Examen corrigé du Cours de logique

Exercice 1 (Théorie des ensembles)
On travaille dans un modèle $\mathcal{U}$ de ZFC. On rappelle que la *clôture transitive de* x, notée $ct(x)$ est le plus petit ensemble transitif contenant x comme sous-ensemble.

Pour tout cardinal infini κ, $\mathcal{H}_\kappa$ désigne la collection des ensembles x tels que $|ct(x)| < \kappa$.

Un cardinal κ est dit *fortement limite* si $2^\lambda < \kappa$ dès que $\lambda < \kappa$.

1. Montrer que $\mathcal{H}_\kappa$ est un ensemble transitif tel que $\mathcal{H}_\kappa \subseteq V_\kappa$.
2. Montrer que $\kappa \subseteq \mathcal{H}_\kappa$.
3. Montrer que si $x, y \in \mathcal{H}_\kappa$ alors $\bigcup x$ et $\{x, y\}$ sont dans $\mathcal{H}_\kappa$.
4. Montrer (proprement) que la structure $(\mathcal{H}_\kappa; \in\restriction_{\mathcal{H}_\kappa \times \mathcal{H}_\kappa})$ satisfait l'axiome de l'union et l'axiome d'extensionalité.
5. Montrer que $\mathcal{H}_\omega = V_\omega$.
6. Montrer que $\mathcal{P}(\omega) \in V_{\aleph_1} \setminus \mathcal{H}_{\aleph_1}$.
7. Soit κ un cardinal régulier. Montrer que pour tout x les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) $x \in \mathcal{H}_\kappa$;
   (b) $x \subseteq \mathcal{H}_\kappa$ et $|x| < \kappa$.
8. Montrer que $\mathcal{H}_\kappa = V_\kappa$ pour tout cardinal régulier et fortement limite κ.
   [Indication : On pourra commencer par montrer que si $\alpha \in \kappa$ alors $|V_\alpha| < \kappa$.]
9. Soit κ un cardinal régulier. Montrer que $(\mathcal{H}_\kappa; \in\restriction_{\mathcal{H}_\kappa \times \mathcal{H}_\kappa})$ satisfait l'axiome des parties si et seulement si κ est fortement limite.

Solution 1
1. On note que $x \mapsto ct(x)$ est donné par une classe fonctionnelle. Il s'en suit que $\mathcal{H}_\kappa$ est une classe. Par (AF) et un résultat du cours on a $\mathcal{U} \models \forall x \exists \alpha\, x \in V_\alpha$.

   Pour $a \in \mathcal{H}_\kappa$ on a $\lambda = \mid ct(a) \mid < \kappa$, d'où $ct(a) \in V_{\lambda+1}$ (par un résultat du cours) et donc $a \in V_{\lambda+2} \subseteq V_\kappa$. Cela montre que $\mathcal{H}_\kappa \subseteq V_\kappa$; en particulier, $\mathcal{H}_\kappa$ est un ensemble par compréhension.

   La transitivité de $\mathcal{H}_\kappa$ suit de $b \in a \Rightarrow ct(b) \subseteq ct(a)$.
2. Tout ordinal α est transitif. Si $\alpha \in \kappa$, alors $\mid \alpha \mid < \kappa$ car κ est un cardinal, et donc $\alpha \in \mathcal{H}_\kappa$ par définition, d'où $\kappa \subseteq \mathcal{H}_\kappa$.
3. Soit $x \in \mathcal{H}_\kappa$ et $z = \bigcup x$. Alors $ct(z) \subseteq ct(x)$, d'où $z \in \mathcal{H}_\kappa$.

   On a $ct(\{x, y\}) = \{x, y\} \cup ct(x) \cup ct(y)$. Donc $x, y \in \mathcal{H}_\kappa \Rightarrow \{x, y\} \in \mathcal{H}_\kappa$.
4. Soit $\mathcal{M}_\kappa = (\mathcal{H}_\kappa; \in\restriction_{\mathcal{H}_\kappa \times \mathcal{H}_\kappa})$ la $\mathcal{L}_{ens}$-structure induite sur $\mathcal{H}_\kappa$.

   Pour vérifier (Ext), il faut montrer : $\mathcal{M}_\kappa \models \forall x, y\, (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x \doteq y)$.

   Pour cela, soient $a, b \in \mathcal{H}_\kappa$ tels que pour tout $c \in \mathcal{H}_\kappa$ on ait $c \in a$ ssi $c \in b$. Comme $\mathcal{H}_\kappa$ est transitif par (1), on a alors $c \in a$ ssi $c \in b$ pour tout $c \in U$, d'où $a = b$ par extensionalité dans $\mathcal{U}$.

   Pour vérifier $(\bigcup)$, il faut montrer : $\mathcal{M}_\kappa \models \forall x \exists z\, (\forall y (\exists u (u \in x \wedge y \in u) \leftrightarrow y \in z))$.

   Pour cela, il suffit de montrer

   $$\mathcal{M}_\kappa \models \forall y (\exists u (u \in a \wedge y \in u) \leftrightarrow y \in b)$$

   pour tout $a \in \mathcal{H}_\kappa$, où $b := \bigcup a \in \mathcal{H}_\kappa$ (par (3)).

   Soit $c \in \mathcal{H}_\kappa$. On a $c \in b \Leftrightarrow$ il existe $u \in b$ tel que $c \in u \Leftrightarrow$ il existe $u \in \mathcal{H}_\kappa$ tel que $u \in b$ et $c \in u$ (par transitivité de $\mathcal{H}_\kappa$). On conclut.

