

**Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences d'Agadir
Département de Physique
Année Universitaire : 2004-2012**

**Filière Sciences de la matière, Physique.
Module : Physique 3 et 4
(SMP3, SMP4, ERD3)**

Cours complet d'Electricité 3

**Électromagnétisme
dans le vide et la matière**

**Milieux diélectriques
Milieux magnétiques
Equations de Maxwell**

**Responsable du cours et du module
Professeur Abdelhakim Nafidi**

Sommaire Cours d'Electromagnétisme

MILIEUX DIELECTRIQUES

A- ETUDE MACROSCOPIQUE DES MILIEUX DIELECTRIQUES

- I. GENERALITES :
- II. VECTEUR POLARISATION :
- III. POTENTIEL ET CHAMP ELECTROSTATIQUE CREE PAR UN DIELECTRIQUE
- IV. CHAMP ELECTRIQUE \vec{E} MACROSCOPIQUE D'UN DIELECTRIQUE, VECTEUR \vec{D} :
- V. PROPRIETES DES MILIEUX DIELECTRIQUES

B- RELATIONS DE PASSAGE - ENERGIE -FORCE

- I RELATIONS DE PASSAGE
- II. ENERGIE ELECTROSTATIQUE
- III. FORCE SUBIT PAR UN DIELECTRIQUE DANS UN CHAMP INHOMOGENE

C- ETUDE MICROSCOPIQUE DE LA POLARISATION

- I. MOLECULES POLAIRES ET MOLECULES NON POLAIRES
- II. CHAMP MICROSCOPIQUE ET CHAMP MACROSCOPIQUE :
- III. CHAMP LOCAL
- IV. MECANISMES DE LA POLARISATION :
- V. SUSCEPTIBILITE ELECTRIQUE:
- VI. PIEZOELECTRICITE :
- VII. FERROELECTRICITE :

MILIEUX MAGNETIQUES

A. RAPPELS DE MAGNETOSTATIQUE DU VIDE

- I- FORCE DE LORENTZ :
- II- LOI DE BIOT ET SAVART :
- III- THEOREME D'AMPERE
- VI- CONSERVATION DU FLUX DU CHAMP MAGNETIQUE :
- V- POTENTIEL VECTEUR \vec{A} :
- IV- ANALOGIE : ELECTROSTATIQUE -MAGNETOSTATIQUE

B- POLARISATION DES MILIEUX MAGNETIQUES

- I- DIPOLE MAGNETIQUE
- II- AIMANTATION PERMANENTE ET TEMPORAIRE
- III- ORIGINE MICROSCOPIQUE DE L' AIMANTATION
- VI- PROPRIETES MAGNETIQUES DE LA MATIERE :
- V- CHAMP ET POTENTIEL VECTEUR CREES PAR UN MILIEU AIMANTE :
- IV- EXCITATION MAGNETIQUE \vec{H} :
- IIV- MILIEUX MAGNETIQUES LINEAIRES HOMOGENES ET ISOTROPES (L.H.I) :
- IIIV- ANALOGIE AVEC LES MILIEUX DIELECTRIQUES :
- XI- FORCE EXERCEE SUR UN MILIEU MAGNETIQUE DANS UN CHAMP NON UNIFORME :
- X- ENERGIE DES COURANTS DAN,S UN MILIEU MAGNETIQUE :
- IX- REALATIONS DE PASSAGE ENTRE DEUX MILIEUX MAGNETIQUES

C- ETUDE MICROSCOPIQUE DE L'AIMANTATION

- I- DIAMAGNETISME :
- II- PARAMAGNETISME :
- III- FERROMAGNETISME

EQUATIONS DE MAXWELL

- I. LES POSTULATS DE L'ELECTROMAGNETISME :
- II. LES EQUATIONS DE MAXWELL :
- III. CONTENU PHYSIQUE DES EQUATIONS DE MAXWELL :
- IV. PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE
- V. ELECTROMAGNETISME DES MILIEUX MATERIELS :
- VI. EXPRESSIONS DES POTENTIELS :
- VII. APPROXIMATION DES REGIMES QUASI-PERMANENTS (ARQP) OU DES ETATS QUASI-STATIONNAIRES :
- VIII. ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE :

Chapitre.1

ETUDE MACROSCOPIQUE DES MILIEUX DIELECTRIQUES

I. Généralités :

1. Milieux conducteurs :

Les conducteurs ont des charges libres dont les porteurs peuvent se déplacer dans toute la masse du matériau. Exemple: électrons (métaux), ions (électrolytes) ions et électrons (plasmas).

Soit un milieu conducteur en équilibre électrostatique. Sous \vec{E} , une charge q subit la force $\vec{F} = q\vec{E} = \vec{0}$ (équilibre) $\rightarrow \vec{E}_{int} = \vec{0}$ et $-\overrightarrow{grad} V_{int} = \vec{0} \Rightarrow V_{int} = cte$,

Or $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \rho_{int} = 0$: Toute la charge est répartie sur la surface du conducteur

- σ_s (libre) s'ajoute pour annuler le champ créé par les charges externes. Seule la forme de la surface du conducteur joue un rôle dans l'étude de l'équilibre électrostatique

- L'étude de la conductivité σ relève de l'électrocinétique ($\vec{J} = \sigma \vec{E}$, $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$)

2. Milieux diélectriques :

a) Définition :

Un milieu diélectrique est un milieu *isolant neutre* où il n'y a pas de charges électrique libres et mobiles. Il est formé d'atomes et de molécules.

b) Dipôle électrique :

Soit \vec{E}_0 le champ électrique extérieur appliqué au diélectrique :

- Si $\vec{E}_0 = \vec{0}$ comme les électrons sont liés au noyau les barycentres des charges positives G^+ et des charges négatives G^- coïncident c à d :

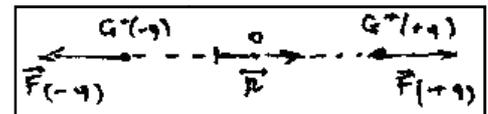
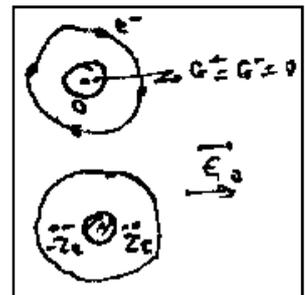
$$\overrightarrow{G^- G^+} = \vec{0}$$

- Si $\vec{E}_0 \neq \vec{0}$ les charges sont soumises à la force électrique

$$\vec{F} = q\vec{E}_0 \rightarrow \overrightarrow{G^- G^+} \neq \vec{0}$$

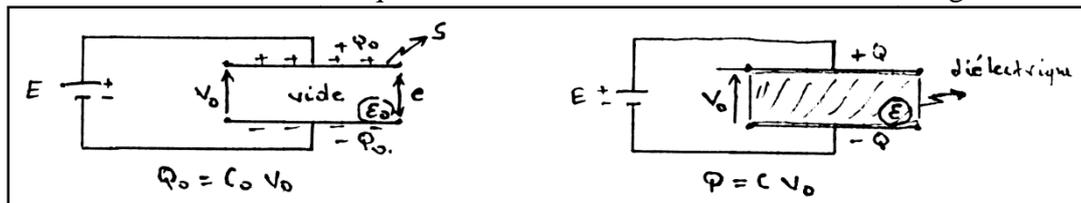
Chaque atome (ou molécule) de charge q se comporte comme un dipôle électrique et acquiert un moment dipolaire

$$\vec{p} = q\overrightarrow{G^- G^+}$$



c). Expérience de Faraday :

L'introduction d'un diélectrique entre les armatures d'un condensateur augment sa capacité.



En présence du diélectrique, pour maintenir $V_0 = cte$, le générateur doit fournir une quantité d'électricité Q plus importante que Q_0 ($Q > Q_0$)

$$V_0 = cte = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{Q}{C} \rightarrow \frac{C}{C_0} = \frac{Q}{Q_0} > 1 \rightarrow C > C_0$$

$$\text{Or } C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{e} \text{ et } C = \epsilon \frac{S}{e} \text{ soit } \frac{C}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r > 1$$

ϵ_r : Constante diélectrique relative et $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$: Constante diélectrique absolue

L'introduction d'une plaque diélectrique entraîne un apport de charges. \vec{E}_0 pénètre dans le diélectrique et agit sur les porteurs de charges, d'où le nom "diélectrique" (du grec : à travers). Or ces électrons et ions ne peuvent se déplacer sous \vec{E}_0 . Ils restent attachés à des groupements atomiques, moléculaires ou cristallins d'où leur nom "charges liées". En volume les porteurs de charges se neutralisent. On a apparition de charges induites, de signe opposé à ceux des armatures, sur les surfaces du diélectrique appelées *charges de polarisation*.

d). Mécanismes de la polarisation :

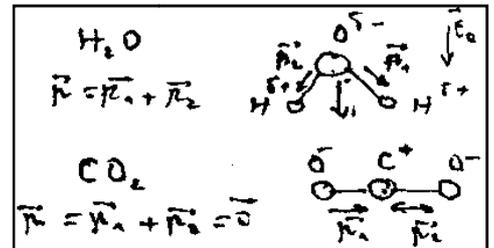
D'après le § 2-b un diélectrique sous \vec{E}_0 se comporte comme un ensemble de dipôles orientés dans le sens de \vec{E}_0 . On dit que le diélectrique est polarisé par le champ, on distingue deux mécanismes de polarisation :

- Polarisation dipolaire

Le diélectrique est formé de dipôles permanents (exp. H₂O). le champ \vec{E}_0 les fait orienter.

- Polarisation électronique

Le diélectrique n'a pas de dipôles permanents (exp. CO₂). Le champ \vec{E}_0 les crée puis les oriente dans son direction.

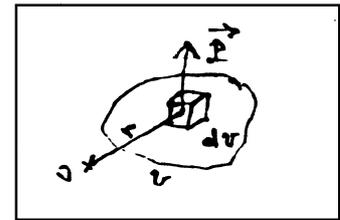


II. Vecteur polarisation :

On assimile les charges liées à une distribution de dipôles électriques caractérisée par un champ vectoriel macroscopique $\vec{P}(\vec{r}, t)$ appelé *Polarisation électrique*. A chaque élément de volume dv correspond un moment dipolaire $d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r}, t) dv$, d'où la

densité volumique de moment électrique dipolaire $\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{d\vec{p}}{dv}$

Unité :
$$[\vec{P}] = \left[\frac{\Delta p}{\Delta v} \right] = \left[\frac{p}{v} \right] = \left[\frac{qd}{v} \right] = \frac{C \cdot m}{m^3} = \frac{C}{m^2}$$



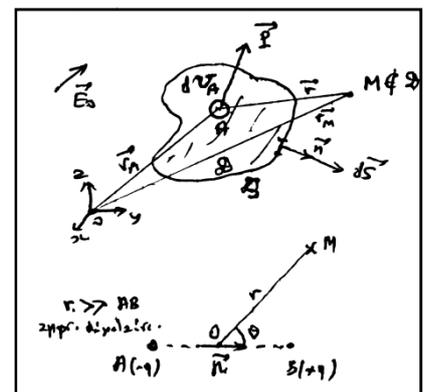
Remarque : À l'échelle microscopique, un milieu discret formé de groupements (atomes, molécules) de moments dipolaires individuels \vec{p}_i , aura une polarisation $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ par unité de volume.

III. Potentiel et champ électrostatique crée par un diélectrique polarisé en un point M extérieure : (M ∉ D)

a. Expression du potentiel :

Soit un diélectrique D polarisé et limité par une surface fermée S. En régime permanent, la polarisation $\vec{P}(\vec{r}) \neq f(t)$ est connue quelque soit le point $A \in D$.

Question : $V(M) = ?$ tq $\vec{r} = \overline{AM}$.



- **Rappel** : le potentiel crée par un dipôle électrique en un point M, distant de r de son centre, est donné par:
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \text{ou} \quad \vec{p} = q\overline{AB} \quad \text{et} \quad \vec{r} = \overline{OM}$$

$A \in D$, entouré de dV_A , a un moment dipolaire $d\vec{p} = \vec{P}(A) dv_A$. Le potentiel $dV(M)$ crée en M par dV_A est : $dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}(A)}{r^3} dv_A$, le potentiel totale crée par D est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}(A)}{r^3} dv_A \quad (1) \quad \text{où} \quad \vec{r} = \overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA} = \vec{r}_M - \vec{r}_A \quad (\text{figure})$$

Remarque : $M \notin D \Rightarrow \vec{r} = \overline{AM} \neq \vec{0}$ donc l'intégrale converge.

2. Cas particulier : Polarisation uniforme $\vec{P}(A) = \vec{cte}$ (module, direction et sens)

$$V(M) = \vec{P} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\vec{r}}{r^3} dv_A \right) = \vec{P} \cdot \vec{I}$$

\vec{I} est le champ électrostatique crée par une densité de charge volumique $\rho = 1C/m^3$

En effet : $|d\vec{I}| = dI = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1 \cdot dv_A}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq_A}{r^2}$ avec $dq_A = \rho \cdot dv_A$ et $\vec{r} = r\vec{u}$

3. Distribution de charge équivalente à la polarisation :

On a $\overline{\text{grad}}_M \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{u}}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ (La dérivée est prise par rapport aux coordonnées de M).

Or $\vec{r} = \overline{AM}$; $-\vec{r} = \overline{MA} \Rightarrow \overline{\text{grad}}_A \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\vec{u}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ et $\text{div}(f \cdot \vec{a}) = f \cdot \text{div}\vec{a} + \vec{a} \cdot \overline{\text{grad}}f$

$\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} = \vec{P} \cdot \overline{\nabla}_A \left(\frac{1}{r} \right) = \text{div} \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) - \frac{\text{div}\vec{P}}{r}$. Toutes les opérations agissent sur les coordonnées de A.

