors

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}\left(\biguplus_{i=1}^{n} \biguplus_{j=1}^{p} \{X = a_i, Y = b_j\}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(X = a_i, Y = b_j)\,,$$

mais, puisque $\mathcal{Q}(X,Y)$ est vérifiée, on a, quels que soient i et j,

$$\mathbb{P}(X = a_i, Y = b_j) = \mathbb{P}(X = a_i)\mathbb{P}(Y = b_j)\,,$$

donc

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(X = a_i)(Y = b_j)\,.$$

Cette somme n'est autre que le produit

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = a_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(Y = b_j)\right) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(X \in B)\,,$$

et finalement

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(X \in B)\,.$$

On a donc bien montré que $\mathcal{R}(X,Y)$ est vérifiée.

125 Soit $M_1, \ldots, M_n$ des événements aléatoires deux à deux incompatibles ayant tous la même probabilité a non nulle et L un autre événement aléatoire associé au même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

Exprimer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}\left(L \mid \biguplus_{j=1}^{n} M_j\right)$ en fonction des nombres $p_k = \mathbb{P}(L \mid M_k)$.

Solution

On a, par définition d'une probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}\left(L \mid \biguplus_{k=1}^{n} M_k\right) = \frac{\mathbb{P}\left(L \cap \biguplus_{k=1}^{n} M_k\right)}{\mathbb{P}\left(\biguplus_{k=1}^{n} M_k\right)}.$$

Mais, d'après la distributivité de l'intersection sur la réunion

$$L \cap \bigcup_{k=1}^{n} M_k = \bigcup_{k=1}^{n} (L \cap M_k),$$

et par ailleurs, si $k \neq i$,

$$(L \cap M_k) \cap (L \cap M_i) = L \cap (M_k \cap M_i) = L \cap \emptyset = \emptyset,$$

donc

$$L \cap \biguplus_{k=1}^{n} M_k = \biguplus_{k=1}^{n} (L \cap M_k),$$

et

$$\mathbb{P}\left(L \cap \biguplus_{k=1}^{n} M_k\right) = \mathbb{P}\left(\biguplus_{k=1}^{n} (L \cap M_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(L \cap M_k).$$

Mais

$$\mathbb{P}(L \cap M_k) = \mathbb{P}(M_k)\mathbb{P}(L \mid M_k) = a\, p_k,$$

donc

$$\mathbb{P}\left(L \cap \biguplus_{k=1}^{n} M_k\right) = a \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

Par ailleurs

$$\mathbb{P}\left(\biguplus_{k=1}^{n} M_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(M_k) = \sum_{k=1}^{n} a = na,$$

d'où finalement

$$\mathbb{P}\left(L \mid \biguplus_{k=1}^{n} M_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

126 Un dé équilibré porte un point sur une de ses six faces, deux points sur deux autres faces et trois points sur chacune des trois dernières faces. On note X la variable aléatoire « nombre de points obtenus » lors d'un lancer de ce dé.

1. Calculer la variance de X.
2. Après avoir lancé le dé, on lance une pièce de monnaie (équilibrée) autant de fois que le dé a montré de points et on note Y la variable aléatoire « nombre de piles obtenus en tout ». Vérifier que $\mathbb{P}(Y = 2 \mid X = 3) = \frac{3}{8}$.
3. Déterminer la loi de probabilité du couple (X, Y).
4. En déduire la loi de probabilité de Y et vérifier que l'événement « Y est pair » et l'événement « Y est impair » ont la même probabilité.

Solution

1. Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. Comme il y a i faces sur 6 de numéro i, la probabilité de sortie du numéro i est proportionnelle à i et vaut

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{i}{6}\,.$$

Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{3} \frac{i^2}{6} = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{3} \frac{i^3}{6} = 6\,,$$

d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 6 - \frac{49}{9} = \frac{5}{9}\,.$$

2. Cherchons la probabilité $\mathbb{P}(Y = j \mid X = i)$, lorsque $0 \leq j \leq i$ et $1 \leq i \leq 3$.

Sachant que $X = i$, on compte le nombre de piles parmi i lancers, où pile a une probabilité 1/2 de sortir. On a donc une loi binomiale $\mathcal{B}(i, 1/2)$ et

$$\mathbb{P}(Y = j \mid X = i) = \binom{i}{j} \frac{1}{2^i}\,.$$

En particulier

$$\mathbb{P}(Y = 2 \mid X = 3) = \binom{3}{2} \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}\,.$$