5. L'inclusion $\mathcal{H}_\omega \subseteq V_\omega$ a été montré dans (1). Réciproquement, soit $a \in V_\omega$. Alors il existe $n \in \omega$ tel que $a \in V_n$, et en particulier $ct(a) \subseteq V_n$ par transitivité de V_n. Par induction, on montre que V_n est fini pour tout $n \in \omega$, d'où $a \in \mathcal{H}_\omega$.

6. Clairement, $\mathcal{P}(\omega) \notin \mathcal{H}_{\aleph_1}$ pour des raisons de cardinalité. Or $\omega \subseteq V_\omega$ entraîne que $\mathcal{P}(\omega) \subseteq V_{\omega+1}$, d'où $\mathcal{P}(\omega) \in V_{\omega+2} \subseteq V_{\aleph_1}$.

7. Soit κ régulier. (a)$\Rightarrow$(b) découle de la transitivité de $\mathcal{H}_\kappa$ et du fait que $ct(x) \supseteq x$.

   (b)$\Rightarrow$(a) : On a $ct(x) = x \cup \bigcup_{y \in x} ct(y)$. Alors $|\, ct(x)\,| \leq |\, x\,| + |\, x\,| \cdot \sup\{|\, y\,|, y \in x\}$.
   On a $|\, x\,|, |\, ct(y)\,| < \kappa$, d'où $\sup\{|\, y\,|, y \in x\} < \kappa$ par régularité de κ. On conclut que $|\, ct(x)\,| < \kappa$.

8. Par (1) on a $\mathcal{H}_\kappa \subseteq V_\kappa$. Pour établir l'autre inclusion, montrons d'abord (par induction sur α) que $|\, V_\alpha\,| < \kappa$ pour tout $\alpha < \kappa$. Le cas $\alpha = 0$ est clair ; l'étape successeur suit du fait que κ est fortement limite ; l'étape limite suit de la régularité de κ. Comme V_α est transitif, on a alors $V_\alpha \in \mathcal{H}_\kappa$ pour tout $\alpha < \kappa$, d'où $V_\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} V_\alpha \subseteq \mathcal{H}_\kappa$.

9. La transitivité de $\mathcal{H}_\kappa$ entraîne que pour tout $a, b \in \mathcal{H}_\kappa$ on a $\mathcal{M}_\kappa \models a \subseteq b$ ssi $\mathcal{U} \models a \subseteq b$.

   Soit maintenant κ régulier. On suppose d'abord que κ est fortement limite. Soit $c \in \mathcal{H}_\kappa$. Alors $c \in V_\alpha$ pour un $\alpha < \kappa$ par (8), d'où $d = \mathcal{P}(c) \in V_{\alpha+2} \subseteq \mathcal{H}_\kappa$. Il s'en suit que $\mathcal{H}_\kappa \models \forall z(z \subseteq c \leftrightarrow z \in b)$, ce qui montre que $\mathcal{M}_\kappa$ satisfait (Parties).

   Réciproquement, on suppose κ régulier et qu'il existe $\lambda < \kappa$ avec $2^\lambda \geq \kappa$. Par (2) on a $\lambda \in \mathcal{H}_\kappa$. Comme $ct(x) \subseteq \lambda$ pour tout $x \subseteq \lambda$, on a $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq \mathcal{H}_\kappa$. Si $\mathcal{M}_\kappa \models \forall z(z \subseteq a \leftrightarrow z \in b)$, on a nécessairement $b \supseteq \mathcal{P}(\lambda)$ et en particulier $|\, b\,| \geq \kappa$. En particulier, $b \notin \mathcal{H}_\kappa$. Contradiction.

Exercice 2 (Théorie des modèles)
Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures et soit $A \subseteq M$. Une fonction $\sigma : A \mapsto N$ est un *isomorphisme partiel* si pour tous $a_1, \ldots, a_n \in A$ et formule $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}$, on a :

$$\mathcal{M} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathcal{N} \models \phi[\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)].$$

La structure $\mathcal{M}$ est dite *homogène* si pour tout $A \subset M$ fini, tout isomorphisme partiel $\sigma : A \to M$ et tout $B \subset M$ fini contenant A, il existe un isomorphisme partiel $\sigma' : B \to M$ tel que $\sigma'|_A = \sigma$.

On pose $\mathcal{L}_0 = \{<, s\}$ où $<$ est un symbole de relation binaire et s un symbole de fonction unaire.

Soit T_0 la $\mathcal{L}_0$-théorie stipulant que :

– $<$ définit un ordre total (strict) ;
– la fonction s est une bijection de l'univers dans lui-même ;
– pour tout x, $s(x)$ est le successeur de x au sens de l'ordre $<$, formellement :

$$\forall x(x < s(x) \wedge \forall y(y > x \to y \geq s(x))).$$

Soit $\mathcal{Z}$ la $\mathcal{L}_0$-structure d'univers $\mathbb{Z}$, où $<$ et s sont interprétés respectivement comme l'ordre et la fonction successeur naturels de $\mathbb{Z}$. La structure $\mathcal{Z}$ est clairement un modèle de T_0.
On admettra que la théorie T_0 admet l'élimination des quanteurs dans le langage $\mathcal{L}_0$.

1. Montrer que $\mathcal{Z}$ se plonge dans tout modèle de T_0. En utilisant l'élimination des quanteurs, en déduire que T_0 est complète.

2. Montrer que $\mathcal{Z}$ est homogène.

3. Soit $\mathcal{Z}_2$ la structure d'univers $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$ où $<$ est interprété par l'ordre lexicographique inverse et $s((n,t)) = (n+1,t)$. C'est un modèle de T_0 (on ne demande pas de le vérifier). Montrer que $\mathcal{Z}_2$ n'est pas homogène.

   Pour les questions 4 à 8, on travaille de nouveau avec un langage $\mathcal{L}$ dénombrable quelconque.