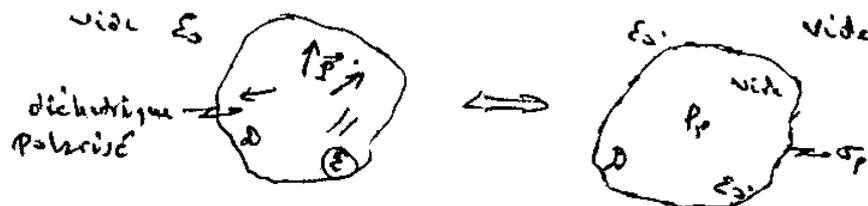
Théorème de Green Ostogradsky : $\iiint_D \text{div}\vec{b} \cdot dv_A = \iint_S \vec{b} \cdot d\vec{S}$

où $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ et $|\vec{n}| = 1$: vecteur unitaire normal à dS et sortant du volume du D.

$$(1) \rightarrow V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{-\text{div}\vec{P}}{r} dv_A + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{r} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\rho_p}{r} dv_A + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_p}{r} dS$$

Avec
$$\boxed{\rho_p = -\text{div}\vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \text{et} \quad \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}}$$

Conclusion : le potentiel électrostatique crée par la polarisation \vec{P} (par le diélectrique polarisé) est équivalent à la somme de deux potentiels créés par deux distributions de charges macroscopiques fictives, dans le vide (voir ϵ_0) :



- une distribution volumique de densité : $\rho_p = -\text{div}_A \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -(\partial_{x_M} P_{x_A} + \partial_{y_M} P_{y_A} + \partial_{z_M} P_{z_A})$
- une distribution surfacique de densité : $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos(\vec{P}, \vec{n})$

Remarques :

- Si $\vec{P}(A) = \overline{cte}$ $\rho_p = -\text{div}\vec{P}(A) = 0$, $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \neq 0$ charges en surface
 - **La somme des charges de polarisation induite dans un diélectrique est nulle**
 $Q_T = Q_p = \iiint_D \rho_p dv + \iint_S \sigma_p dS = \iiint_D (-\text{div}\vec{P}) dv + \iint_S (\vec{P} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_D (-\text{div}\vec{P}) dv + \iiint_D (\text{div}\vec{P}) dv = 0$
- En accord avec le sens physique de ρ_p et σ_p qui sont des excédants locaux de charges liées apparues sous l'action du phénomène de polarisation dans un milieu globalement neutre.
- Si en plus, le diélectrique porte des charges libres de densité volumique ρ_l (alliage métal-diélectrique) et de densité surfacique σ_l (peinture métallique Al ou frottement de verre)

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint_D \frac{\rho_p + \rho_l}{r} dv_A + \iint_S \frac{\sigma_p + \sigma_l}{r} dS \right]$$

4. Champ électrostatique crée par un diélectrique polarisée en $M \notin D$

On sait que $\vec{E}(M) = -\overline{\text{grad}}V(M)$ et que $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint_D \frac{\rho_p}{r} dv_A + \iint_S \frac{\sigma_p}{r} dS \right]$ donc

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{u}}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint_D \frac{\rho_p}{r^2} dv_A + \iint_S \frac{\sigma_p}{r^2} dS \right] \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{et} \quad |\vec{u}| = 1$$

Remarques

- La permutation de $\vec{\nabla}$ et \int est justifiée par le fait que ρ_p et σ_p sont bornées et continues et $\vec{r} = \overline{AM} \neq \vec{0}$ (car $M \notin D$) les intégrales sont absolument convergents
 - **Les expression de V et \vec{E} sont aussi valables à l'intérieur du diélectrique** car $\vec{E}(M) = -\overline{\text{grad}}V(M)$ et $\overline{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}$ le sont également tant que $\vec{r} = \overline{AM} \neq \vec{0}$ et l'approximation dipolaire est valable ($|\vec{r}| \ll |\overline{AB}|$) car $\overline{\text{rot}}\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge (-\vec{\nabla}V) = \vec{0}$.
- Donc au point $M \in D$ on définit $\rho_p(M) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(M)$

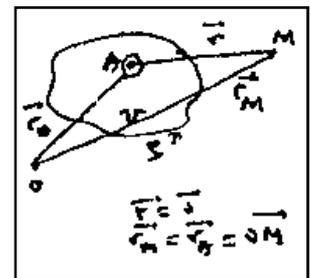
IV. Champ électrique \vec{E} macroscopique à l'intérieur d'un diélectrique, vecteur \vec{D} :

1 Forme local du théorème de Gauss :

$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \equiv \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ donc d'après le théorème de Green-Osto

$$\iiint_V \text{div}\vec{E} \cdot dv = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_{\text{int}} \cdot dv \quad \text{D'où} \quad \boxed{\text{div}\vec{E}(M) = \rho_{\text{int}} / \epsilon_0}$$

ρ_{int} à (S) de Gauss



2 Vecteur déplacement électrique \vec{D} :

Soit un diélectrique polarisé ($\rho_p \neq 0$) et contenant des charges libres ($\rho_l \neq 0$) en $M \in D$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(M) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_l + \rho_p) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_l - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(M)) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}(M) + \vec{P}(M)) = \rho_l \text{ et}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(M) \equiv \rho_l(M)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{D}(M) \equiv \epsilon_0 \vec{E}(M) + \vec{P}(M)}$$

est appelé *vecteur déplacement (ou excitation) électrique*. Unités : $[D] = [P] = C/m^2$.

Remarques

- Dans le vide ($M \notin D$) :
 $\vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \text{div} \vec{D} = \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_l \Rightarrow \text{div} \vec{E} = \rho_l / \epsilon_0$
- Dans un conducteur en équilibre électrostatique : $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$ et $\vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{D} = \vec{0}$
- Si D est polarisé et non chargé ($\rho_l = \sigma_l = 0$) :
 $\boxed{\text{div} \vec{D} = 0}$ on dit que \vec{D} est à flux conservatif.
 * $\text{div} \vec{D} = 0 = \text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \Rightarrow \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = -\text{div} \vec{P} = \rho_p \neq 0$ en général
 * $\vec{\nabla} \wedge \vec{D} = \vec{\nabla} \wedge (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \vec{P} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{D} = \vec{\nabla} \wedge \vec{P}$
 D'où $\vec{P} \neq -\epsilon_0 \vec{E}$ et \vec{E} n'est pas toujours à flux conservatif ($\text{div} \vec{E} \neq 0$),
 Si $\vec{P} = \overline{cte} \Rightarrow \text{div} \vec{E} = 0$ et \vec{E} est à flux conservatif.

3 Forme intégrale du théorème de Gauss :

Forme local en un point $M \in D$: $\text{div} \vec{D}(M) = \rho_l$ donc

$$\iiint_v \text{div} \vec{D} \cdot dv_A = \iint_S \vec{D} \cdot dS = \iiint_v \rho_l \cdot dv_A = Q_l \Rightarrow \boxed{\iint_S \vec{D} \cdot dS = Q_l}$$

Q_l : Charge libre contenue dans v englobée par la surface S

Remarques

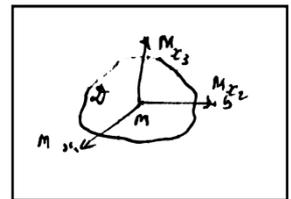
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l$ est valable en régime permanent (où $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i\omega t} = \vec{E}_0 = \overline{cte}$ soit $\omega = 2\pi/T = 0 \Rightarrow T \rightarrow \infty$) et aussi en régime variable (dynamique) (où $\vec{E} = \vec{E}_{\text{max}} \cdot e^{i\omega t}$).
- Pour calculer le champ en fonction des seules charges libres, il faut relier \vec{D} et \vec{E} (c à d \vec{P} et \vec{E}) par une relation constitutive du milieu considéré.

V. Propriétés des milieux diélectriques

a. Diélectrique linéaire

Si l'application qui en tout point $M \in D \xrightarrow{f} \vec{D}(M)$ à $\vec{E}(M)$, $f(\vec{E}) = \vec{D}$ est linéaire. Représentation analytique : Dans un repère $oxyz$, on a la forme matricielle :

$$\vec{D} = [\epsilon] \vec{E} \Rightarrow \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$



$[\epsilon]$: est la matrice des permittivités diélectriques, ses éléments ne dépendent que de M

$$\vec{D}(M) = [\epsilon(M)] \vec{E}(M),$$

Si en plus le milieu est homogène $[\epsilon]$ ne dépend plus de M et $\vec{D}(M) = [\epsilon] \vec{E}(M)$, on montre que la matrice $[\epsilon]$ est symétrique donc diagonalisable.

En un point $M \in D$, il existe trois axes $M_{x_1}, M_{x_2}, M_{x_3}$ perpendiculaires entre eux appelés axes électriques du milieu au point M (où axes principaux) où

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \varepsilon_1 E_1 \\ D_2 = \varepsilon_2 E_2 \\ D_3 = \varepsilon_3 E_3 \end{cases}$$

avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont les permittivités diélectriques principales en M.

Dans le système d'axes principaux, on a en un point M :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 \\ P_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_2 \\ P_3 = (\varepsilon_3 - \varepsilon_0) E_3 \end{cases}$$

Dans ce milieu \vec{P} et \vec{E} ne sont pas colinéaires (\vec{P} est fonction de la direction du champ \vec{E}). On dit que le milieu diélectrique est *anisotrope* (exp. quelque substance cristallisées).

2. Diélectrique linéaire, homogène et isotrope (L.H.I) :

a) Définition

Un D est l.h.i si $\forall M \in D$ les permittivités principales $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ prennent la même valeur ε .

Exemple: Cas des fluides diélectriques, solides amorphes (non cristallisés : verres) et des solides cristallisant dans le système cubique (NaCl : c.f.c) ...

b) Susceptibilité diélectrique d'un D (l.h.i):

Si ε est la permittivité d'un tel milieu on a $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ (\vec{D} et \vec{E} sont colinéaires pour tout $M \in D$).

On pose : $\chi_e = \varepsilon / \varepsilon_0 - 1$ or $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 ((\varepsilon / \varepsilon_0) - 1) \vec{E} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$,

χ_e : Coefficient sans dimension appelé *susceptibilité diélectrique* (\vec{E} et \vec{P} sont colinéaires)

La relation $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ devient $\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$ avec $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$,

Dans le vide $\varepsilon = \varepsilon_0$ d'où le nom *permittivité relative* ou constante diélectrique donnée à $\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \varepsilon / \varepsilon_0 > 1$

Unités : χ_e et ε_r sont des nombre sans dimension : $[\varepsilon] = [\varepsilon_0] = F / m$.

Conclusion: Dans un **milieu diélectrique L.H.I** on a $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ et $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ (avec $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0 = 1 + \chi_e$) exprimant la réponse linéaire de la matière au champ qu'elle subit.

Remarques

* En fait, la démarche est inverse, l'expérience (les mesures) montre que pour les champs électriques pas trop intenses (faibles) utilisés couramment, la polarisation \vec{P} est proportionnelle au champ total macroscopique \vec{E} . En un point $M \in D$ donné on a : $\vec{P}(M) = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}(M)$ avec $\vec{E}(M) = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ où \vec{E}_0 est le champ extérieur appliqué du aux charges libres *fixes* et \vec{E}_p du aux charges *liées* de polarisation. D'où $\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$ avec $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$.

* Dans un D (L.H.I) : $div \vec{D} = \rho_l \Rightarrow div \vec{E} = \rho_l / \varepsilon$, les équations de D (L.H.I) se déduisent donc de celle de l'électrostatique du vide en remplaçant ε_0 par ε .

c) Propriétés de la susceptibilité diélectrique:

* $\chi_e = \varepsilon_r - 1$ est toujours positive car l'expérience montre que les dipôles (c à d \vec{P}) s'orientent dans le sens du champ (c. à d : expérience de Faraday : $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0 > 1$).

* Elle dépend du matériau et de son état physique (T, densité moléculaire, ...) ce n'est qu'à température et densité constantes que \vec{P} est proportionnelle à \vec{E}

* $\chi_e(M) = \chi_e = cte$ pour tout point d'un diélectrique homogène.

* Le calcul de χ_e (ou de ϵ_r) demande une très fine connaissance de la structure du matériaux (voir chapitre III).

* *Données numériques :*

Gaz (20°C, 1 atm)	$10^6 \cdot \chi_e$	Liquides (20°C)	ϵ_r	Solides	ϵ_r
H _e	65	H ₂ O	80.36	Diamant	5.5
O ₂	495	Acide acétique	6.15	NaCl	6.12
N ₂	547	Ethanol	25.1	Nylon	3.5
CO ₂	921	Glycérol	43.5	Verres	4 à 7
Air sec	537	Acétone	21.2	BaTiO₃	~1500

d) Equilibre électrostatique de conducteurs dans un D (L.H.I) :

Soit un système de conducteurs C_i (i=1.....n) dans le vide. Son champ électrostatique vérifie $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 = \vec{0}$ (1) (Maxwell - Faraday) et $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \rho_l / \epsilon_0$ (Maxwell - Gauss).

Sans modifier ρ_l on remplit l'espace entre les C_i par un D (L.H.I). Le nouveau champ \vec{E} vérifie

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (3) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho_l \quad (4)$$

Si en plus D est homogène $\epsilon_r(M) = \epsilon_r = cte$ pour tout point $M \in D$ donc :

$$\vec{\nabla} \wedge (\epsilon_r \vec{E}) = 0 \quad (3') \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_r \vec{E}) = \rho_l / \epsilon_0 \quad (4')$$

(1) et (3)' (ou (2) et (4)') donnent $\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon_r$: le diélectrique atténue le champ par $\epsilon_r > 1$.

Cas particulier : $V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$ est divisée par ϵ_r et $C = Q_l / V_1 - V_2$ est multiplier par ϵ_r c à d $C = \epsilon_r C_0$ (interprétation de l'expérience de Faraday) (voir I-2-c).