3. On a, lorsque $0 \leq j \leq i$ et $1 \leq i \leq 3$,

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(Y = j \mid X = i)\mathbb{P}(X = i) = \binom{i}{j} \frac{1}{2^i} \frac{i}{6}\,,$$

ce qui donne le tableau des p_{ij} :

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	1/12	1/12	0	0
$i = 2$	1/12	1/6	1/12	0
$i = 3$	1/16	3/16	3/16	1/16

4. En additionnant les lignes de ce tableau, on obtient la loi de Y :

$$\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{11}{48}$$
$$\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$$
$$\mathbb{P}(Y=2)=\frac{1}{12}+\frac{3}{16}=\frac{13}{48}$$
$$\mathbb{P}(Y=3)=\frac{1}{16}\,.$$

On constate que

$$\mathbb{P}(Y \text{pair})=\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(Y=2)=\frac{11}{48}+\frac{13}{48}=\frac{1}{2}\,,$$

et

$$\mathbb{P}(Y \text{impair})=\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(Y=3)=\frac{7}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}\,,$$

donc ces deux probabilités sont bien égales.

127 1. Montrer que, si deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes, aucune des deux n'est dégénérée.

2. Soit U, V, W des variables aléatoires réelles indépendantes qui ne peuvent prendre chacune qu'un nombre fini de valeurs distinctes.
Calculer $\mathbb{C}\mathrm{ov}(U+V,V+W)$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante d'indépendance des variables aléatoires $U+V$ et $V+W$.

Solution

1. Si A est un événement de probabilité 0 ou 1, il est indépendant de tout autre événement. En effet, si $\mathbb{P}(A)=0$, on a, quel que soit l'événement B,

$$A\cap B\subset A\,,$$

donc

$$0\leq \mathbb{P}(A\cap B)\leq \mathbb{P}(A)=0\,,$$

ce qui montre que

$$\mathbb{P}(A\cap B)=0=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,.$$

Si $\mathbb{P}(A)=1$, alors $\mathbb{P}(A^C)=0$, donc, B et A^C sont indépendants, et

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A^C\cap B)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,.$$

On en déduit alors que toute variable aléatoire X dégénérée est indépendante d'une variable Y quelconque définie sur le même espace $(\Omega,\mathbb{P})$. En effet, si a appartient à $X(\Omega)$, on a soit $\mathbb{P}(X=a)=1$, soit $\mathbb{P}(X = a) = 0$, et donc, $\mathbb{P}(X = a)$ est indépendant de tout événement $\mathbb{P}(Y = b)$, ce qui montre que X et Y sont indépendantes.

Une variable dégénérée est donc indépendante de toute autre variable, et par suite si deux variables sont dépendantes, elles ne peuvent être dégénérées.

2. En utilisant la bilinéarité de la covariance, on a

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(U + V, V + W) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(U, V) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(U, W) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(V, V) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(V, W)\,.$$

comme les variables sont indépendantes, donc indépendantes deux à deux, on a

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(U, V) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(U, W) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(V, W) = 0\,,$$

donc

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(U + V, V + W) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(V, V) = \mathbb{V}(V)\,.$$

Si les variables $U + V$ et $V + W$ sont indépendantes on a $\mathbb{C}\mathrm{ov}(U + V, V + W) = 0$ donc $\mathbb{V}(V) = 0$ ce qui implique que V est dégénérée.