4. Soit $(\mathcal{M}_n : n < \omega)$ une suite de $\mathcal{L}$-structures tels que $\mathcal{M}_n \preccurlyeq \mathcal{M}_{n+1}$ pour tout n. Soit $\mathcal{M}_\omega$ la $\mathcal{L}$-structure d'univers $\bigcup_{n<\omega} M_n$ définie de manière naturelle (comme dans le cours).

   (a) Montrer qu'on a $\mathcal{M}_n \preccurlyeq \mathcal{M}_m$ pour tout $n \leq m < \omega$.

   (b) Montrer que pour tout $n < \omega$, on a $\mathcal{M}_n \preccurlyeq \mathcal{M}_\omega$.
   [Indication : On pourra raisonner par induction sur les formules.]

5. (**Cette question est plus difficile. On pourra l'admettre pour continuer.**) Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure dénombrable, $A \subset M$ un sous-ensemble fini et $\sigma : A \to M$ un isomorphisme partiel. Soit $B \subset M$ fini contenant A. Montrer qu'il existe une extension élémentaire dénombrable $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$ et un isomorphisme partiel $\sigma' : B \to N$ tel que $\sigma'|_A = \sigma$.

6. Montrer que l'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

7. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$-structure dénombrable $\mathcal{N}' \succcurlyeq \mathcal{M}$ ayant la propriété suivante :
   (+) Pour tout isomorphisme partiel $\sigma : A \to M$, avec $A \subset M$ fini et tout $B \subset M$ fini contenant A, σ s'étend en un isomorphisme partiel $\sigma' : B \to N'$.

8. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$-structure dénombrable $\mathcal{N}_* \succcurlyeq \mathcal{M}$ qui soit homogène.

9. (*) Déterminer une structure $\mathcal{N}_*$ dans le cas où $\mathcal{M} = \mathcal{Z}_2$; montrer que $\mathcal{N}_*$ est unique dans cette situation.

Solution 2 1. Soit $\mathcal{M} \models T_0$. On choisit $a_0 \in M$. Il est clair que s définit une bijection croissante sans cycles dans $\mathcal{M}$. Pour $z \in \mathbb{Z}$, il existe donc un unique $a_z \in M$ tel que $s^z(a_0) = a_z$. L'application f qui à $z \in \mathbb{Z}$ associe a_z définit alors un plongement de $\mathcal{Z}$ dans $\mathcal{M}$.
   Comme T_0 élimine les quanteurs, f est un plongement élémentaire (par un résultat du cours), et en particulier $\mathcal{Z} \equiv \mathcal{M}$. Ceci montre que $T_0 = \mathrm{Th}(\mathcal{Z})$, autrement dit que T_0 est complète.

2. Si $A = \emptyset$ et $B \subseteq \mathbb{Z}$ est quelconque, l'identité convient.
   Soit $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{Z}$ et $f : A \to \mathbb{Z}$ un isomorphisme partiel. On montre aisément que si $a_1, a_2 \in A$ et $f(a_1) = a_1 + t$, alors $f(a_2) = a_2 + t$. En effet, si $a_2 = s^z a_1$, alors $f(a_2) = s^z(f(a_1)) = s^z(a_1 + t) = s^{z+t}(a_1) = s^t(a_2) = a_2 + t$. Cela montre que $f = \tau \restriction_A$, où τ est l'isomorphisme de $\mathcal{Z}$ donné par la translation par t. En particlier $f' = \tau \restriction_B$ étend f et est bien un isomorphisme partiel.

3. Comme T_0 élimine les quanteurs, l'application $f : A = \{(0,0\} \to \mathcal{Z}_2, (0,0) \mapsto (0,1)$ est un isomorphisme partiel. Montrons que f ne s'étend pas en un isomorphisme partiel sur $B = \{(0,0),(0,1)\}$. Supposons que f' soit une telle extension. Comme $(0,1) > s^n((0,0)) = (n,0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f'((0,1)) > f((n,0)) = (n,1)$ pour tout n. Or il n'existe pas de tel élément dans $\mathcal{Z}_2$. Contradiction.

4. (a) La relation $\preccurlyeq$ est transitive, c'est-à-dire si $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{P}$, alors $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{P}$ (vérification immédiate). Le résultat en découle par induction sur $m - n$.

   (b) Par induction sur la hauteur d'une formule $\phi = \phi(v_1, \ldots, v_n)$, on montre :
   Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $\overline{a} \in M_m^n$, on a $\mathcal{M}_m \models \phi[\overline{a}] \Leftrightarrow \mathcal{M}_\omega \models \phi[\overline{a}]$.

   Si ϕ est atomique, cela découle du fait que $\mathcal{M}_m$ est une sous-structure de $\mathcal{M}_\omega$.
   Le cas des connecteurs logique ($\wedge$ et $\neg$) est clair.

On suppose que le résultat est vrai pour $\psi = \psi(v_0, \ldots, v_n)$ et on considère $\phi[v_1, \ldots, v_n] = \exists v_0 \psi$. Soit $\overline{a} \in M_m^n$.

Si $\mathcal{M}_m \models \phi[\overline{a}]$ alors $\mathcal{M}_m \models \psi[b, \overline{a}]$ pour un $b \in M_m$ et donc $\mathcal{M}_\omega \models \psi[b, \overline{a}]$ par hypothèse d'induction, d'où $\mathcal{M}_\omega \models \phi[\overline{a}]$.