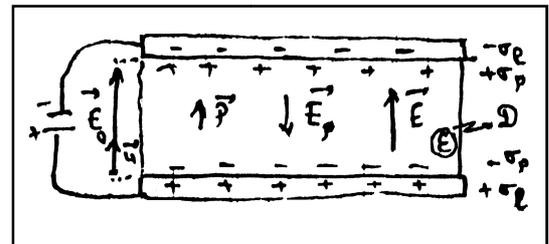
3) Exemples de diélectriques L.H.I, polarisé uniformément sans charges libres internes :

$$\begin{cases} \sigma_{tot} = \sigma_l + \sigma_p = \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \\ \rho_{tot} = \rho_l + \rho_p = 0 + 0 = 0 \end{cases} \quad \text{D(L.H.I)} \quad \begin{cases} \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{cases}$$

a) Conducteur plan rempli d'un D (L.H.I)-Champ dépolarisant :

$\vec{E}_0 = cte$ (Uniforme) donc $\vec{P} = cte = P \cdot \vec{u}$.

Les charges libres portées par les armatures créent un champ $\vec{E}_0 = \sigma_l / \epsilon_0 \vec{u}$ (au voisinage du conducteur : Théorème de Coulomb) qui induit dans le diélectrique une polarisation parallèle à \vec{E}_0 et de même sens que \vec{E}_0 . Il apparaît sur les faces du diélectrique des charges de polarisations de densité $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{u} = \pm P$.



D'où \vec{P} crée à l'intérieur du diélectrique un nouveau champ $\vec{E}_p = -(|\sigma_p| / \epsilon_0) \vec{u} = -\vec{P} / \epsilon_0$ (le signe - car le champ est dirigé vers les potentiels décroissants)

Le champ total en $M \in D$ est : $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P = \vec{E}_0 - \vec{P} / \epsilon_0$ est diminué par les charges liées.

\vec{E}_P (d'origine la polarisation) est de sens opposé à (ou s'oppose à) \vec{E}_0 (champ extérieur ou appliqué à D) qui lui a donné naissance. D'où le nom donné à \vec{E}_P : *champ dépolarisant*.

Remarques

- l'expression \vec{E} (total dans D) = \vec{E}_0 (polarisant) + \vec{E}_P (dépolarisant) est générale quelque soit la forme du diélectrique. On écrit : $\vec{E}_P = -N \vec{P} / \epsilon_0$ ou N est le facteur dépolarisant qui dépend de la forme géométrique du D.

b) Sphère diélectrique L.H.I :

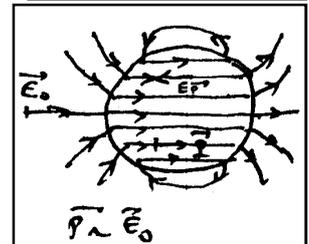
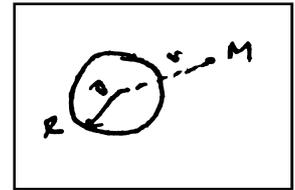
Pour $r < R$: On montre (TD) que $\vec{E}_P = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$, ici $N = \frac{1}{3}$.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E}_0 - \frac{\chi_e \vec{E}}{3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{3}{3 + \chi_e} \vec{E}_0 = \frac{3}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_0 = \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} \vec{E}_0$$

Donc $\vec{E} < \vec{E}_0$ car $\epsilon_r > 1$ ($\vec{E} \sim \vec{E}_0$).

D'où $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \frac{3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{2\epsilon_r} \vec{E}_0 = \frac{3\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon_0 + \epsilon} \vec{E}_0$, ($\vec{P} \sim \vec{E}_0$).

Pour $r > R$: la sphère est assimilable à un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{P}$.



Chapitre 2

RELATIONS DE PASSAGE - ENERGIE ELECTROSTATIQUE –FORCE SUBIT PAR UN QIELECTRIQUE DANS UN CHAMP EXTERIEUR.

I. Relations de passage

1. Introduction :

Soient deux milieux (1) et (2) séparés par une surface S . ces deux milieux peuvent être D-D, D-vide ou D-Conducteur. Les conditions de continuité découlent des propriétés locales des champs \vec{E} et \vec{D} c à d des équations de Maxwell dans un milieu matériel :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l \text{ (M. G.) et } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \text{ (M. F.) en régime permanent (indépendant du temps).}$$

Les relations de passages expriment les relations entre les valeurs des champs de part et d'autre de la surface de séparation au voisinage d'un point $M \in (S)$. On les obtient en intégrant les équations de Maxwell entre deux points M_1 et M_2 infiniment voisins de M sur la normale à S en M . Soit \vec{n}_{12} vecteur unitaire normal à S orienté du milieu (1) vers le milieu (2). Nous définissons les champs en M dans (1) et (2) par :

$$\begin{cases} \vec{E}_1(M) = \lim_{M_1 \rightarrow M} \vec{E}(M_1) \\ \vec{E}_2(M) = \lim_{M_2 \rightarrow M} \vec{E}(M_2) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \vec{D}_1(M) = \lim_{M_1 \rightarrow M} \vec{D}(M_1) \\ \vec{D}_2(M) = \lim_{M_2 \rightarrow M} \vec{D}(M_2) \end{cases}$$



ii. Discontinuité de la composante normale de \vec{D} : ($\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l$)

Supposition : Dans le cas général, il existe dans les milieux (1) et (2) des charges volumique libres $\rho_l(M_1)$ et $\rho_l(M_2)$ et une charge surfacique libre $\sigma_l(M)$ sur (S) .

Théorème de Gauss pour \vec{D} : $\phi = \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_l$.

Q_l : charge libre contenue dans la surface de Gauss : cylindre de bases les deux disques centrés en M_1 et M_2 et de génératrices parallèles à \vec{n}_{12} .

$$d\phi = \vec{D} \cdot d\vec{S} = dQ_l$$

$$\vec{D}(M_2) \cdot \vec{n}_{12} dS + \vec{D}(M_1) \cdot (-\vec{n}_{12}) dS + d\phi_{lat} = \rho_l(M_1) h dS + \rho_l(M_2) h dS + \sigma_l(M) dS$$

$d\phi_{lat}$: flux sortant de la surface latérale de hauteur $2h$.

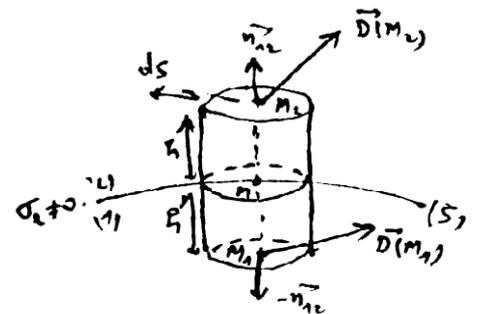
Quand $M_1 \rightarrow M$ et $M_2 \rightarrow M$ $h \rightarrow 0$ et par suite $d\phi_{lat} \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} [\vec{D}_2(M) - \vec{D}_1(M)] \cdot \vec{n}_{12} &= \sigma_l(M) \Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma_l \\ \vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n} &= \sigma_l \vec{n}_{12} \quad \forall M \in (S) \end{aligned}$$

Discontinuité de la composante normale de \vec{D} due à la présence de $\sigma_l \neq 0$ sur (S) .

Rem

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \sigma_l, \text{ or } \vec{D}_i = \epsilon_0 \vec{E}_i + \vec{P}_i \quad (i=1,2)$$



$$\epsilon_0 (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} + (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \sigma_l \Rightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma_l + \sigma_P}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma_l + \sigma_P}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n} = \frac{\sigma_l + \sigma_P}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

En effet : $\rho_P = -\text{div} \vec{P} \Rightarrow Q_P = \iiint_V \rho_P dv = -\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dv \stackrel{\text{Green}}{=} -\iint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iint_S \sigma_P \cdot dS$

$$\sigma_P dS = -\vec{P} \cdot \vec{n}_{12} dS \Rightarrow \vec{P} \cdot \vec{n}_{12} = -\sigma_P \Rightarrow \vec{P}_2 \cdot \vec{n}_{12} + \vec{P}_1 \cdot (-\vec{n}_{12}) = -\sigma_P \Rightarrow (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n}_{12} = -\sigma_P$$

Conclusion : $\boxed{\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n} = \sigma_l \vec{n}_{12}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n} = \frac{\sigma_l + \sigma_P}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}} \Leftrightarrow \boxed{(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n}_{12} = -\sigma_P}$

2. Continuité de la composante tangentielle de \vec{E} :

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{C} : \text{Circulation de } \vec{E} \text{ sur le contour fermé } (\Gamma).$$

$$d\mathcal{C} = \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \text{ posons } \overline{AB} = d\vec{l} \text{ donc } d\mathcal{C} = \vec{E}(M_2) \cdot \overline{AB} + \vec{E}(M_1) \cdot \overline{CD} + \mathcal{C}_{lat} = 0$$

\mathcal{C}_{lat} : Circulation de \vec{E} sur les cotés BC et DA.

Quand $M_1 \rightarrow M$ et $M_2 \rightarrow M$ $\mathcal{C}_{lat} \rightarrow 0$.

$$\vec{E}(M_1) \rightarrow \vec{E}_1(M) \text{ et } \vec{E}(M_2) \rightarrow \vec{E}_2(M)$$

$$-\vec{E}_2(M) \cdot \overline{AB} \cdot \vec{t} + \vec{E}_1(M) \cdot \overline{CD} \cdot \vec{t} = 0.$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2(M) \cdot \vec{t} = \vec{E}_1(M) \cdot \vec{t} \Rightarrow E_{2t} = E_{1t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t}} : \text{Conservation de la composante tangentielle de } \vec{E}$$

Remarques :

$$* (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t} = 0 \Rightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n}_{12} = 0$$

$$* \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} \Rightarrow V_2 = V_1 : \text{continuité du potentiel } (\vec{E} = -\vec{\nabla}V), \text{ avec } \vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n} = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

plus commode dans les calculs.

$$\text{En effet : } \begin{cases} \vec{E}_2 = -\vec{\nabla}V_2 \\ \vec{E}_1 = -\vec{\nabla}V_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = -(\vec{\nabla}V_2 - \vec{\nabla}V_1) = -\vec{\nabla}(V_2 - V_1) \parallel \vec{n}_{12}$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t} = -\vec{t} \cdot \vec{\nabla}(V_2 - V_1) = 0 \Rightarrow V_2 - V_1 = cte = 0$$

$$* \vec{\nabla} \wedge \vec{D} = \vec{\nabla} \wedge (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \underbrace{\epsilon_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{E}}_{=0} + \vec{\nabla} \wedge \vec{P} = \vec{\nabla} \wedge \vec{P} \neq 0 \text{ en général et par suite } \vec{D}_{2t} \neq \vec{D}_{1t}$$

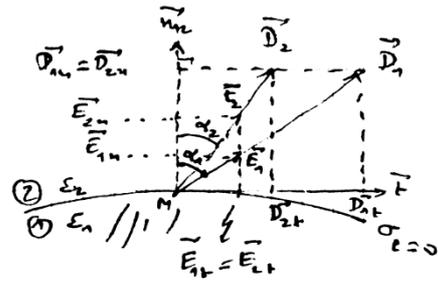
4. Cas de deux diélectriques L.H.I

$$\vec{D}_1 \equiv \epsilon_1 \vec{E}_1 \text{ et } \vec{D}_2 \equiv \epsilon_2 \vec{E}_2$$

a. Relations de passage :



$$\begin{cases} \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} \\ \vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n} = \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{D}_{2t} = \vec{D}_{1t} \\ \epsilon_2 \vec{E}_{2n} - \epsilon_1 \vec{E}_{1n} = \sigma_l \vec{n}_{12} \end{cases}$$



b. **Réfraction des lignes de champs** : (cas $\sigma_l = 0$)

Hypothèse : $\epsilon_1 > \epsilon_2$

$$\begin{cases} \vec{D}_{2t} = \vec{D}_{1t} \\ \epsilon_2 \vec{E}_{2n} - \epsilon_1 \vec{E}_{1n} = \sigma_l \vec{n}_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{D}_{1t} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \vec{D}_{2t} > \vec{D}_{2t} \\ \vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} \\ \vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n} = \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \end{cases}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\vec{D}_{1t}}{\vec{D}_{1n}} \text{ et } \tan \alpha_2 = \frac{\vec{D}_{2t}}{\vec{D}_{2n}} \Rightarrow \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\vec{D}_{1t}}{\vec{D}_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \Rightarrow \boxed{\frac{\tan \alpha_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\epsilon_2}}$$

Remarques :

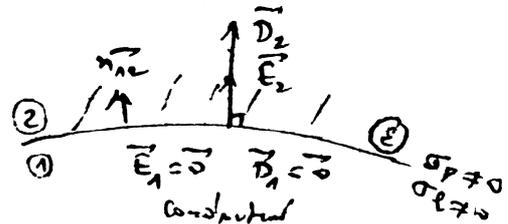
- Dans le cas $\epsilon_1 > \epsilon_2$ on aura $\tan \alpha_1 > \tan \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Les lignes de champs se resserrent dans le diélectrique à grande permittivité (ici $\epsilon_1 > \epsilon_2$).

- La loi $\epsilon_1 \tan \alpha_2 = \epsilon_2 \tan \alpha_1$ est analogue à la loi de Descartes : $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$.