Réciproquement, supposons que V est dégénérée, et soit v dans $V(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(V = v) = 1$. L'événement $\{V = v\}$ est indépendant de tout autre événement. Alors, si u appartient à $U(\Omega)$ et w à $W(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U + V = u, V + W = w) &= \mathbb{P}(U + V = u, V + W = w, V = v)\\ &= \mathbb{P}(U = u - v, W = w - v, V = v)\\ &= \mathbb{P}(U = u - v, W = w - v)\,,\end{aligned}$$

et de même

$$\mathbb{P}(U + V = u) = \mathbb{P}(U + V = u, V = v) = \mathbb{P}(U = u - v, V = v) = \mathbb{P}(U = u - v)\,,$$

ainsi que

$$\mathbb{P}(V + W = w) = \mathbb{P}(V + W = w, V = v) = \mathbb{P}(W = w - v, V = v) = \mathbb{P}(W = w - v)\,.$$

Mais puisque U et W sont indépendantes

$$\mathbb{P}(U = u - v, W = w - v) = \mathbb{P}(U = u - v)\mathbb{P}(W = w - v)\,,$$

alors, il résulte de tout ce qui précède que

$$\mathbb{P}(U + V = u, U + W = w) = \mathbb{P}(U + V = u)\mathbb{P}(V + W = w)\,,$$

et donc $U + V$ et $V + W$ sont indépendantes.

128 Soit (Z, Z') un couple de variables aléatoires réelles non dégénérées qui ne peuvent prendre chacune qu'un nombre fini de valeurs distinctes, d'écart-type respectifs σ et $\sigma' = 2\sigma$. Déterminer le

EI 158

coefficient de corrélation linéaire ρ du couple $(Z+Z', Z-Z')$ si celui du couple (Z, Z') est $r = -\frac{3}{4}$.

$\boxed{\textit{Solution}}$

En utilisant la bilinéarité de la covariance, on a

$$\mathbb{C}\text{ov}(Z+Z', Z-Z') = \mathbb{V}(Z) - \mathbb{V}(Z') = \sigma^2 - \sigma'^2 = -3\sigma^2\,.$$

On a également

$$\sigma^2_{Z+Z'} = \mathbb{V}(Z+Z') = \mathbb{V}(Z) + 2\,\mathbb{C}\text{ov}(Z, Z') + \mathbb{V}(Z') = \sigma^2 + 2\sigma\sigma' r_{Z,Z'} + \sigma'^2 = \sigma^2(1+4r+4) = 2\sigma^2\,,$$

et

$$\sigma^2_{Z-Z'} = \mathbb{V}(Z-Z') = \mathbb{V}(Z) - 2\,\mathbb{C}\text{ov}(Z, Z') + \mathbb{V}(Z') = \sigma^2 - 2\sigma\sigma' r_{Z,Z'} + \sigma'^2 = \sigma^2(1-4r+4) = 8\sigma^2\,.$$

Alors

$$\rho = \frac{\mathbb{C}\text{ov}(Z+Z', Z-Z')}{\sigma_{Z+Z'}\sigma_{Z-Z'}} = \frac{-3\sigma^2}{4\sigma^2} = -\frac{3}{4}\,.$$

Partiel 3

129 Soit (U, V) un couple de variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent la même loi binomiale $\mathcal{B}(2, 1/2)$.

1. On note $S = (U-1)^2 + (V-1)^2$.
   (a) Vérifier que S suit la même loi que U.
   (b) Calculer l'écart-type de S^2.
2. On note $T = (U-1)(V-1) + 1$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(S(T-1))$.
   (b) Déterminer la loi de T.
   (c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (S, T).
   (d) Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?

Solution

1. (a) Une variable X suivant une loi $\mathcal{B}(n, p)$ est telle que $X(\Omega) = [\![\, 0,\, 1 \,]\!]$ et si k appartient à $X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} .$$

Pour les variables U et V, on a donc

$$U(\Omega) = V(\Omega) = \{0, 1, 2\} ,$$

et

$$\mathbb{P}(U = 0) = \mathbb{P}(V = 0) = \mathbb{P}(U = 2) = \mathbb{P}(V = 2) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(V = 1) = \frac{1}{2} .$$

On remarque que $(U-1)(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et donc $(U-1)^2(\Omega) = \{0, 1\}$. De plus

$$\mathbb{P}((U-1)^2 = 0) = \mathbb{P}(U = 1) = \frac{1}{2} ,$$

donc

$$\mathbb{P}((U-1)^2 = 1) = 1 - \mathbb{P}((U-1)^2 = 0) = \frac{1}{2} ,$$

et $(U-1)^2$ suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. Il en est de même de $(V-1)^2$. Comme les variables U et V sont indépendantes, les variables $(U-1)^2$ et $(V-1)^2$ le sont aussi, et S est la somme de deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$, elle suit alors une loi binomiale $\mathcal{B}(2, 1/2)$.