Réciproquement, si $\mathcal{M}_\omega \models \phi[\overline{a}]$, alors il existe $b \in M_\omega$ tel que $\mathcal{M}_\omega \models \psi[b, \overline{a}]$. Il existe $k \geq m$ tel que $b \in M_k$. Par hypothèse d'induction, on a $\mathcal{M}_k \models \psi[b, \overline{a}]$, d'où $\mathcal{M}_k \models \phi[\overline{a}]$. Or $\mathcal{M}_m \preccurlyeq \mathcal{M}_k$ par la première partie de l'exercice, ce qui permet de conclure que $\mathcal{M}_m \models \phi[\overline{a}]$.

5. Soient $A \subseteq B \subseteq M$ avec B fini et M dénombrable, et soit $\sigma : A \to \mathcal{M}$ un isomorphisme partiel. Soit $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ et $B \setminus A = \{b_1, \ldots, b_n\}$. On choisit des nouvelles constantes $c_1, \ldots, c_n$ en dehors de $\mathcal{L}_M$, et on pose $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_M \dot\cup \{c_1, \ldots, c_n\}$. On considère la $\mathcal{L}^*$-théorie suivante :

$$T^* = Diag(\mathcal{M}) \cup \left\{ \phi(c_1, \ldots, c_n, \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_m)) \mid \phi(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m) \in \mathcal{L} \text{ t.q. } \mathcal{M} \models \phi[\overline{b}, \overline{a}] \right\}.$$

Toute partie finie de T^* admet un modèle. En effet, si $\mathcal{M} \models \bigwedge_{i=1}^k \phi_i[\overline{b}, \overline{a}]$, on a en particulier $\mathcal{M} \models \exists \overline{v} \phi[\overline{v}, \overline{a}]$, dù $\mathcal{M} \models \exists \overline{v} \phi[\overline{v}, \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_m)]$ car σ est un isomorphisme partiel.

Par le théorème de compacité il existe un modèle $\mathcal{N}^* \models T^*$. Par un résultat du cours, le réduit $\mathcal{N} := \mathcal{N}^* \restriction_{\mathcal{L}}$ est (isomorphe à) une extension élémentaire de $\mathcal{M}$. Par construction de $\mathcal{N}^*$, si on pose $\sigma'(b_i) := c_i^{\mathcal{N}^*}$, alors σ' définit une extension de σ en un isomorphisme partiel de domaine B et à valeurs dans $\mathcal{N}$.

6. Soit X un ensemble dénombrable, c'est-à-dire $|X| \leq \aleph_0$. Pour tout n il existe une surjection de X^n sur l'ensemble des parties de X de cardinal n. On a donc

$$|\mathcal{P}_{fin}(X)| = \left| \bigcup_{n \in \omega} \{X_0 \in \mathcal{P}(X) \mid |X_0| = n\} \right| \leq \aleph_0 \cdot \sup_{n \in \omega}(|X^n|) \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

7. Comme M est dénombrable, par la partie précédente il n'y a qu'un nombre dénombrable de triplets (A, B, σ) où $A \subseteq B \subseteq M$ avec B fini et où $\sigma : A \to M$ est un isomorphisme partiel. (Il suffit de remarquer que $B \times graphe(\sigma)$, une partie finie de M^3, détermine le triplet (A, B, σ).) Soit $(A_i, B_i, \sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une énumération de ces triplets.

On pose $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M}$. Par induction sur $n \in \mathbb{N}$, on construit des modèles dénombrables $\mathcal{M}_n$ tels que $\mathcal{M}_{n+1} \succcurlyeq \mathcal{M}_n$ et tels que $\sigma_n : A_n \to M_0 \subseteq M_{n+1}$ s'étend en un isomorphisme partiel $\sigma'_n : B_n \to M_{n+1}$. Par (5) ceci est possible. On pose $\mathcal{M}_\omega := \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{M}_n$, une structure dénombrable. Par (4.b), on a $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{M}_\omega$, et par construction $\mathcal{M}_\omega$ a la propriété cherchée.

8. On itère la construction faite dans (7).

Soit $\mathcal{N}_0 := \mathcal{M}$ et $\mathcal{N}_1 := \mathcal{M}_\omega$ où $\mathcal{M}_\omega$ est la structure dénombrable construite dans (7). On construit inductivement, en appliquant (7) à la structure $\mathcal{N}_n$, une structure dénombrable $\mathcal{N}_{n+1} \succcurlyeq \mathcal{N}_n$ telle que pour tout $A \subseteq B \subseteq N_n$ avec B fini et tout isomorphisme partiel $\sigma : A \to N_n$ il existe une extension de σ en un isomorphisme partiel $\sigma' : B \to N_{n+1}$.

On pose $\mathcal{N}_* := \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{N}_n$, une structure dénombrable. Par (4.b), on a $\mathcal{M} = \mathcal{N}_0 \preccurlyeq \mathcal{N}_*$. Soient $A \subseteq B \subseteq N_*$ avec B fini, et soit $\sigma : A \to N_*$ un isomorphisme partiel. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B \cup \mathrm{im}(\sigma) \subseteq N_n$, autrement dit $\sigma : A \to N_n$ un isomorphisme partiel (on utilise $\mathcal{N}_n \preccurlyeq \mathcal{N}_*$). Par construction, σ s'étend en un isomorphisme partiel $\sigma' : B \to N_{n+1}$. Comme $\mathcal{N}_{n+1} \preccurlyeq \mathcal{N}_*$, $\sigma' : B \to N_*$ est un isomorphisme partiel. Ceci montre que $\mathcal{N}_*$ est homogène.

9. On peut plonger $\mathcal{Z}_2$ dans la structure $\mathcal{Z}_Q$ d'ensemble de base $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, où l'ordre est donné par l'ordre antilexicographique et $s(z, q) := (z+1, q)$. Par l'élimination des quanteurs, $\mathcal{N}_* := \mathcal{Z}_Q$ est une extension élémentaire de $\mathcal{Z}_2$. Pour montrer que $\mathcal{N}_*$ est homogène, par induction sur $|B \setminus A|$, il suffit de traiter le cas où $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $B = A \cup \{b\}$. Soit donc $\sigma : A \to N_*$ un isomorphisme partiel. On peut supposer $a_1 < \ldots < a_n$.