5. **Cas d'un conducteur chargé (1) et d'un diélectrique (2) :**

$$\begin{cases} \vec{E}_{1n} + \vec{E}_{1t} = \vec{E}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_{1n} = \vec{0} \\ \vec{E}_{1t} = \vec{0} \end{cases} \\ \vec{D}_{1n} + \vec{D}_{1t} = \vec{D}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{D}_{1n} = \vec{0} \\ \vec{D}_{1t} = \vec{0} \end{cases} \end{cases}$$



$$\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} = \vec{0} \Rightarrow$$

$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2n} + \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{2n}$ (0) perpendiculaire a (S) dans le diélectrique.

$$\text{En effet } \vec{E}_{2n} - \underbrace{\vec{E}_{1n}}_{=0} = \frac{\sigma_l + \sigma_P}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{2n} = \frac{\sigma_l + \sigma_P}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}} \quad (1).$$

$$\vec{D}_{2n} - \underbrace{\vec{D}_{1n}}_{=0} = \sigma_l \vec{n}_{12} \Rightarrow \boxed{\vec{D}_{2n} = \sigma_l \vec{n}_{12}} \quad (2)$$

❖ Cas d'un diélectrique L.H.I :

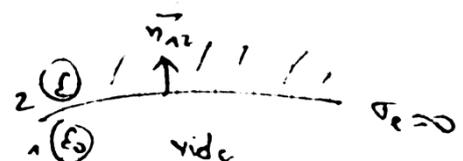
$$\vec{D}_2 = \epsilon \vec{E}_2 = \epsilon \vec{E}_{2n} = \vec{D}_{2n} = \sigma_l \vec{n}_{12} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = \vec{E}_{2n} = \frac{\sigma_l}{\epsilon} \vec{n}_{12}} \quad (3)$$

(1) et (3) donnent

$$\frac{\sigma_l + \sigma_P}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_l}{\epsilon} \Rightarrow 1 + \frac{\sigma_P}{\sigma_l} = \frac{1}{\epsilon_r} \Rightarrow \sigma_P = -\sigma_l \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) = -\sigma_l \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\right)$$

Or $\epsilon_r > 1$, $\sigma_P \sim -\sigma_l$: deux régime différents $|\sigma_P| < |\sigma_l|$.

6. **Cas du vide (1) et d'un diélectrique L.H.I (2) : $\sigma_l = 0$**



$$\vec{P}_1 = \vec{0} \quad \vec{D}_1 = \epsilon_0 \vec{E}_1 \quad \vec{D}_2 = \epsilon \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} \quad \xrightarrow{L.H.I} \quad \frac{\vec{D}_{2t}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}_{1t}}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{D}_{2t} = \epsilon_r \vec{D}_{1t} \quad > 1}$$

$$\vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n} \Rightarrow \epsilon \vec{E}_{2n} = \epsilon_0 \vec{E}_{1n} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{2n} = \frac{\vec{E}_{1n}}{\epsilon_r}} \quad \vec{E}_{2n} < \vec{E}_{1n}$$

II- Energie électrostatique

a. Densité d'énergie électrostatique :

❖ Rappel : l'énergie potentielle d'une charge q placée dans une région où règne un potentiel V est : $E_p = qV$, et on montre que pour une distribution volumique de charge de densité ρ dans

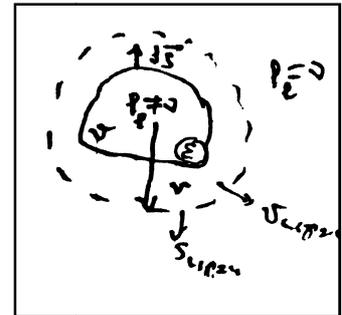
une région de potentiel V on a $E_p = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \cdot V \, dv$

❖ Soit un diélectrique polarisé ($\sigma_p \neq 0, \rho_p \neq 0$) contenant une densité de charge libre ρ_l . D'après le théorème de Gauss : $\text{div} \vec{D} = \rho_l$ et par suite :

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_V (\text{div} \vec{D}) \cdot V \, dv \quad \text{Or} \quad (\text{div} \vec{D} \cdot V) = (\text{div} \vec{D})V + \vec{D} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V$$

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_V \text{div}(\vec{D} \cdot V) \, dv - \frac{1}{2} \iiint_V \vec{D} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V \, dv$$

$$= \frac{1}{2} \iint_S \vec{D} \cdot V \cdot \vec{n} \, dS + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dv$$



Faisons étendre le volume v contenant ρ_l à tout l'espace pour

calculer le flux de $\vec{D} \cdot V$ prenons sphère de surface S et rayons r : $r \rightarrow \infty$. Or

$$V \sim \frac{1}{r}, \quad D = \epsilon E + P \sim E \sim \frac{1}{r}, \quad dS \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow \vec{D} \cdot V \cdot \vec{n} \, dS \sim \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r} r^2 \sim \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

D'où : $\frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} (\vec{E} \cdot \vec{D}) \, dv$ la densité d'énergie volumique est : $W = \frac{dE_p}{dv_{\text{espace}}} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$.

❖ Autre forme : diélectrique polarisé $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\text{Donc : } W = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{P}}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2} : \text{Densité d'énergie de polarisation dans le vide}$$

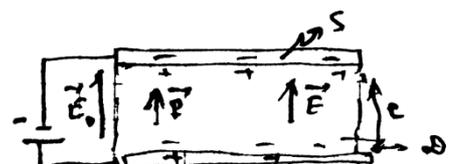
$W - W_0 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{P}$: Densité d'énergie nécessaire à la polarisation du diélectrique.

b. Cas d'un diélectrique L.H.I :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \epsilon \vec{E} \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} \epsilon E^2}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \Rightarrow W - W_0 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E^2 > 0 \Rightarrow W > W_0 : \text{même } \vec{E}.$$

c. Exemple :



Cas d'un condensateur plan rempli d'un diélectrique L.H.I polarisé uniformément ($\vec{P} = \overline{cte}$).

$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = \overline{cte}$ dans le diélectrique est nul ailleurs.

$$W \equiv \frac{dE_p}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} \iiint_v \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \iiint_v dv = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S e = \frac{1}{2} \epsilon \frac{S}{e} (E e)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \Rightarrow \begin{cases} C = \epsilon \frac{S}{e} \\ \Delta V = E \cdot e \end{cases} \quad Q = C \cdot \Delta V \quad E_p = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

Dans le vide : $E = E_0 \Rightarrow \Delta V = E_0 e = cte \Rightarrow E_{p_0} = \frac{1}{2} C_0 (\Delta V)^2$

$$\Delta E_p = E_p - E_{p_0} = \epsilon_r E_{p_0} - E_{p_0} = (\epsilon_r - 1) E_{p_0} \Rightarrow \Delta W = W - W_0 = (\epsilon_r - 1) W_0$$

III. Force subit par un diélectrique dans un champ inhomogène

1. Rappel :

Un dipôle électrostatique \vec{p} placée dans un champ non homogène \vec{E} est soumis à :

- La force : $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overline{grad}) \vec{E} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$
- Le moment : $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$

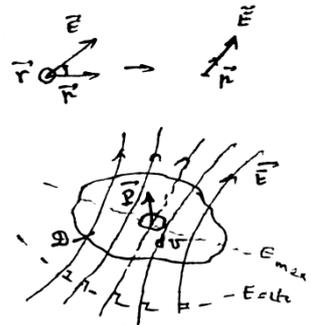
2. Soit un diélectrique D de polarisation $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$.

dv de D se comporte comme un dipôle de moment dipolaire :

$d\vec{p} = \vec{P} dv$, dans le champ \vec{E} il est soumis à la force :

$$d\vec{F} = (d\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} dv.$$

La densité volumique de force $\vec{f} \equiv \frac{d\vec{F}}{dv} = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$



3. Cas d'un diélectrique L.H.I

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$$

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) [E_x \partial_x + E_y \partial_y + E_z \partial_z] \cdot [E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}]$$

$$f_x = (\epsilon - \epsilon_0) [E_x \partial_x + E_y \partial_y + E_z \partial_z] E_x = (\epsilon - \epsilon_0) [E_x \partial_x E_x + E_y \partial_y E_x + E_z \partial_z E_x]$$

Régime permanent (champ statique) :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \partial_y E_z = \partial_z E_y \\ \partial_z E_x = \partial_x E_z \\ \partial_x E_y = \partial_y E_x \end{cases}$$

$$f_x = (\epsilon - \epsilon_0) [E_x \partial_x E_x + E_y \partial_y E_x + E_z \partial_z E_x] = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E^2}{2} \right)$$

$$\vec{f} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2} \cdot \vec{\nabla} (E^2) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) = (\epsilon_r - 1) \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) = (\epsilon_r - 1) \vec{\nabla} W_0$$

Où ϵ est la densité d'énergie du diélectrique D et W_0 la densité d'énergie de position dans le vide

Donc :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dv} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) = (\epsilon_r - 1) \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right)$$

4. Remarques :

- Si $\vec{E} = \overline{cte}$ (uniforme) on aura $\vec{f} = \vec{0}$
- $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ avec $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P$, si $\vec{E} = \vec{E}_0$ c à d que le champ appliqué \vec{E}_0 ($\vec{E}_P = \vec{0}$) pour un diélectrique L.H.I $\vec{f} = (\epsilon_r - 1) \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \right)$

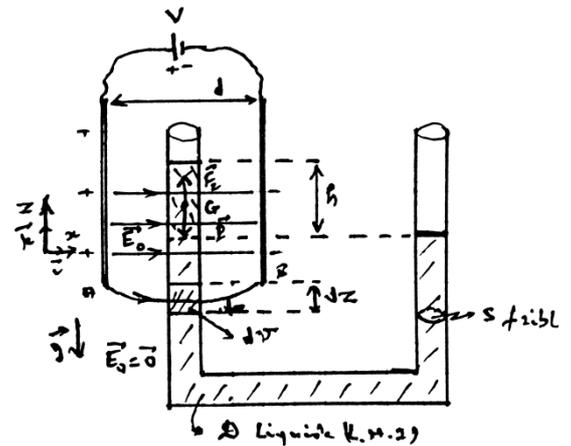
- L'expression de \vec{f} montre qu'elle est perpendiculaire aux lignes de champ ($E = cte$)
- $\vec{E} = \vec{E}(M)$ c à d inhomogène, $\vec{p} \neq \vec{p}(M)$ et $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(M) = \overline{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}(M)) - \underbrace{\vec{p} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(M)}_{=0}$ champ statique

5. Application : mesure de susceptibilité χ_e

Enoncé

Soit un liquide diélectrique (L.H.I) ($\rho = \frac{m}{v}, \chi_e$)

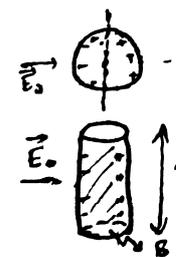
- Expliquer qualitative pourquoi le liquide monte à l'intérieur du conducteur plan.
- En supposant que l'on puisse confondre le champ \vec{E} dans le liquide avec le champ appliqué \vec{E}_0 , calculer la dénivellation h entre les surfaces libre du liquide dans les deux tranches du tube.



Solution

- Une tranche du liquide de hauteur dz est équivalente à un dipôle de moment : $d\vec{p} = \vec{P} dv$. D (L.H.I) donc $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ et $dv = S dz$ et par conséquent $d\vec{p} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} S dz$

Dans la zone où \vec{E} est inhomogène (effet de bord), $d\vec{p}$ subit la force



$d\vec{F}_z = d\vec{F}(+) + d\vec{F}(-)$ dirigée vers le haut : $d\vec{F}_z = dF_z \vec{k}$ le liquide monte vers le haut



b. $\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dv} = \chi_e \frac{\epsilon_0}{2} \vec{\nabla} (E^2)$

$\Rightarrow dF_z = \chi_e \frac{\epsilon_0}{2} \cdot 2 \cdot E \frac{dE}{dz} \cdot S \cdot dz = \chi_e \epsilon_0 S E dE, \vec{E} \approx \vec{E}_0$: en confondant le champ \vec{E} dans

le liquide avec le champ appliqué $\vec{E}_0 = \frac{V}{d}$ (car la contribution des actions intérieures est nulle : opposition des actions mutuelles). Le liquide subit au totale :

$F_z = \chi_e \varepsilon_0 S \int_0^{E_0} E dE = \frac{\varepsilon_0 \chi_e S}{2} [E^2]_0^{E_0} = \frac{\varepsilon_0 \chi_e S V^2}{2 d^2}$, la force $\vec{F}_z = F_z \vec{k}$ équilibre le poids de la tranche de hauteur h

$$\vec{F}_z + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow F_z = mg \Rightarrow \frac{\varepsilon_0 \chi_e S V^2}{2 d^2} = \rho S h g$$

D'où :

$$\boxed{h = \frac{\varepsilon_0 \chi_e V^2}{2 \rho g d^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\chi_e = \frac{2 \rho g d^2}{\varepsilon_0 V^2} \cdot h}$$

La mesure de h donne la susceptibilité χ_e du liquide diélectrique.

Remarques

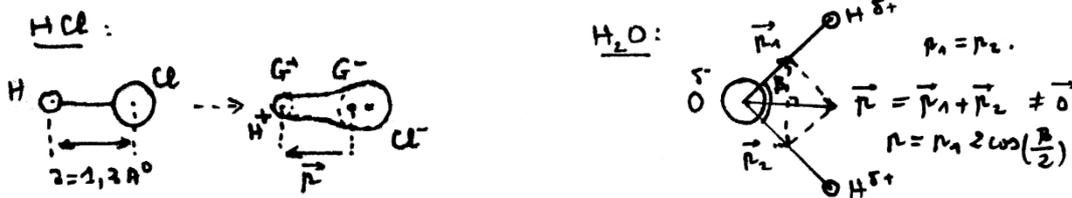
Chapitre 3

ETUDE MICROSCOPIQUE DE LA POLARISATION

VIII. Molécules polaires et molécules non polaires

1. Molécules polaires :

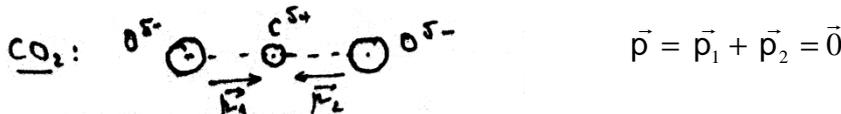
Une molécule polaire n'a pas de centre de symétrie (Exp. : HCl, H₂O, NH₃...) $G^- \neq G^+$.
Même en l'absence d'un champ électrique extérieur \vec{E}_0 elle a un moment dipolaire électrique permanent : $\vec{p} = q\vec{G^-G^+} \neq \vec{0}$.



L'application de \vec{E}_0 extérieur oriente ces dipôles dans son sens.

2. molécules non polaires

Une molécule non polaire a un centre de symétrie (H₂, CH₄, C₆H₆...) $G^- \neq G^+ \rightarrow \vec{p} = \vec{0}$.