(b) Une variable suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ a pour espérance np et pour variance npq, donc U et V ont pour espérance 1, et pour variance $1/2$.

Pour tout entier n on a $(U-1)^{2n} = (U-1)^2$, puisque $(U-1)^2$ ne prend que les valeurs 0 et 1, et donc

$$\mathbb{E}((U-1)^{2n}) = \mathbb{E}((V-1)^{2n}) = \mathbb{E}((U-1)^2) = \mathbb{V}(U) = \frac{1}{2} .$$

Alors
$$\mathbb{E}(S^2) = \mathbb{E}((U-1)^4 + 2(U-1)^2(V-1)^2 + (V-1)^4)\,,$$
et en utilisant la linéarité de l'espérance
$$\mathbb{E}(S^2) = \mathbb{E}((U-1)^4) + 2\mathbb{E}((U-1)^2(V-1)^2) + \mathbb{E}((V-1)^4)\,,$$
et puisque $(U-1)^2$ et $(V-1)^2$ sont indépendantes
$$\mathbb{E}((U-1)^2(V-1)^2) = \mathbb{E}((U-1)^2)\mathbb{E}((V-1)^2)\,.$$
Finalement
$$\mathbb{E}(S^2) = \mathbb{E}((U-1)^4) + 2\mathbb{E}((U-1)^2)\mathbb{E}((V-1)^2) + \mathbb{E}((V-1)^4) = \frac{3}{2}\,.$$
De même, par la formule du binôme de Newton,
$$\mathbb{E}(S^4) = \mathbb{E}((U-1)^8 + 4(U-1)^6(V-1)^2 + 6(U-1)^4(V-1)^4 + 4(U-1)^2(V-1)^6 + (V-1)^8)\,,$$
et en utilisant encore la linéarité de $\mathbb{E}$ et l'indépendance des variables U et V,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S^4) &= \mathbb{E}((U-1)^8) + 4\mathbb{E}((U-1)^6)\mathbb{E}((V-1)^2) + 6\mathbb{E}((U-1)^4)\mathbb{E}((V-1)^4)\\ &\qquad +4\mathbb{E}((U-1)^2)\mathbb{E}((V-1)^6) + \mathbb{E}((V-1)^8)\\ &= \frac{1}{2} + 4\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + 6\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + 4\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\ &= \frac{9}{2}\,.\end{aligned}$$
Alors
$$\mathbb{V}(S^2) = \mathbb{E}(S^4) - \mathbb{E}(S^2)^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}\,,$$
et l'écart-type de S^2 vaut $3/2$.

2. (a) On a
$$\mathbb{E}(S(T-1)) = \mathbb{E}((U-1)^3(V-1) + (U-1)(V-1)^3)\,,$$
et en utilisant toujours la linéarité de $\mathbb{E}$ et l'indépendance des variables U et V,
$$\mathbb{E}(S(T-1)) = \mathbb{E}((U-1)^3)\mathbb{E}(V-1) + \mathbb{E}(U-1)\mathbb{E}((V-1)^3)\,.$$
Mais
$$\mathbb{E}(U-1) = \mathbb{E}(U) - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(V-1) = \mathbb{E}(V) - 1 = 0\,,$$
donc
$$\mathbb{E}(S(T-1)) = 0\,.$$
(b) Faisons le tableau des valeurs de T.