Si $s^z(b) \in A$ pour un $z \in \mathbb{Z}$, on montre comme dans (2) qu'alors tout isomorphisme partiel de domaine A s'étend de manière unique en un isomorphisme partiel de domaine B.
Si $s^z(b) < a_1 = (z_1, q_1)$, alors $b = (z, q)$ pour un $q < q_1$. Comme $\mathbb{Q}$ n'a pas de plus petit élément, si $\sigma(a_1) = (z_1', q_1')$, il existe $q' < q_1'$. Il est clair que $b \mapsto (0, q')$ définit une extension de σ en un isomorphisme partiel défini sur b.
Si $s^z(b) > a_n = (z_n, q_n)$, on raisonne de manière analogue, en utilisant que $\mathbb{Q}$ ne contient pas d'élément maximal.
Sinon, il existe $1 \leq k < n$ tel que $a_k = (z_k, q_k) < s^z(b) < a_{k+1} = (z_{k+1}, q_{k+1})$ pour tout z. Comme l'ordre sur $\mathbb{Q}$ est dense, si $\sigma(a_i) = (z_i', q_i')$, il existe $q' \in \mathbb{Q}$ tel que $q_k' < q' < q_{k+1}'$. Il est clair que $b \mapsto (0, q')$ marche.

Pour montrer l'unicité de $\mathcal{N}_*$, on considère d'abord un modèle arbitraire $\mathcal{M}$ de T_0. Sur M, la relation d'équivalence $a \sim b :\Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : s^z(a) = b$ a des classes d'équivalences convexes et toutes isomorphes à $(\mathbb{Z}, <, x \mapsto x+1)$. L'ensemble des classes d'équivalences I est alors non-vide et totalement ordonné, et $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathcal{Z}_I$ avec ensemble de base $\mathbb{Z} \times I$, où l'ordre est donné par l'ordre antilexicographique et $s(z, i) := (z+1, i)$.
Tout modèle contenant $\mathcal{Z}_2$ est alors de la forme $\mathcal{Z}_I$ pour un I ayant au moins 2 éléments. Si I contient un plus petit ou un plus grand élément, on montre comme dans (3) que $\mathcal{Z}_I$ n'est pas homogène. De manière similaire, si I n'a pas de point extrême, mais l'ordre sur I n'est pas dense, alors $\mathcal{Z}_I$ n'est pas homogène. En effet, si $i_1, i_2 \in I$ tel que $i_1 < i_2$ avec aucun élément entre les deux, il suffit de choisir $i_0 < i_1$ et de considérer $A = \{(0, i_0), (0, i_2)\}$ et de poser $\sigma((0, i_0)) = (0, i_1)$, $\sigma((0, i_2) = (0, i_2)$. Il est clair que σ ne s'étend pas à $(0, i_1)$.
L'ordre $(I, <)$ doit donc être dense sans extrémités. Si $\mathcal{M}$ est dénombrable, I l'est aussi. On conclut, car $(\mathbb{Q}, <)$ est l'unique ordre total dénombrable dense sans extrémités (c'est un résultat de Cantor).

Exercice 3 (Décidabilité)
Soit $\mathcal{L} = \{P, c\}$, où P est un prédicat unaire et c une constante.

1. Déterminer les $\mathcal{L}$-structures finies et dénombrables à isomorphisme près.
2. En déduire : deux $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont élémentairement équivalentes si et seulement si
   - $\mathfrak{M} \models Pc$ ssi $\mathfrak{N} \models Pc$, et
   - $\mathfrak{M} \models \exists^{\geq k} x\, Qx$ ssi $\mathfrak{N} \models \exists^{\geq k} x\, Qx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $Q \in \{P, \neg P\}$.
3. Donner une description de l'ensemble des $\mathcal{L}$-théories complètes.
4. Montrer qu'un $\mathcal{L}$-énoncé φ est universellement valide ssi $\mathfrak{M} \models \varphi$ pour toute $\mathcal{L}$-structure finie.
5. Montrer que la $\mathcal{L}$-théorie vide est décidable.
   [Indication : On pourra d'abord montrer que la théorie d'une $\mathcal{L}$-structure finie est décidable.]

Solution 3 1. Pour $1 \leq \kappa \leq \aleph_0$ et $0 \leq \lambda \leq \aleph_0$ on dénote $\mathcal{M}_{\kappa,\lambda}$ une $\mathcal{L}$-structure satisfaisant $c^{\mathcal{M}_{\kappa,\lambda}} \in P^{\mathcal{M}_{\kappa,\lambda}}$, $\mid P^{\mathcal{M}_{\kappa,\lambda}} \mid = \kappa$ et $\mid \mathcal{M}_{\kappa,\lambda} \setminus P^{\mathcal{M}_{\kappa,\lambda}} \mid = \lambda$.
De même, soit $\mathcal{N}_{\kappa,\lambda}$ une $\mathcal{L}$-structure satisfaisant $c^{\mathcal{N}_{\kappa,\lambda}} \notin P^{\mathcal{N}_{\kappa,\lambda}}$, $\mid P^{\mathcal{N}_{\kappa,\lambda}} \mid = \lambda$ et $\mid \mathcal{N}_{\kappa,\lambda} \setminus P^{\mathcal{N}_{\kappa,\lambda}} \mid = \kappa$.
Il est facile à voir que toute $\mathcal{L}$-structure de cardinal $\leq \aleph_0$ est isomorphe à l'une de ces structures, et que ces structures sont 2à 2 non-isomorphes.