Sous \vec{E}_0 , elle peut acquérir un moment dipolaire induit qui s'alignera avec le champ.

Remarque :

La polarisation induite dans un diélectrique sous \vec{E}_0 est le phénomène de polarisation

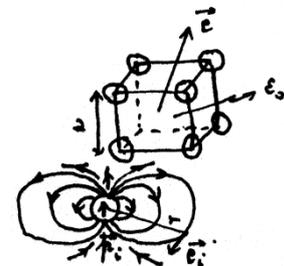
$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv} = \sum_i \vec{p}_i \text{ par unité de volume.}$$

IX. Champ microscopique et champ macroscopique :

1. Champ microscopique \vec{e} :

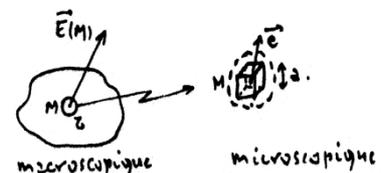
C'est le champ électrique qui existe dans le *vide* qui sépare les particules du milieu.

$$\vec{e}(\vec{r}) \approx \sum_{\text{dipoles } i} \vec{e}_i = \sum_i \frac{3(\vec{p}_i \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{p}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^5}$$



2. champ macroscopique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{\tau} \iiint_{\tau} \vec{e} d\tau$$



C'est la moyenne spatiale de \vec{e} , au voisinage d'un point M entouré d'un volume τ contenant assez de particules pour qu'il soit représentatif de la structure du matériau.

Exemple : dans un solide τ est égale au volume de la maille cristalline $\tau = a^3$ dans le système cubique (c.s, c.c, c.f.c).

Remarques :

- \vec{E} est le champ électrique qui figure dans les équations de Maxwell : $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\begin{cases} \text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}(\vec{B}) = 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_l + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \end{cases}$$

- $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ où $\vec{E}_p = -[N] \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$ champ dépolarisant.

X. Champ local \vec{E}_l

1. Définition :

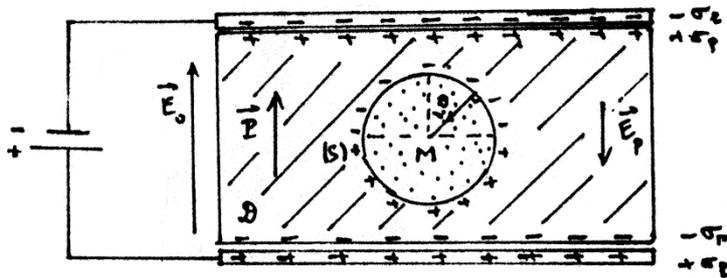
Soit M une molécule (ou un atome ou un ion) d'un diélectrique D . \vec{E}_l est le champ *ressenti* par la molécule M . C'est le champ créé en M par toutes les particules autre que celles de M .

C'est \vec{E}_l qui intervient dans les divers mécanismes de la polarisation. (§ IV).



particules =
 { 2 électrons
 { 2 protons

2. Calcul de \vec{E}_l :



$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

Soit une sphère (S) centrée en M (molécules d'essai)

$$\vec{E}_l = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (1)$$

\vec{E}_0 : champ créé par les charges fixes extérieures (ici par $\pm \sigma_l$).

\vec{E}_1 : champ créé par les molécules du diélectrique D extérieures à (S)

c à d : $D - (S)$ + la cavité sphérique

\vec{E}_2 : champ créé par les molécules autre que M intérieures à (S) .

c. à. d à $(S) - M$



Les σ_p des faces du D voisines des armatures créent $\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$. La face interne du $D - (S)$

porte $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = -P \cos(\theta) \Rightarrow \vec{E}_{cavité} = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$ d'où $\vec{E}_1 = \vec{E}_p + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$ avec $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_2$ (2)

$$(1) \rightarrow \vec{E}_l = \vec{E}_0 + \vec{E}_p + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} + \vec{E}_2 \stackrel{(2)}{=} \underbrace{\vec{E}}_{\text{macro}} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} + \underbrace{\vec{E}_2}_{\text{cavité}}$$

3. Expression de Lorentz de \vec{E}_l :

On montre que $\vec{E}_2 = \vec{0}$:

- o dans un milieu dense (gaz, liquide ou solide amorphe)
- o en un nœud d'un cristal régulier du système cubique (c.s, c.c, c.f.c) d'où :

$$\boxed{\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}} : \text{champ local de Lorentz.}$$

Remarques :

- Dans le cas d'un diélectrique, sphérique ou cubique, cristallisant dans le système

cubique on a : $\vec{E}_l = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} + \underbrace{\vec{E}_2}_{=0} = \underbrace{\vec{E}_0}_{\text{exterieur}}$

- $\vec{E}_{\text{cavité}} = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$ valable pour une cavité sphérique ou cubique.

- En pratique, pour annuler \vec{E}_p il y'a deux façons :

- o Echantillon long et fin.
- o Relier par un fil conducteur les deux faces d'une lame mince c à d neutraliser $\pm \sigma_p$.

XI. Mécanismes de la polarisation :

1. polarisation électrique induite :

Elle résulte de la *déformation des nuages électroniques* sous l'action d'un champ électrique

Soit une molécule *M non polaire*

placée en un point où règne le champ local

\vec{E}_l .



On observe pour \vec{E}_l faible : $\vec{p} \sim \vec{E}_l$

On définit $\boxed{\vec{p} \equiv \alpha_e \epsilon_0 \vec{E}_l}$ ou α_e est la polarisabilité électronique de la molécule.

Pour un milieu *non polaire* contenant n molécules, par unité de volume, de polarisabilité α_e .

Sous \vec{E}_l il acquiert la polarisabilité :

$$\boxed{\vec{P}_e = \sum_i \vec{p}_i = n \vec{p} = n \alpha_e \epsilon_0 \vec{E}_l}$$

Remarques :

$$\blacksquare \quad [p] = [\alpha \epsilon_0 \vec{E}_l] \Rightarrow [\alpha] = \left[\frac{p}{\epsilon_0 \vec{E}_l} \right] = \frac{C \cdot m}{\frac{F}{m} \cdot \frac{V}{m}} = \frac{C}{F \cdot V} \cdot m^3 = m^3$$

$$\text{car } [Q] = [C] \cdot [V] \rightarrow C = F \cdot V$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \frac{1}{4\pi \epsilon_0} = \frac{C^2}{10^7} = 8.988 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/c^2$$

α à les dimensions d'un volume.

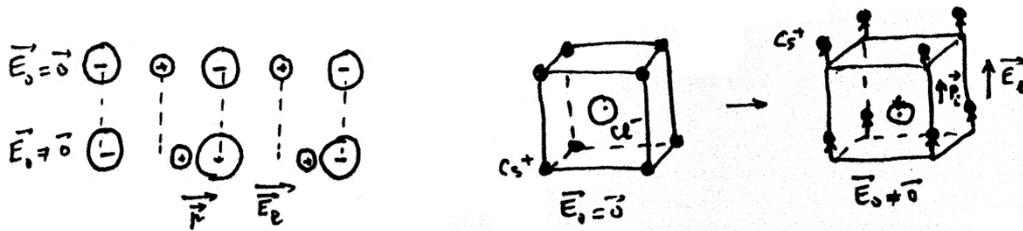
- Pour certaines molécules dissymétriques : \vec{p} n'est pas colinéaire à \vec{E}_l , on écrit :

$$\vec{p} = [\alpha] \epsilon_0 \vec{E}_l$$
 où $[\alpha]$ est le tenseur de polarisabilité
- On montre (T.D) dans le cas de la polarisabilité de l'atome d'hydrogène que

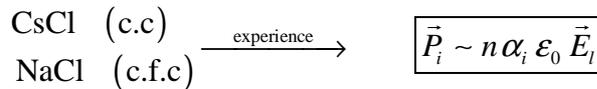
$$\alpha_e = 4\pi a^3 = 3v_a \quad (v_a = \frac{4}{3}\pi a^3)$$
 où a est le rayon de l'atome sphérique et v_a son volume.

2. Polarisation ionique induite :

Elle résulte de la déformation du réseau cristallin sous l'action d'un champ électrique



La polarisation \vec{P}_i est d'autant plus forte que la compressibilité du cristal est plus grande
Exemple : cristal



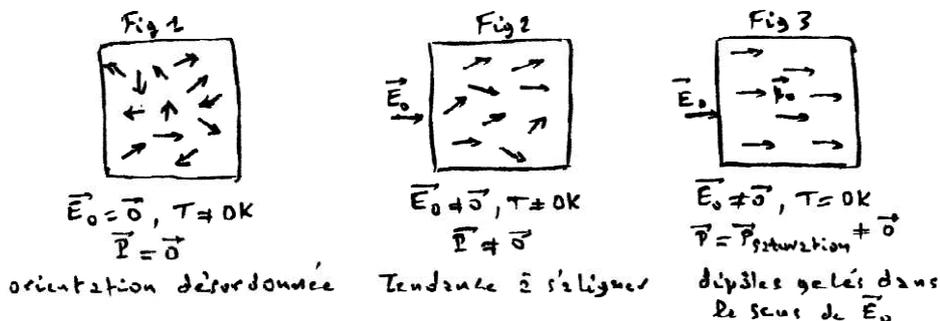
Remarque : En plus de \vec{P}_i il apparaît \vec{P}_e on a

$$\vec{P} = \vec{P}_i + \vec{P}_e = n(\alpha_i + \alpha_e) \epsilon_0 \vec{E}_l$$

3. polarisation d'orientation (ou dipolaire) :

Elle résulte de la tendance qu'ont les molécules polaires à s'orienter dans le sens d'un champ électrique.

a. Etude qualitative :



Sous \vec{E}_l , chaque molécule de moment \vec{p}_0 subit le couple $\vec{\gamma} = \vec{p}_0 \wedge \vec{E}_l$ qui tend à s'aligner avec \vec{E}_l . L'énergie potentielle du dipôle est : $U = -\vec{p}_0 \cdot \vec{E}_l = -p_0 E_l \cos(\theta)$

$U_{\min} = -p_0 E_l$ c. à. d. $\theta = 0$ plus favorable énergétiquement.

Cette tendance à avoir $\vec{P} \parallel \vec{E}_l$ est contrariée par l'agitation thermique d'énergie $k_B T$

(où $k_B = \frac{R}{N} = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ la constante de Boltzmann),

peut deviner que la polarisation d'orientation $P_e \sim \frac{E_l}{T}$

b. Calcul de Langevin : (1872-1946)

Soit un volume unité d'une substance polaire et dn le nombre de dipôles orientés à l'intérieur d'un angle solide $d\Omega$ autour d'une direction \vec{u} .

- Si $\vec{E}_l = \vec{0}$: la répartition des dipôles est désordonnée : indépendante de la direction. (fig. 1)

- Si $\vec{E}_l \neq \vec{0}$: (fig. 2) la loi de répartition statistique de Boltzmann donne :

$$\boxed{dn = A e^{-U/k_B T} d\Omega} \quad (1)$$

Les états de forte énergie $U (\rightarrow \infty)$ sont les moins probables $dn (\rightarrow 0)$.

$U = -\vec{p}_0 \cdot \vec{E}_l = -p_0 E_l \cos(\theta)$ énergie potentielle du dipôle rigide \vec{p}_0 dans \vec{E}_l .

A : constante, $\vec{r} = r\vec{u}$, $d\vec{S} = dS\vec{n}$, $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1$.

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS}{r^2} = \frac{2\pi r^2 \sin\theta d\theta}{r^2} = 2\pi \sin\theta d\theta.$$

Par raison de symétrie \vec{P} est colinéaire à \vec{E}_l .

$$\vec{P} = \langle n \vec{p}_0 \rangle = \int \vec{p}_0 \cos\theta dn = A p_0 \int \cos\theta e^{a \cos\theta} d\Omega \quad (2)$$

Où $a = \frac{p_0 E_l}{k_B T}$ et $p_0 \cos\theta$ la projection de \vec{p}_0 sur $\vec{E}_l =$ contribution à P .

Il y a n molécules (dipôles \vec{p}_0) dans le volume unité.

$$n = \int dn = A \int e^{a \cos\theta} d\Omega \quad \Rightarrow \quad A = \frac{n}{\int e^{a \cos\theta} d\Omega} \quad (3)$$

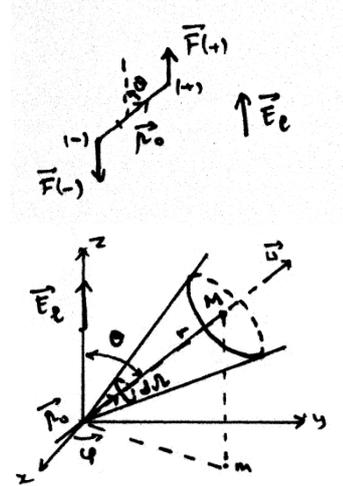
$$(2) \text{ et } (3) \text{ donnent } P = n p_0 \frac{\int_0^\pi \cos\theta e^{a \cos\theta} 2\pi \sin\theta d\theta}{\int_0^\pi e^{a \cos\theta} 2\pi \sin\theta d\theta} = n p_0 \frac{D}{V} \quad (4)$$

$$D = \int_0^\pi e^{a \cos\theta} \left(\frac{2\pi}{a} \right) d(a \cos\theta) = -\frac{2\pi}{a} \left[e^{a \cos\theta} \right]_0^\pi = -\frac{2\pi}{a} (e^{-a} - e^a) = \frac{4\pi}{a} \frac{e^a - e^{-a}}{2} = 4\pi \frac{sh(a)}{a}$$

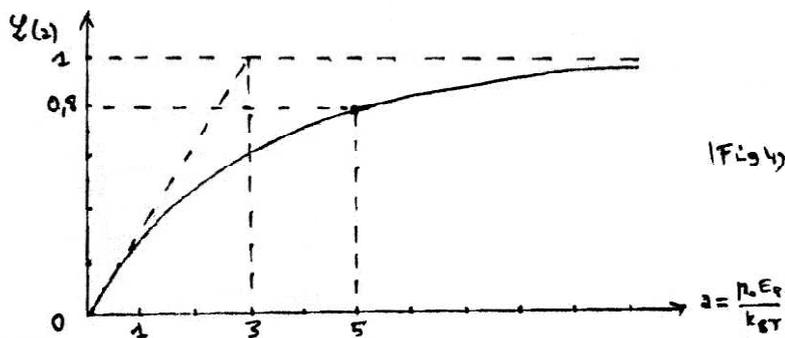
$$V = \frac{d(D)}{da}, \quad \log D = \log 4\pi + \log(sh a) - \log a$$

$$(4) \rightarrow P = n p_0 \frac{1}{D} \frac{d(D)}{da} = n p_0 \frac{d}{da} (\log D) = n p_0 \left[\frac{cha}{sha} - \frac{1}{a} \right]$$

$$\boxed{P = n p_0 \left[coth a - \frac{1}{a} \right]} = n p_0 L(a) \quad L(a) : \text{fonction de Langevin.}$$



on



c. Interprétation : $P_{or} = n p_0 L(a)$

* 80 % de P_{or} atteint pour $a = 5$. c. à. d. $p_0 E_l = 5(k_B T)$.