	$U=0$	$U=1$	$U=2$
$V=0$	$T=2$	$T=1$	$T=0$
$V=1$	$T=1$	$T=1$	$T=1$
$V=2$	$T=0$	$T=1$	$T=2$

Donc $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, et

$$\mathbb{P}(T = 0) = \mathbb{P}(U = 0, V = 2) + \mathbb{P}(U = 2, V = 0)\,,$$

et puisque les variables U et V sont indépendantes

$$\mathbb{P}(T = 0) = \mathbb{P}(U = 0)\mathbb{P}(V = 2) + \mathbb{P}(U = 2)\mathbb{P}(V = 0) = \frac{1}{8}\,.$$

De même

$$\mathbb{P}(T = 2) = \mathbb{P}(U = 0)\mathbb{P}(V = 0) + \mathbb{P}(U = 2)\mathbb{P}(V = 2) = \frac{1}{8}\,.$$

Alors

$$\mathbb{P}(T = 1) = 1 - \mathbb{P}(T = 0) - \mathbb{P}(T = 2) = \frac{3}{4}\,.$$

(c) On a déjà

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}((U - 1)^2) + \mathbb{E}((V - 1)^2) = 2\mathbb{V}(U) = 1\,.$$

On a aussi

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{P}(T = 1) + 2\mathbb{P}(T = 2) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1\,.$$

Par ailleurs

$$\mathbb{E}(S(T - 1)) = \mathbb{E}(ST) - \mathbb{E}(S) = 0\,,$$

donc

$$\mathbb{E}(ST) = \mathbb{E}(S) = 1\,.$$

Il en résulte que

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(S, T) = \mathbb{E}(ST) - \mathbb{E}(S)\mathbb{E}(T) = 0\,.$$

(d) Regardons par exemple $\mathbb{P}(S = 0, T = 0)$. On a

$$\{S = 0\} = \{U = 1, V = 1\}\,.$$

Mais si $U(\omega) = V(\omega) = 1$, alors $T(\omega) = 1$. Donc l'événement $\{S = 0, T = 0\}$ est impossible et sa probabilité est nulle, alors que $\mathbb{P}(S = 0)\mathbb{P}(T = 0)$ n'est pas nul. Les variables aléatoires S et T ne sont pas indépendantes.

130 1. (a) Soit Z une variable aléatoire réelle qui possède une espérance mathématique m et un écart-type σ. Montrer que, si $\varepsilon > \sigma$, on peut majorer $\mathbb{P}(|Z - m| \geq \varepsilon)$ par un nombre strictement inférieur à 1 qui ne dépend que de σ et ε.
(b) Que peut-on en déduire pour $\mathbb{P}(-2 < Z < 4)$ si $m = 1$ et $\sigma = \sqrt{2}$?

2. (a) On répète des lancers d'une pièce de monnaie (équilibrée) tant qu'elle montre « pile » et on note N la variable aléatoire *nombre de « piles » observés* (N prend la valeur 0 si la pièce montre « face » au premier lancer).
i. Calculer $\mathbb{P}(N = n)$ si n est un entier naturel.
ii. En déduire la probabilité d'obtenir une infinité de « piles ».

(b)
i. Déterminer la fonction génératrice g_N.
ii. En déduire que N possède des moments d'ordres 1, 2, 3 et calculer son espérance mathématique et son écart-type.
iii. Que vaut $\mathbb{P}(-2 < N < 4)$?
iv. Calculer le moment centré d'ordre 3 de N.

Solution

1. (a) Si l'on applique l'inégalité de Tchebychev, on obtient

$$\mathbb{P}(|Z - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} ,$$

ce qui donne bien une majoration par un nombre strictement inférieur à 1.

(b) En particulier, si l'on prend $\varepsilon = 3$, $m = 1$ et $\sigma = \sqrt{2}$, l'inégalité précédente donne

$$\mathbb{P}(|Z - 1| \geq 3) \leq \frac{2}{9} ,$$

ou encore

$$1 - \mathbb{P}(|Z - 1| < 3) \leq \frac{2}{9} ,$$

Mais

$$\{|Z - 1| < 3\} = \{-2 < Z < 4\} ,$$

d'où

$$\mathbb{P}(-2 < Z < 4) \geq 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} .$$

2. (a) i. L'événement $\{N = n\}$ est réalisé lorsque n piles puis un face ont été obtenus. Il y a donc $N + 1$ lancers de la pièce et chaque lancer a une probabilité $1/2$ d'obtenir pile ou face. Donc