2. Il s'agit clairement de conditions nécessaires pour que deux $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ soient élémentairement équivalentes.
Montrons qu'elles sont suffisantes aussi. Quitte à passer à des sous-structures élémentaires dénombrables (on utilise Löwenheim-Skolem descendant), on peut supposer que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont dénombrables. On conclut, car les conditions données permettent de distinguer les $\mathcal{L}$-structures dénombrables données dans (1).

3. Nous avons déjà vu que pour deux $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ dénombrables, on a $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ ssi $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. L'ensemble des $\mathcal{L}$-théories complètes est donc donné par

$$\{\mathrm{Th}(\mathcal{M}_{\kappa,\lambda}) \mid 1 \leq \kappa \leq \aleph_0\,,\, 0 \leq \lambda \leq \aleph_0\} \dot\cup \{\mathrm{Th}(\mathcal{N}_{\kappa,\lambda}) \mid 1 \leq \kappa \leq \aleph_0\,,\, 0 \leq \lambda \leq \aleph_0\}.$$

4. Par (2), la liste suivante donne une axiomatisation de $\mathcal{M}_{\kappa,\lambda}$:
   - Pc ;
   - si $\kappa < \aleph_0$, on met $\exists^{=\kappa} x Px$, et si $\kappa = \aleph_0$, on met $\{\exists^{\geq k} x Px \mid k \in \mathbb{N}\}$;
   - si $\lambda < \aleph_0$, on met $\exists^{=\lambda} x \neg Px$, et si $\lambda = \aleph_0$, on met $\{\exists^{\geq l} x \neg Px \mid l \in \mathbb{N}\}$.

   On donne une axiomatisation similaire de $\mathcal{N}_{\kappa,\lambda}$, en échangeant les rôles de P et $\neg P$.

   Soit ϕ un $\mathcal{L}$-énoncé qui n'est pas universellement valide. Il suffit de montrer qu'il existe alors une $\mathcal{L}$-structure finie $\mathfrak{M}$ telle que $\mathfrak{M} \models \neg\phi$.

   Par hypothèse il existe $\mathcal{N}$ telle que $\mathcal{N} \models \neg\phi$. Alors $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M}_{\kappa,\lambda})$ ou $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{N}_{\kappa,\lambda})$ pour certains κ et λ par (3). On traite le premier cas, l'autre étant similaire. On a donc $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_{\kappa,\lambda}) \vdash \neg\phi$. Il existe alors une partie finie $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ des axiomes que nous avons donnés telle que $\vdash \bigwedge_i \psi_i \to \neg\phi$. Or il est clair qu'une telle partie finie Ψ admet un modèle fini $\mathfrak{M}$. On a alors $\mathfrak{M} \models \neg\phi$.

5. On a $\vdash \phi$ ssi $\mathfrak{M} \models \phi$ pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ ssi $\mathfrak{M} \models \phi$ pour toute $\mathcal{L}$-structure finie $\mathfrak{M}$ (par (4).

   Soit $R = \{\ulcorner\phi\urcorner \mid \phi$ est un $\mathcal{L}$-énoncé tel que $\vdash \phi\}$. L'ensemble R est récursivement énumérable.

   Soit $R' = \{\ulcorner\phi\urcorner \mid \phi$ est un $\mathcal{L}$-énoncé tel que $\not\vdash \phi\}$. Il suffit de montrer que R' est récursivement énumérable. On a $\ulcorner\phi\urcorner \in R'$ ssi il existe $\mathfrak{M}$ finie telle que $\mathfrak{M} \models \neg\phi$ ssi il existe k, l finis, $k \geq 1$ tels que $\ulcorner Pc \wedge \exists^{=k} x Px \wedge \exists^{=l} x \neg Px \to \neg\phi\urcorner \in R$ ou $\ulcorner \neg Pc \wedge \exists^{=k} x \neg Px \wedge \exists^{=l} x Px \to \neg\phi\urcorner \in R$. L'ensemble $\{(\ulcorner Pc \wedge \exists^{=k} x Px \wedge \exists^{=l} x \neg Px \to \neg\phi\urcorner, k, l)\} \cup \{(\ulcorner \neg Pc \wedge \exists^{=k} x \neg Px \wedge \exists^{=l} x Px \to \neg\phi\urcorner, k, l)\}$ est une partie récursive de $\mathbb{N}^3$, sa projection sur la premère coordonnée est donc récursivement énumérable et égale à R'.

Exercice 4 (Interprétation et indécidabilité)
Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux langages, et T une $\mathcal{L}$-théorie. Une *interprétation* $\mathcal{I}_T(\mathcal{L}')$ de $\mathcal{L}'$ dans T est la donnée

- d'une $\mathcal{L}$-formule $\phi_{\mathrm{dom}} = \phi_{\mathrm{dom}}(x)$ telle que $T \vdash \exists x \phi_{\mathrm{dom}}$;
- pour toute relation n-aire $R' \in \mathcal{L}'$, d'une $\mathcal{L}$-formule $\phi_{R'}(x_1, \ldots, x_n)$ telle que

$$T \vdash \forall x_1, \ldots x_n \left(\phi_{R'}(\overline{x}) \to \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_{\mathrm{dom}}(x_i)\right);$$