* $P_{or} \nearrow$ quand $a \sim \frac{1}{T} \nearrow$ c. à. d. $T \searrow$ (comme prévu dans a).

* Pour $a \gg 1$ (très basses T et E_l intense) $L(a) = 1$

$P_{or} = n p_0$: Tout les dipôles sont (gelés) alignés avec \vec{E}_l (fig. 3), une nouvelle augmentation de \vec{E}_l n'accroît plus \vec{P}_0 : saturation de la polarisation.

* Pour $T = 25^\circ C$ ($\sim 300 K$),

$$p_0 = 10^{-29} C \cdot m, E_l = 3 \cdot 10^5 V/m, k_B T = 300 \times 1.4 \cdot 10^{-23} J/K, a = \frac{10^{-3}}{1.4} \ll 1$$

C'est le cas le plus important expérimentalement : $a \ll 1$

$$\text{Au voisinage de } O, L(a) = \frac{a \operatorname{ch}(a) - \operatorname{sh}(a)}{a} = \frac{a \left(1 + \frac{a^2}{2} + \dots\right) - \left(1 + \frac{a^3}{6} + \dots\right)}{a \left(1 + \frac{a^3}{6} + \dots\right)} \approx \frac{a}{3}$$

C à d la pente de la tangente en O à $L(a)$ est $\frac{1}{3}$ (fig. 4)

$$P_{or} = n p_0 \frac{a}{3} = \frac{n p_0^2}{3 k_B T} E_l = n \alpha_{or} \epsilon_0 E_l \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{or} = \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T}} \quad \left(\sim \frac{1}{T} \right)$$

Remarques :

- $P_{or} = \frac{C}{T}$ ($a \ll 1$) varie fortement avec la température.
- P_e ne dépend que de la nature des molécules.
- P_i ne dépend que de la structure d'un cristal.

d. Exemple : Fusion du Nitrobenzène : Solide ($\epsilon_r = 3$) $\xrightarrow{\text{fusion}}$ Liquide ($\epsilon_r = 35$)
Due à la liberté d'orientation acquise par les molécules dans la phase liquide

$$P_{or} = n \alpha_{or} \epsilon_0 E_l \quad (\alpha_{or} \sim \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \text{ § V.b).}$$

XII. Susceptibilité électrique χ_e :

1. Relation entre Susceptibilité et polarisabilité :

a. relation :

$\vec{P}_{or} = n \alpha_{or} \epsilon_0 \vec{E}_l$ (§ IV), pour un mécanisme donné, α polarisabilité des constituants du milieu et n leur nombre par unité de volume. On prenant le champ de Lorentz on a :

$$\vec{P}_{or} = n \alpha \epsilon_0 \vec{E}_l = n \alpha \epsilon_0 \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3 \epsilon_0} \right) \Rightarrow \vec{P} = \frac{n \alpha}{1 - n \frac{\alpha}{3}} \epsilon_0 \vec{E} \stackrel{D(l.h.i.)}{=} \chi_e \epsilon_0 \vec{E}. \text{ D'où } \boxed{\chi_e = \frac{n \alpha}{1 - n \alpha / 3}} \quad (3).$$

Remarques :

- Cette relation est établie pour un diélectrique D (l. h. i.) et un milieu dense (gaz, liquide ou solide amorphe) ou un cristal de symétrie cubique.
- (1) établie un lien entre $\chi_e = \epsilon_r - 1$ macroscopique et α microscopique.

b. Formule de Clausius-Mossotti :

Dans (1) on introduit $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ mesurable par $C = \epsilon_r C_0$ d'un condensateur remplie par le diélectrique étudié.

On relie n à μ : masse volumique *mesurable*

$$\mu = \frac{m}{V} = \frac{n' M}{V N} = n \frac{M}{N_A} \rightarrow \text{masse molaire} \quad \text{d'où : } n = \frac{\mu N_A}{M}$$

$n = \frac{n'}{V}$: nombre de dipôles par unité de volume et $\frac{M}{N_A}$: masse d'une molécule

$$(1) \rightarrow \frac{\chi_e}{3 + \chi_e} = \frac{n \alpha}{3} \Rightarrow \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{\alpha}{3} \frac{\mu N_A}{M} \Rightarrow \boxed{\frac{M (\epsilon_r - 1)}{\mu (\epsilon_r + 2)} = N_A \frac{\alpha}{3}} \quad (2)$$

C'est la formule de Clausius-Mossotti elle est valable quelque soit le mécanisme de polarisation α_i pour les fluides (gaz denses et liquides).

* Cas d'un milieu peu dense fluides : gaz dilués (polaires ou non)

$$\text{Gaz } P = 20 \text{ atm} \quad \chi_e \ll 1 \quad \rightarrow \quad \epsilon_r \approx 1. \xrightarrow{(1)} \quad \boxed{\chi_e = n \alpha} \quad (3)$$

$$(2) \rightarrow \boxed{\frac{M}{\mu} (\epsilon_r - 1) = N_A \alpha}$$

Remarques :

- $\vec{P} = n \alpha \epsilon_0 \vec{E}_l = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$ et (3) $\rightarrow \vec{E}_l = \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ (Gaz)

- Cas d'un gaz parfait : $PV = n'RT \rightarrow P = nRT$ et (3) $\rightarrow \boxed{\chi_e = \frac{P}{RT} \alpha} \quad (4)$

$$\alpha_{or} = \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T} \rightarrow \chi_e \sim \frac{P}{T}$$

2. **facteur dont dépend la susceptibilité :**

a. milieux non polaires : α_e et éventuellement α_{ion}

- Gaz (peu dense) :

b. Les mesures montrent qu'à $T = cte$, $\chi \sim P$: conforme à (3) et (4).

- Liquides et solides :

$\chi_e = n \alpha_e$ dépend de la température très peu *par* n . (dilatation thermique)

c. Milieu polaire : Relation de Langevin-Debye.

* En générale $\alpha = \alpha_{\text{élect}} + \alpha_{\text{ion}} + \alpha_{\text{or}}$ or $\alpha_{\text{or}} = \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T}$:

On pose : $\alpha_0 = \alpha_{\text{élect}} + \alpha_{\text{ion}}$ terme indépendant de T .

D'où : $\alpha = \alpha_0 + \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T}$ Relation de Langevin-Debye

$$(2) \quad \frac{M (\epsilon_r - 1)}{\mu (\epsilon_r + 2)} = \frac{N_A}{3} \left(\alpha_0 + \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T} \right) = v \quad (5) \quad (\text{dim. volume})$$

(5) est vérifiée expérimentalement par la mesure de μ et ϵ_r à diverses températures T pour une même substance. L'accord avec la théorie satisfaisant pour des milieux pas trop denses.

* Exemple : Mesures de Debye

$$v = \frac{M (\epsilon_r - 1)}{\mu (\epsilon_r + 2)} \stackrel{(5)}{=} \frac{a'}{T} + b'$$

$$\text{Pente } a' = \frac{N_A}{3} \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B} \rightarrow p_0 = \dots$$

Ordonné à l'origine

$$b' = \frac{N_A}{3} \alpha_0 \rightarrow \alpha_0 = \alpha_{\text{élect}} \text{ d'où :}$$

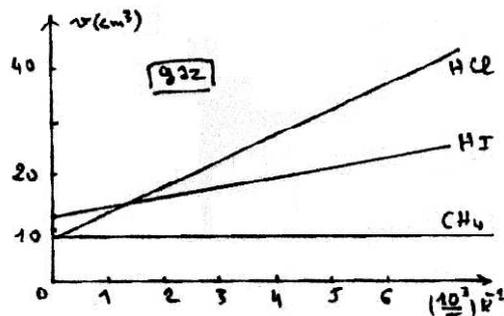
$$\forall T \quad \epsilon_r = \epsilon_r(T)$$

Figure : $p_0(\text{HCl})$ $p_0(\text{HI})$: Cl^- plus

électronégatif que I^- , HCl plus ionique que HI.

$\alpha_0(\text{HI}) > \alpha_0(\text{HCl})$: molécules HI plus grosse que HCl.

$a'(\text{CH}_4) = 0 \rightarrow p_0(\text{CH}_4) = 0$, CH_4 non polaire (à un centre de symétrie).



* ϵ_r des solides :

Dans les solides les groupements atomiques occupent des sites cristallins (position fixes).

- Milieux isotrope : (vitreux, amorphes) état désordonné des molécules, pas d'orientation. On applique (2) avec $\alpha = \alpha_{\text{élect}} + \alpha_{\text{ion}}$

- Solides cristallins :

$$\text{NaCl (c.f.c.)}, \quad \vec{E}_2 = \vec{0}, \quad \chi_e = \frac{n \alpha}{1 - n \frac{\alpha}{3}}, \quad \alpha = \alpha_{\text{ion}} + \alpha_{\text{or}}, \quad \alpha_{\text{ion}} = 3 \alpha_{\text{élect}}.$$

- Diamant (Blende) : $\alpha = \alpha_{\text{élect}}$

$$\text{BaTiO}_3 : \alpha = \alpha_{\text{élect}} + \alpha_{\text{ion}} + \alpha_{\text{or}} = \alpha_0 + \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T}.$$

XIII. Piézoélectricité :

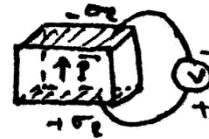
Cas des molécules *polaires* (quartz) pas de centre de symétrie. Un déplacement relatif des ions dû à une contrainte mécanique (force, $\vec{P} \sim \vec{F} \sim \vec{E}$) peut engendrer une polarisation en l'absence du champ \vec{E}_0 extérieur. Réciproquement, le cristal se déforme quand on change la polarisation par $\vec{E}_0 \neq 0$: le cristal est dit piézoélectrique.

Cette polarisation \vec{P} est détectée en métallisant les faces d'un cristal. On forme alors un condensateur. Sous \vec{P} des charges libres sont attirées sur ces électrodes d'où la mesure de ΔV (d. d. p.).

L'application d'efforts mécaniques (chocs) donne une d. d. p. $(\Delta V)_{\text{transitoire}} \approx 10 \text{ KV}$. Soit des étincelles de claquage dans l'air.

Application :

- Allume gaz ou briquet piézoélectrique.
- Mesure de forces et pressions.



Exemples :

- Sel de seignette utilisé comme transducteur dans les microphones :
la voix \sim pression \sim force induit un signal électrique
- Cristaux ADP et KDP : phosphate déshydratés d'ammonium (A) et de potassium (K) qui sont utilisés comme des générateurs et récepteurs *ultrasons*.

XIV. Ferroélectricité :

$$* \quad \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{et} \quad \chi_e = \epsilon_r - 1 = \frac{n\alpha}{1 - n\frac{\alpha}{3}}$$

$\chi_e = \epsilon_r - 1 \rightarrow \infty$ pour $n\alpha = 3$: Catastrophe de la polarisation.

On montre que : $n \sim \frac{1}{T}$ quand $T \searrow$ le cristal se contracte $n \nearrow$: $\chi_e \nearrow \sim 5000$.

Et $\epsilon_r \sim \frac{n\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3T}} \sim \frac{A}{T - T_C}$: T_C température critique de transition de Curie.

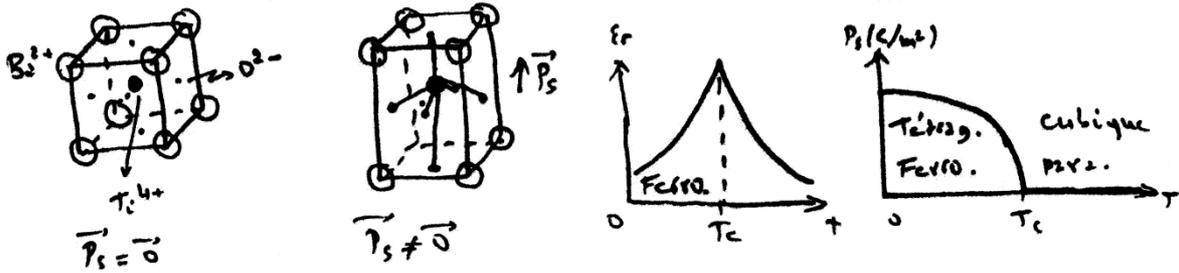
* Cas BaTiO₃ :

. $T > T_C = 120^\circ \text{C}$ structure cubique $P_S = 0$: état paraélectrique.

. $T < T_C$ structure tétragonale ($a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$) $P_S \sim 15 \cdot 10^{-2} \text{ C/m}^2$, $\epsilon_r \approx 10^4$ à

$T = 25^\circ \text{C}$: état ferroélectrique.

Application : condensateur à haute $C = \epsilon_r C_0$ avec un faible volume.



▪ Hystérésis électrique :

On fait varier E , le cristal se déforme d'où une polarisation induite P c à d un diagramme (P, E) : cycle d'hystérésis.

OM courbe de première polarisation

Pour $E > E_{\max}$ on a $P_s = cte$.