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2^{n+1}} .$$

ii. Soit U_n l'événement « sur les n premiers lancers, on a obtenu n fois piles ». La probabilité de U_n vaut 2^{-n}. L'intersection des événements U_n est l'événement U « on observe une infinité de piles », et comme la suite U_n est décroissante ($U_{n+1} \subset U_n$), on a

$$\mathbb{P}(U) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim_{n \to +\infty} 2^{-n} = 0 .$$

(b) i. On a

$$g_N(s) = \mathbb{E}(s^N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{2}\right)^n ,$$

donc

$$g_N(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{s}{2}} = \frac{1}{2 - s} = (2 - s)^{-1} .$$

ii. La fonction obtenue est une série entière de rayon 2, car la série géométrique de raison $s/2$ converge si et seulement si $|s/2| < 1$, soit $|s| < 2$. Comme le rayon de convergence est strictement plus grand que 1, la variable N possède donc des moments de tous ordres. On obtient en dérivant les moments factoriels. On a successivement

$$g_N'(s) = \mathbb{E}(Ns^{N-1}) = (2-s)^{-2}\,,\ g_N''(s) = \mathbb{E}(N(N-1)s^{N-2}) = 2\,(2-s)^{-3}\,,$$

donc

$$\mathbb{E}(N) = g_N'(1) = 1\,,\ \mathbb{V}(N) = g_N''(1) + g_N'(1) - g_N'(1)^2 = 2+1-1 = 2\,,$$

et l'écart-type de N vaut $\sqrt{2}$.

iii. Comme N ne prend que des valeurs entières positives, on a

$$\mathbb{P}(-2 < N < 4) = \mathbb{P}(0 \le N \le 3) = \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{3}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}\,.$$

Remarque : on vérifie bien que $15/16 \ge 7/9$.

iv. On a

$$g_N'''(s) = \mathbb{E}(N(N-1)(N-2)s^{N-3}) = 6\,(2-s)^{-4}\,,$$

donc

$$\mathbb{E}(N(N-1)(N-2)) = 6\,.$$

Alors, en écrivant

$$N(N-1)(N-2) = (N-1+1)(N-1)(N-1-1) = ((N-1)^2-1)(N-1) = (N-1)^3 - (N-1)\,,$$

on obtient

$$\mathbb{E}((N-1)^3) = \mathrm{E}(N(N-1)(N-2)) + \mathbb{E}(N-1) = \mathrm{E}(N(N-1)(N-2)) = 6\,.$$

131 Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé infini dénombrable. On note X une variable aléatoire non dégénérée définie sur Ω et à valeurs dans $[\,0,\,1\,]$.

1. (a) Montrer que X possède des moments de tous ordres entiers naturels. (On pourra noter $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \ldots\}$).
(b) Montrer que $0 < \mathbb{E}(X)^2 < \mathbb{E}(X^2) \le \mathbb{E}(X) < 1$.

2. On suppose de plus que $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \mathbb{P}(X < \frac{1}{n}) = \dfrac{n+2}{2n+3}$.
(a) Que vaut $\mathbb{P}(X = 1)$?
(b) Pour tout entier naturel non nul n, on note $D_n = \{X < 1/n\}$.
Quel est l'événement aléatoire $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$?

(c) Montrer que $\mathbb{P}(0 < X < 1) = 0,1$.

3. On suppose en outre que les seules valeurs que peut prendre X sont 0 et les inverses des entiers naturels : 1, 1/2, 1/3, ...
(a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
i. Quel est l'événement aléatoire $\{\frac{1}{n} \leq X < \frac{1}{n-1}\}$?
ii. Que vaut $\mathbb{P}(X = 1/n)$?
(b)
i. Calculer $\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right) - \left(\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}\right)$ si $n \in \mathbb{N}^*$.
ii. En déduire une valeur approchée de $\mathbb{E}(X)$ (on pourra encadrer $1/n$ par deux fractions ayant des dénominateurs impairs bien choisis).

Solution

1. (a) La série de terme général $\mathbb{P}(X = x_n)$ est une série positive convergente (de somme 1). Or, puisque x_n appartient à $[0,\, 1]$, on a, si k est un entier positif,

$$|x_n^k \mathbb{P}(X = x_n)| \leq \mathbb{P}(X = x_n)\,,$$

et il en résulte que la série de terme général $x_n^k \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument. Donc la variable X possède des moments de tous ordres.