- pour toute constante $c' \in \mathcal{L}'$, d'une $\mathcal{L}$-formule $\phi_{c'}(x)$ telle que $T \vdash \forall x(\phi_{c'}(x) \to \phi_{\mathrm{dom}}(x)) \wedge \exists^{=1} x \phi_{c'}(x)$, et
- pour toute fonction n-aire $f' \in \mathcal{L}'$, d'une $\mathcal{L}$-formule $\phi_{f'}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ telle que

$$T \vdash \forall x_1, \ldots x_{n+1} \left(\phi_{f'}(\overline{x}) \to \bigwedge_{i=1}^{n+1} \phi_{\mathrm{dom}}(x_i)\right) \wedge \forall x_1, \ldots, x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_{\mathrm{dom}}(x_i) \to \exists^{=1} x_{n+1} \phi_{f'}(\overline{x})\right).$$

Ainsi, de manière naturelle, à tout modèle $\mathfrak{M} \models T$ est associée une $\mathcal{L}'$-structure $\mathfrak{M}' = \langle M'; \ldots\rangle$ telle que $M' = \phi_{\mathrm{dom}}[\mathfrak{M}]$, $R'^{\mathfrak{M}'} = \phi_{R'}[\mathfrak{M}]$, $\{c'^{\mathfrak{M}'}\} = \phi_{c'}[\mathfrak{M}]$ et $\mathrm{graph}(f'^{\mathfrak{M}'}) = \phi_{f'}[\mathfrak{M}]$, pour les relations, constantes et fonctions de $\mathcal{L}'$, respectivement.

1. Montrer :
   (a) À toute $\mathcal{L}'$-formule $\psi'(x_1, \ldots, x_n)$ est associée une $\mathcal{L}$-formule $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ telle que

   $$T \vdash \forall x_1, \ldots x_n \left(\psi(\overline{x}) \to \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_{\mathrm{dom}}(x_i)\right)$$

   et telle que pour tout $\overline{a} \in M'^n$ on ait $\mathfrak{M}' \models \psi'[\overline{a}]$ si et seulement si $\mathfrak{M} \models \psi[\overline{a}]$.

(b) Si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont finis, on peut choisir les formules ψ de manière à ce que $\ulcorner\psi'\urcorner \mapsto \ulcorner\psi\urcorner$ soit donné par une fonction primitive récursive. [Des brèves justifications suffiront.]

2. On considère $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ens} = \{\in\}$ et $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{ar}$. Le but de cette partie est d'établir certains résultats d'indécidabilité dans $\mathcal{L}_{ens}$.

   (a) Donner une $\mathcal{L}$-formule $\phi_{\text{dom}}[x]$ telle que pour tout $\mathfrak{M} \models$ ZFC on ait $\phi_{\text{dom}}[\mathfrak{M}] = \omega \subseteq M$, c'est-à-dire ϕ_{dom} est satisfaite précisément par les ordinaux finis dans $\mathfrak{M}$.

   On définit naturellement une interprétation $\mathcal{I}_{\text{ZFC}}(\mathcal{L}_{ar}) = \langle\phi_{\text{dom}}; \phi_0, \phi_S, \ldots\rangle$ de $\mathcal{L}_{ar}$ dans ZFC, en utilisant les opérations d'addition, multiplication et successeur usuels sur les ordinaux (de même pour 0 et $<$). Observer que pour tout $\mathfrak{M} \models$ ZFC on a $\mathfrak{M}' \models \mathcal{P}$. [On ne demande pas de le justifier.]

   (b) En déduire que ZFC est indécidable. [On suppose que ZFC est consistante.]

   (c) Montrer qu'il existe une sous-théorie finie $T_0 \subseteq$ ZFC telle que les mêmes formules $\phi_{\text{dom}}, \phi_0, \phi_S, \ldots$ définissent une interprétation de $\mathcal{L}_{ar}$ dans T_0 et telle que $\mathfrak{M} \models T_0 \Rightarrow \mathfrak{M}' \models \mathcal{P}_0$.

   (d) Déduire de la question précédente que la $\mathcal{L}_{ens}$-théorie vide est indécidable.

3. Soit $\mathcal{L}$ un langage (fini) contenant au moins un symbole de relation n-aire ou un symbole de fonction n-aire, pour un $n \geq 2$. Montrer que la $\mathcal{L}$-théorie vide est indécidable.

Solution 4 1. (a) Par induction sur la hauteur, on commence par transformer toute $\mathcal{L}'$-formule ψ' en une $\mathcal{L}'$-formule ψ'' dans laquelle ne figurent que des sous-formules atomiques de la forme $x \doteq y$, $R'(x_1, \ldots, x_n)$, $x \doteq c'$, $f'(x_1, \ldots, x_n) \doteq x_{n+1}$. Toute $\mathcal{L}'$-formule est équivalente à une telle formule, et si $\mathcal{L}'$ est fini, on peut clairement trouver une construction telle qu'il existe une fonction primitive récursive $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ avec $f(\ulcorner\psi'\urcorner) = \ulcorner\psi''\urcorner$.

Pour définir une $\mathcal{L}$-formule $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ à partir d'une $\mathcal{L}'$-formule ψ'' de la forme décrite, on raisonne par induction sur la hauteur de ψ''.

- Si $\psi''(x, y) = x \doteq y$, on pose $\psi(x, y) = \phi_{\text{dom}}(x) \wedge \phi_{\text{dom}}(y)$.
- Si $\psi''(x_1, \ldots, x_,) = R'(x_1 \ldots x_n)$, on pose $\psi(x_1, \ldots, x_n) = \phi_{R'}(x_1, \ldots, x_n)$.
- Si $\psi''(x) = x \doteq c'$, on pose $\psi(x) = \phi_{c'}(x)$.
- Si $\psi''(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f'(x_1, \ldots, x_n) \doteq x_{n+1}$, on pose $\psi(x_1, |dots, x_{n+1}) = \phi_{f'}(x_1, \ldots, x_{n+1})$.
- Si $\psi'' = (\psi''_1 \wedge \psi''_2)$, on pose $\psi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$.
- Si $\psi''(v_1, \ldots, v_n) = \neg\psi''_1$, on pose $\psi(v_1, \ldots, v_n) = \neg\psi_1 \wedge \bigwedge_{i=1}^n \phi_{\text{dom}}(v_i)$.
- Si $\psi'' = \exists x \psi_1$, on pose $\psi = \exists x \psi_1$.