En déduisant E , partant de M , on a un état irréversible.

. à $E = E_c$: champ coercitif. $P = 0$

. à $E = 0$: il subsiste une polarisation rémanente $P \neq 0$.

On montre (voir cycle du ferromagnétisme), que l'énergie calorifique dissipée durant un tour du cycle est

$$W' = S \cdot v$$

Où v est le volume du diélectrique et S l'aire du cycle.

CHAPITRE I

RAPPELS DE MAGNETOSTATIQUE DU VIDE

I- FORCE DE LORENTZ :

La force de Lorentz qui s'exerce sur une charge q de vitesse \vec{v} en un point M de l'espace est $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$ avec : $\vec{F}_e = q\vec{E}$ est la force électrique. $\vec{F}_m = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$ est la force magnétique

Où \vec{E} et \vec{B} sont respectivement les champs électrique et magnétique qui règnent en M .

Remarque : $dW_m = \vec{F}_m \cdot \vec{v} \cdot dt = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0 \Rightarrow v = cte$

La force magnétique ne fournit pas d'énergie cinétique aux charges.

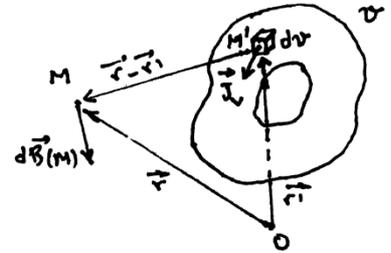
II- LOI DE BIOT ET SAVART :

Le champ magnétique crée par l'élément de volume dv d'un conducteur parcouru par des charges mobiles, de densité volumique ρ_v , en M suffisamment éloigné de M' est :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \rho_v(M') dv \quad \vec{V} \wedge \frac{\vec{M}'M}{|\vec{M}'M|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \wedge \vec{J} \frac{\vec{M}'M}{|\vec{M}'M|^3} dv$$

Où $\vec{J} = \rho_v \cdot \vec{v}$ est le courant volumique.

Le champ total est :
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \vec{J}(r') \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv$$



Dans le cas d'une distribution de courant surfacique :

On pose : $\vec{J}(\vec{r}') dv = \vec{J}_s(\vec{r}') dS$ et on a :
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_s \vec{J}(r') \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS$$

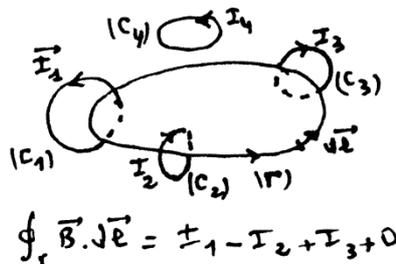
Dans le cas d'une distribution de courant linéique :

On pose : $\vec{J}(\vec{r}') dv = I \vec{dl} = I \vec{dr}'$ et on a :
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_c d\vec{r}' \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

III-THEOREME D'AMPERE

III-1-Forme intégrale :

La circulation du champ magnétique \vec{B} , sur un contour fermé r , est proportionnelle à l'intensité totale du courant du courant embrassé par r . Soit



$$\oint_r \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i N_i I_i : I_i \text{ est l'intensité de courant dans le circuit } C_i \text{ qui enlace } N_i \text{ fois le contour } r.$$

III-2-Forme locale

Le théorème de Stokes donne : $\oint_r \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot \vec{B}} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot \vec{r} dS$ Soit : $\overrightarrow{rot \vec{B}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

VI- Conservation du flux du champ magnétique :

VI-1-Forme locale :

$$div \vec{B}(r) = div \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v J(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv \right\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v div \left\{ \vec{J}(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} dv$$

Or $div(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \cdot rot \vec{b} - \vec{b} \cdot rot \vec{a}$, $rot(grad a) = 0$ et $rot \vec{J}(\vec{r}') = 0$ Donnent: $div \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

VI-2-Forme intégrale :

La formule d'Ostogradsky donne le flux de \vec{B} à travers toute surface fermée en S, limitant un volume v, Soit : $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_v div \vec{B} dv = 0$

On dit que le champ magnétique est à flux conservatif

V- Potentiel vecteur \vec{A} :

V-1-Expression de \vec{A} :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \vec{J}(\vec{r}') \wedge \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv \text{ et } \vec{f} \wedge (\vec{\nabla} \lambda) = \lambda \vec{\nabla} \wedge \vec{f} - \vec{\nabla} \wedge (\lambda \vec{f})$$

$$\text{Donnent } \vec{B}(r) = \vec{\nabla} \wedge \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\iiint_v \frac{J(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv \right)$$

Puisque $div \vec{B} = 0 = div(\overrightarrow{rot A}) \Rightarrow$ un champ de vecteur \vec{A} tel que : $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

$$\text{On en déduit que : } \vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\iiint_v \frac{J(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv \right)$$

\vec{A} est appelé potentiel vecteur du champ \vec{B} .

Dans le cas de distributions de courants surfacique ou linéique.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_s \frac{\vec{J}_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS \text{ et } A(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_r \frac{dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

V-2-Propriétés :

D'après la formule de Stokes, le flux de \vec{B} à travers S est : $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_r \vec{A} \cdot d\vec{l}$

V-3-Equation de poisson :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

Car $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$: condition de Jauge de coulomb imposé à \vec{A} .

IV-ANALOGIE :

ELECTROSTATIQUE	MAGNETOSTATIQUE
$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dv$	$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{J(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dv$
$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\overrightarrow{grad}V$	$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$
$div \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$div \vec{B} = 0 \quad et \quad \overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$	$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{J} = \vec{0}$
$\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\oint_r \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$
$\oint_r \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$	$\oiint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

CHAPITRE II

POLARISATION DES MILIEUX MAGNETIQUES

I-DIPOLE MAGNETIQUE

I-1-définition :

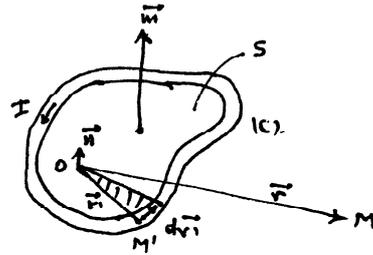
On appelle dipôle magnétique tout circuit C parcouru par un courant I tel que I a le même sens que $d\vec{r}'$. Le trièdre $(\vec{r}', d\vec{r}', \vec{n})$ est direct

I-2-Moment dipolaire magnétique :

Par définition c'est : $m \equiv \frac{1}{2} \int_C I \vec{r}' \wedge d\vec{r}'$

Si le circuit est filiforme plan et $I = cte$ on a :

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_C \vec{r}' \wedge d\vec{r}' = \frac{I}{2} \oint_C (2 dS) \cdot \vec{n} = I S \vec{n} = I \vec{S}$$



I-3-Potentiel vecteur crée par un dipôle magnétique :

C est filiforme de petites dimensions c.à.d on calcul ses effets à grandes distances (\vec{r} grande).

Partant de $\vec{A}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ on montre que :

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{r} \right)$$

I-4-Champ magnétique crée par un dipôle magnétique :

$$\vec{B}(r) = \vec{\nabla} \wedge \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} \right),$$

$$\vec{\nabla} \wedge (f\vec{a}) = f \vec{\nabla} \wedge \vec{a} + \vec{\nabla} f \wedge \vec{a} \quad \text{et} \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

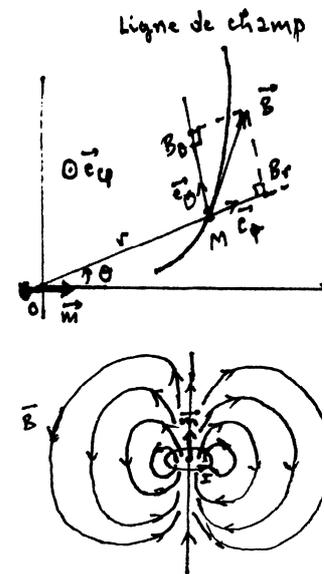
$$\text{Donnent : } \vec{B}(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$$

Or $\vec{B}(M) = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta$ avec :

$$B_r = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{m \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 m \cos \theta}{2\pi r^3}$$

$$B_\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3}$$

Ce qui permet de tracer la topologie des lignes de champ crée par le dipôle magnétique



I-5-Energie d'un dipôle magnétique dans un champ extérieur \vec{B}_a

Le théorème de Maxwell donne le travail des forces électromagnétiques lors du déplacement d'un circuit C d'une position a à une position b :

$$W = I(\Phi_b - \Phi_a) = I \Delta\Phi$$

Si le circuit est initialement à l'infini où $\vec{B}_a = \vec{0}$ et qu'on l'amène à la position finale où le champ est \vec{B}_a on : $W = I\Phi_b = I\Phi$.

Dans le cas d'un dipôle C plan de faibles dimensions \vec{B}_a est constant sur les surfaces délimitées par le circuit C d'un dipôle on a :

$$W = I \cdot \Phi = I \iint_S \vec{B}_a \cdot d\vec{S} = I \vec{B}_a \cdot \vec{S} = \vec{B}_a \cdot \vec{m} \text{ Soit } W = \vec{m} \cdot \vec{B}_a$$

L'énergie magnétique du dipôle est par définition : $U = -W = -I\Phi = -\vec{m} \cdot \vec{B}_a$

C'est une position d'équilibre stable quand le flux qui le traverse est maximal (c.à.d $\vec{m} // \vec{B}_a$)

I-6-Action subie par un dipôle magnétique dans un champ extérieur \vec{B}_a

a- Résultats des forces magnétiques (cas de translation) :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = d(\vec{m} \cdot \vec{B}_a) = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}_a) \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}_a)$$

b- Moment résultant au centre du dipôle(cas de rotation) :

$$dW = d(\vec{m} \cdot \vec{B}_a) = \vec{B}_a \cdot d\vec{m} + \vec{m} \cdot d\vec{B}_a = \vec{B}_a \cdot d\vec{m} = \vec{B}_a \cdot (d\vec{\theta} \wedge \vec{m}) = d\vec{\theta} \cdot (\vec{m} \wedge \vec{B}_a) \equiv \vec{r} \cdot d\vec{\theta}$$

D'où : $\vec{r} = \vec{m} \wedge \vec{B}_a$ (Valable même si \vec{B}_a est non uniforme)

Autre expression : $dW = \vec{r} \cdot d\vec{\theta} = I \cdot d\Phi \Rightarrow r_x = I \frac{\partial \Phi}{\partial x}, r_y = I \frac{\partial \Phi}{\partial y}, r_z = I \frac{\partial \Phi}{\partial z}$

c- Remarques :

- Lorsque \vec{B}_a est uniforme :

$\vec{F} = \vec{0}$ et l'action des forces de Laplace magnétique se réduit à un couple de moment $\vec{r} = \vec{m} \wedge \vec{B}_a$ qui tend à aligner \vec{m} dans la direction de \vec{B}_a

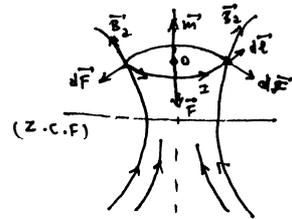
- Lorsque \vec{B}_a est non uniforme : $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}_a) \Rightarrow F_x = m \frac{\partial B}{\partial x}, F_y = m \frac{\partial B}{\partial y}, F_z = m \frac{\partial B}{\partial z}$

La force magnétique de Lorenz $d\vec{F}_m = I d\vec{l} \wedge \vec{B}_a$ montre que :

Si $\vec{m} // \vec{B}_a$: \vec{F} est dirigé vers les champs forts (Z.C.F)

Si \vec{m} est anti-parallèle à \vec{B}_a : C est attiré vers les champs faibles

Application : Cas d'une boussole dans le champ magnétique terrestre



I-7-Comparaison avec le dipôle électrique :

Dipôle magnétique :

$$\vec{m} = I\vec{S} ; \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} ; \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla}_r \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) ; W = -\vec{m} \cdot \vec{B}_a ; \vec{F} = \vec{m} \cdot \vec{\nabla}(\vec{B}_a) ; \vec{r} = \vec{m} \wedge \vec{B}_a$$

Dipôle électrique :

$$\vec{p} = q\vec{l} ; V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} ; \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}_r \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) ; W = -\vec{p} \cdot \vec{E} ; \vec{F} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} E ; \vec{r} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

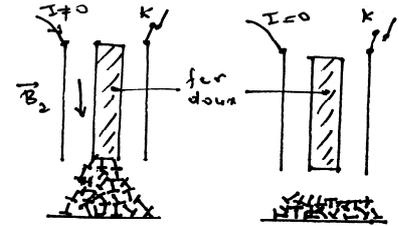
II-AIMANTATION PERMANENTE ET TEMPORAIRE

II-1-Aimantation permanente :

L'oxyde de fer Fe_3O_4 , appelé magnétite, est un minéral naturel qui attire le fer. Si on trempe l'acier et on le soumet à un champ magnétique extérieure on obtient un aimant permanent (Source de champ magnétique d'intensité constante dans le temps).

II-2-Aimantation temporaire :

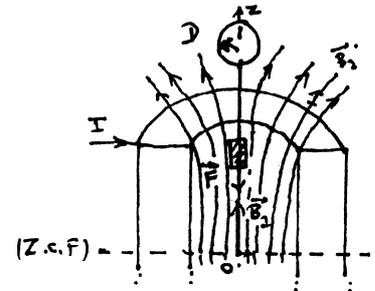
Un morceau de fer doux soumis à un champ magnétique extérieur \vec{B}_a attire des clous de fer. Quand on supprime le courant dans le solénoïde le fer doux cesse d'être un aimant, on dit que l'aimantation est temporaire.



II-3-Réponse d'une substance à un champ magnétique non uniforme :

On place un morceau de matière –suspendu à un dynamomètre D dans une bobine. On constate qu'une force \vec{F} s'exerce sur la substance. \vec{F} s'annule quand on supprime le courant. Elle est forte aux extrémités de la bobine (où $\vec{\nabla}B$ est forte) et non au centre où \vec{B}_a est maximal.