Comme on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \geq 0\,,$$

on en déduit que

$$\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\,.$$

Si l'on avait égalité, alors $\mathbb{V}(X)$ serait nul et X serait dégénérée, ce qui n'est pas le cas. Donc cette inégalité est stricte.

Comme $X \leq 1$, on en déduit $X^2 \leq X$ et $\mathbb{E}(X^2) \leq \mathbb{E}(X)$.

On en déduit aussi $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(1) = 1$.

On a également $\mathbb{E}(X)^2 \geq 0$.

En particulier on a obtenu l'encadrement

$$\mathbb{E}(X)^2 < \mathbb{E}(X^2) \leq \mathbb{E}(X)\,,$$

donc

$$\mathbb{E}(X)^2 < \mathbb{E}(X)\,,$$

et il est impossible d'avoir $\mathbb{E}(X) = 0$ ou $\mathbb{E}(X) = 1$. Donc

$$\mathbb{E}(X) < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \mathbb{E}(X)^2\,.$$

2. (a) On a $\mathbb{P}(X < 1) = 3/5$. Alors, puisque $X(\Omega)$ est inclus dans $[0,\, 1]$

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = \frac{2}{5}\,.$$

(b) Si ω appartient à $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$, on a pour tout $n \geq 0$

$$0 \leq X(\omega) < \frac{1}{n}\,,$$

donc $X(\omega) = 0$. On en déduit que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} D_n \subset \{X = 0\}\,.$$

Comme par ailleurs $\{X = 0\}$ est inclus dans tous les D_n on a l'inclusion inverse, d'où l'égalité

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} D_n = \{X = 0\}\,.$$

(c) Comme la suite D_n est décroissante, on obtient donc

$$\mathbb{P}(X = 0) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}\,.$$

Alors

$$\mathbb{P}(0 < X < 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}\,.$$

3. (a) i. Comme X ne prend comme valeurs non nulles que des inverses de nombre entier, on a

$$\left\{\frac{1}{n} \leq X < \frac{1}{n-1}\right\} = \left\{X = \frac{1}{n}\right\}\,,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\left\{X < \frac{1}{n-1}\right\} \setminus \left\{X < \frac{1}{n}\right\} = \left\{X = \frac{1}{n}\right\}\,.$$

ii. On a alors

$$\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{n}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \leq X < \frac{1}{n-1}\right) = \mathbb{P}\left(X < \frac{1}{n-1}\right) - \mathbb{P}\left(X < \frac{1}{n}\right)\,.$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{n+2}{2n+3} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\,.$$

(b) i. Posons

$$u_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\,.$$

On obtient après calcul,

$$u_n - u_{n+1} = \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{8}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\,.$$

ii. On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \mathbb{P}\left(X = \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\,.$$

On peut alors écrire

$$\frac{2}{2n+5} \leq \frac{1}{n} = \frac{2}{2n} \leq \frac{2}{2n-1}\,,$$

et l'on en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \leq \mathbb{E}(X) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\,.$$

Mais d'après ce qui précède

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{4}\,(u_n - u_{n+1}) \quad \text{et} \quad \frac{2}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{4}\,(u_{n+1} - u_{n+2})\,,$$

donc

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_{n+2}) \leq \mathbb{E}(X) \leq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})\,.$$

Puisque l'on obtient des séries télescopiques dans les membres qui encadrent $\mathbb{E}(X)$ on peut effectuer la somme de ces séries, et puisque la suite (u_n) converge vers 0, on trouve finalement

$$\frac{1}{4}\, u_2 \leq \mathbb{E}(X) \leq \frac{1}{4}\, u_1\,,$$

soit

$$\frac{1}{30} \leq \mathbb{E}(X) \leq \frac{1}{6}\,.$$

On peut prendre comme valeur approchée de $\mathbb{E}(X)$ le milieu de l'intervalle $[\,1/30,\ 1/6\,]$, soit $1/10 = 0,1$ avec une erreur inférieure à la moitié de la longueur de cet intervalle, soit

$$|\mathbb{E}(X) - 0,1| \leq \frac{1}{15}\,.$$