Il est clair que ces formules ont les propriétés requises.

(b) Si $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}$ sont finis, alors les applications $\ulcorner\psi'\urcorner \mapsto \ulcorner\psi''\urcorner$ et $\ulcorner\psi''\urcorner \mapsto \ulcorner\psi\urcorner$ sont données par des fonction primitives récursives.

2. La formule $\phi_{dom}(x) := \text{Ord}(x) \wedge \forall y(y \in x \to \emptyset \doteq y \vee \exists z y \doteq z \cup \{z\})$ est satisfaite précisément par les ordinaux finis, c'est-à-dire par les éléments de ω. Ici, on utilise la formule $\text{Ord}(x)$ définissant les ordinaux ("x est bien-ordonné par $\in$ et transitif").

3. Si ZFC était décidable, l'ensemble $R' = \{\ulcorner\phi'\urcorner \mid \phi'$ est un $\mathcal{L}_{ar}$-énoncé tel que ZFC$\models \phi\}$ serait récursif par (1.b). Or $\mathcal{R}' = \{\phi' \mid \ulcorner\phi'\urcorner \in R'\}$ est une $\mathcal{L}_{ar}$-théorie consistante (si ZFC est consistante) contenant l'arithmétique de Peano $\mathcal{P}$. Comme de plus $\mathcal{R}'$ est close par déduction et récursive, elle est décidable. Cela contredit le théorème de Church.

4. On chosit $\phi_{dom}(x)$, $\phi_<$, ϕ_0, ϕ_+, $\phi_.$ et ϕ_S comme dans (2). Les énoncés suivants sont conséquences de ZFC :

- $\exists x \phi_{dom}(x)$;

- $\forall x, y(\phi_<(x,y) \to \phi_{dom}(x) \wedge \phi_{dom}(y))$;
- $\forall x(\phi_0(x) \to \phi_{\mathrm{dom}}(x)) \wedge \exists^{=1} x \phi_0(x)$;
- $\forall x, y, z\,(\phi_+(x,y,z) \to \phi_{\mathrm{dom}}(x) \wedge \phi_{\mathrm{dom}}(y) \wedge \phi_{\mathrm{dom}}(z)) \wedge \forall x, y\,\big(\phi_{\mathrm{dom}}(x) \wedge \phi_{\mathrm{dom}}(y) \to \exists^{=1} z \phi_+(x,y,z)\big)$, et similairement pour la multiplication et le successeur ;
- ψ, où $\psi' = \bigwedge_{i=1}^{8}(Ai)$ est la conjonction des axiomes de Peano faible.

Par compacité, il existe une théorie $T_0 \subseteq$ ZFC finie telle que tous les énoncés de cette liste sont des conséquences de T_0. Cela garantit qu'on a bien affaire à une interprétation de $\mathcal{L}_{ar}$ dans T_0 (avec domaine $\phi_{dom}(x)$) et que si $\mathfrak{M} \models T_0$, alors $\mathfrak{M}' \models \mathcal{P}_0$. Comme dans la partie précédente, on en déduit que T_0 est indécidable, par le théorème de Church. Si la $\mathcal{L}_{ens}$-théorie vide était décidable, toute $\mathcal{L}_{ens}$-théorie finie le serait aussi, par un résultat du cours. On conclut, car T_0 est finie.

5. On suppose d'abord que $\mathcal{L}$ contienne un symbole de relation n-aire R, pour un $n \geq 2$. On peut alors interpréter $\mathcal{L}_{ens}$ dans la $\mathcal{L}$-théorie vide, en posant $\phi_{dom}(x) := x \dot{=} x$ et $\phi_\in(x,y) := R(x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n-1 \text{ fois}})$.

   Toute $\mathcal{L}_{ens}$-structure apparaît comme interprétation d'une $\mathcal{L}$-structure. Donc, si la $\mathcal{L}$-théorie vide était décidable, la $\mathcal{L}_{ens}$-théorie vide le serait aussi.

   Si $\mathcal{L}$ contient un symbole de fonction n-aire f, pour un $n \geq 2$, il suffit de montrer qu'on peut interpréter le langage $\mathcal{L}' = \{R\}$, avec R prédicat n-aire, dans une $\mathcal{L}$-théorie consistante (finie) T_0, de manière à ce que toute $\mathcal{L}'$. Pour simplifier la notation, on traite le cas $n = 2$. On considère la $\mathcal{L}$-théorie donnée par
   - $\exists^{\geq 2} x x \dot{=} x$, et
   - $\exists^{=1} x \forall y\,(f(x,y) \dot{=} x \wedge f(y,x) \dot{=} x)$.

   Posons $\chi(x) := \forall y\,(f(x,y) \dot{=} x \wedge f(y,x) \dot{=} x)$. Cette formule a donc exactement une solution dans tout modèle de T_0. On peut alors interpréter $\mathcal{L}'$ dans $\mathcal{L}$, en posant $\phi_{dom}(x) := \neg\chi(x)$ et $\phi_R(x,y) := \phi_{dom}(x) \wedge \phi_{dom}(y) \wedge \exists z(\chi(z) \wedge f(x,y) \dot{=} z)$. On vérifie sans problème que toute $\mathcal{L}'$-structure apparaît comme interprétation d'un modèle de T_0. On conclut comme avant.