On constate aussi que F est proportionnelle à la masse de la matière et non à sa forme, et qu'elle dépend de la nature de la substance.

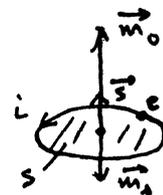


Substance	Sens de \vec{F}	Intensité F	Appellation
H ₂ O, Cu, Pb, NaCl, S, diamant, graphite	Vers le haut Sens de B_a décroissant	Très faible	Substance diamagnétique
Na, Cl, CuCl ₂	Vers le bas Sens de B_a croissant	Faible	Substance paramagnétique
Fe, Co, Ni, Fe ₃ O ₄		Forte	Substance ferromagnétique

III-ORIGINE MICROSCOPIQUE DE L'AIMANTATION

III-1-Moment magnétique d'un atome :

La circulation d'un électron sur une orbite circulaire, à la fréquence $\nu = 1/T$ est équivalente à un dipôle magnétique parcouru par un courant $i = \frac{dq}{dt} = \frac{e}{T} = e\nu$, de surface plane celle de l'orbite S. Son moment dipolaire



magnétique orbital est : $\vec{m}_0 = i\vec{S}$. L'électron tourne (spin) autour de lui-même et donne naissance à un moment cinétique intrinsèque appelé moment magnétique de spin noté \vec{m}_s .

Le moment magnétique total d'un électron est : $\vec{m}_e = \vec{m}_0 + \vec{m}_s$

Donc le moment magnétique total d'un atome ayant z électrons est : $\vec{m}_a = \sum_{i=1}^z \vec{m}_e^i = \sum_i (\vec{m}_0^i + \vec{m}_s^i)$

III-2-Règles de prévision du magnétisme d'un atome :

Une couche électronique (n, l, m_s) entièrement remplie a un moment magnétique nul (car les contributions des électrons s'annulent les uns des autres).

- Dans une couche incomplète, les états de nombre quantiques de spin m_s identiques se remplissent en priorité (règle de Hund). Ce qui donne à l'atome le moment cinétique de spin $\sum_i \vec{m}_s^i$ maximal possible (principe d'exclusion de Pauli).

Si $\vec{m}_a = \vec{0}$: L'atome est non magnétique, c'est le cas des gaz rare He, Ne...

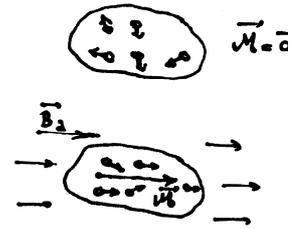
Si $\vec{m}_a \neq \vec{0}$: L'atome est magnétique, c'est le cas des atomes alcalins.

III-3-Moment magnétique d'une substance :

Dans un morceau de matière l'orientation des moments magnétiques atomiques \vec{m}_a est anisotrope (agitation thermique).

Le moment magnétique global de la substance est $\vec{M} = \sum_i \vec{m}_a^i = \vec{0}$.

Quand on soumet la substance à un champ magnétique extérieur \vec{B}_a , les \vec{m}_a^i s'orientent dans le sens de \vec{B}_a et on aura : $\vec{M} \neq \vec{0}$, on dit que la substance s'est polarisée magnétiquement, ou s'est aimantée.



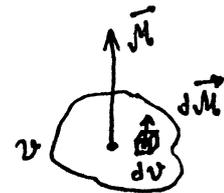
VI-PROPRIETES MAGNETIQUES DE LA MATIERE :

VI-1-Vecteur aimantation :

Soit un milieu aimanté de moment magnétique \vec{M} .

Toute élément de volume dv possède un moment dipolaire magnétique

élémentaire $d\vec{M}$ tel que : $d\vec{M} = \vec{M} dv$ ou $\vec{M} = \frac{d\vec{M}}{dv}$



\vec{M} est appelé : moment magnétique par unité de volume. Ou vecteur polarisation magnétique. Ou vecteur aimantation.

Cette hypothèse des courants dipolaires dits ampériens permet de ramener l'étude des milieux aimantés à celle des circuits filiformes (spires) : C'est l'approximation dipolaire.

Unité : $[M] = \left[\frac{M}{v} \right] = \left[\frac{I.S}{v} \right] = A/m$ en S.I.

VI-2-Classification magnétique de la matière :

On distingue trois cas :

- **Diamagnétisme** : $\vec{m}_a = \vec{0}$ (polarisation ionique)

Si $\vec{B}_a = \vec{0}$ $\vec{M} = \vec{0}$ (anisotropie de \vec{m}_a)

Si $\vec{B}_a \neq \vec{0}$ il apparaît une aimantation \vec{M} de sens opposé à : $\vec{B}_T = \vec{B}_a + \vec{B}_m$.
 \vec{B}_m Est du à \vec{M} .

- **Paramagnétisme** : $\vec{m}_a \neq \vec{0}$ (polarisation d'orientation)

Si $\vec{B}_a = \vec{0}$ $\vec{M} = \vec{0}$ (L'agitation thermique contrarie les dipôles magnétiques)

Si $\vec{B}_a \neq \vec{0}$, il apparaît une aimantation \vec{M} de même sens que \vec{B}_T

- **Ferromagnétisme** : $\vec{m}_a \neq \vec{0}$

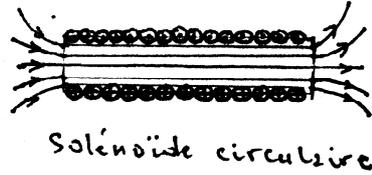
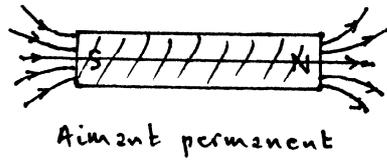
Au niveau microscopique, il existe un fort couplage entre les moments magnétiques atomique, ce qui maintient une orientation collective des moments \vec{m}_a malgré l'agitation thermique (à condition que $T < T_c$: température de Curie)

Même si $\vec{B}_a = \vec{0}$ $\vec{M} \neq \vec{0}$ il y a une aimantation rémanente et le corps est un aimant permanent.

V-CHAMP ET POTENTIEL VECTEUR CREES PAR UN MILIEU AIMANTE :

V-1-Hypothèse d'Ampère :

En pratique, on constate qu'un barreau aimanté produit un champ magnétique de topologie identique à celle du champ magnétique extérieur d'un solénoïde de même forme



Ce qui amène Ampère, en 1881, de suggérer que ces champs avaient pour sources des boucles microscopiques de courants liés à la structure du milieu aimanté. Ces courants dits Ampériens peuvent être traités comme des dipôles magnétiques.

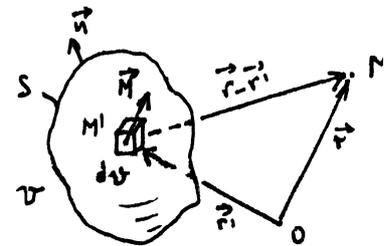
V-2-Calcul du potentiel vecteur :

Soit un milieu aimanté de volume v . En chaque point M' de v le vecteur aimantation est $\vec{M}(r')$. Dans l'approximation dipolaire magnétique (hypothèse d'Ampère), la contribution du moment $d\vec{M} = \vec{M}dv$ au potentiel vecteur en M est :

$$d\vec{A}(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{M} \wedge \vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right). \text{ Le potentiel vecteur total est :}$$

$$d\vec{A}(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \vec{M} \wedge \vec{\nabla}_M' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv \text{ car } \vec{\nabla}_M = -\vec{\nabla}_M' = -\vec{\nabla}'$$

$$\text{Or } \vec{a} \wedge \vec{\nabla} f = f \vec{\nabla} \wedge \vec{a} - \vec{\nabla} \wedge (f\vec{a}) \text{ et } \iiint_v \vec{\nabla} \wedge \vec{a} \, dv = \iint_S d\vec{S} \wedge \vec{a}$$



$$\text{D'où : } \vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \iiint_v \frac{\vec{\nabla}' \wedge \vec{M}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv + \iint_S \frac{\vec{M} \wedge \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS \right\}$$

Donc pour calculer le potentiel vecteur créé par un milieu aimanté, on peut remplacer la distribution réelle de dipôles magnétiques par une distribution fictive de courants d'aimantation de densité :

- Volumique $\vec{J}'(r') = \vec{\nabla}' \wedge \vec{M}(r')$ dans v
- Surfactive $\vec{J}'_s(r') = \vec{M}(r') \wedge \vec{n}$ sur S délimitant v .

Remarque : Si en plus, le milieu est conducteur il peut être parcouru par des courants libres de densité $\vec{J}_l(r')$ (courants de conduction, de convection du faisceau de particules). Le potentiel

$$\text{s'écrira : } \vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \iiint_v \frac{\vec{J}'(r') + \vec{J}_l(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv + \iint_S \frac{\vec{J}'_s(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS \right\}$$

V-3-Justification des courants équivalents à une aimantation :

L'aimantation du milieu est due à des petites spires circulaires identiques de surfaces et parcourue par i . (c) est une courbe fermée tracée dans l'échantillon.

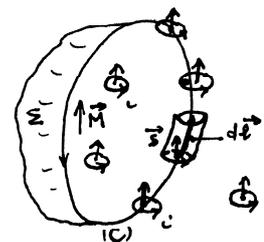
On a n spires qui enlacent $d\vec{l}$.

Le moment magnétique du cylindre de volume $\vec{S} \cdot d\vec{l}$ est :

$$n i \vec{S} = \vec{M} \vec{S} d\vec{l} = \vec{S} \vec{M} \cdot d\vec{l} \text{ Car } \vec{S} \parallel \vec{M} \text{ soit : } n i = \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

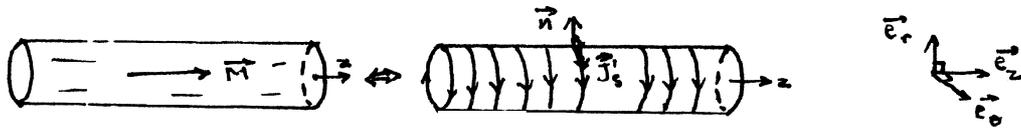
Le courant total qui traverse C est

$$I = \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \cdot d\vec{\Sigma} \text{ (Th. Stokes)}$$



Ce modèle simple montre que l'aimantation est équivalente à un courant de densité $\vec{\nabla} \wedge \vec{M}$.

b- Cas d'un barreau cylindrique uniformément aimanté :



L'aimantation est $\vec{M} = M \vec{e}_z$ avec $\vec{M} = \text{cte}$

$$\begin{cases} \vec{J}_v' = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow J_v' = 0 \\ \vec{J}_s' = \vec{M} \wedge \vec{n} = M \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = M \vec{e}_\theta \Rightarrow J_s' = M \end{cases}$$



La figure ci contre représente les dipôles magnétiques dans une section du barreau. En volume les courants adjacents s'annulent $J_v' = 0$ et seul subsiste un courant en surface de densité $J_s' = M$ (c.à.d on a une nappe de courant superficielle). Ce qui explique l'identité observée, en pratique, des champs extérieurs d'un aimant cylindrique et d'un solénoïde (hypothèse d'Ampère)

IV-EXCITATION MAGNETIQUE \vec{H} :

IV-1-Définition :

Le champ magnétique total $\vec{B}_r = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ crée par les dipôles magnétiques de densité de courant \vec{J}' et des courants libres de densité \vec{J}_l vérifie, en régime permanent ($\partial_t \vec{E} = \partial_t \vec{B} = 0$), les équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_l + \vec{J}') \quad (2) \quad \text{Or} \quad \vec{J}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$$

$$(2) \text{ donne } \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} + \vec{J}_l \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_l \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_l \quad (2')$$

On appelle, donc, excitation magnétique le vecteur \vec{H} définie par :

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})} \quad (3)$$

(1) et (3) donnent $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \neq 0$: H n'est pas à flux conservatif

Dans le vide : $\vec{M} = \vec{0}$ Soit $\vec{J}' = \vec{0}$: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_l$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$: \vec{H} est à flux conservatif.

IV-2-Théorème d'Ampère :

Le théorème de Stokes permet de donner le théorème d'Ampère relatif à l'excitation \vec{H} on a :

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_s \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_s \vec{J}_l \cdot d\vec{S} \quad \text{Soit : } \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_l^i$$

On ne tient compte que des courants libres de conduction : $[H] = A/m$ comme l'aimantation M

IV-MILIEUX MAGNETIQUES LINEAIRES HOMOGENES ET ISOTROPES (L.H.I) :

- Dans ces milieux \vec{M} est proportionnelle à \vec{H} on a : $\boxed{\vec{M}(r') = \chi_m \vec{H}(r')} \quad (1)$

$r' = OM'$ où M' est un point du milieu. χ_m est la susceptibilité magnétique du milieu

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}} \quad (2)$$

En posant : $\mu = \mu_0(1 + \chi)$: perméabilité absolue du milieu magnétique

Ou : $\mu_e = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi$: perméabilité relative du milieu par rapport au vide

$$\text{Donc } \vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu} \quad \text{c.à.d} \quad \boxed{\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B}} \quad (3)$$

Les relations (1),(2), et (3) sont équivalentes pour un milieu (l.h.i) tel qu'un milieu paramagnétique ou diamagnétique.

*Dans la matière condensée (liquide, solide) à la température ambiante

Dans les milieux diamagnétiques $\chi_m \approx -10^{-5}$ $\chi_m < 0$

Dans les milieux paramagnétique $\chi_m \approx +10^3$ $\chi_m > 0$

$$\text{Soit } |\chi_m| \ll 1 \text{ c.à.d } \mu_r \approx 1, \quad \mu \approx \mu_0, \quad \vec{M} \ll \vec{H}, \quad \vec{B} \approx \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}$$

Autrement dit le champ \vec{B}_m dû à l'aimantation est négligeable devant le champ extérieur appliqué \vec{B}_a . Le champ total dans le milieu (l.h.i) est :

$$\vec{B}_T = \vec{B}_a + \vec{B}_m \approx \vec{B}_a \quad \text{soit } \vec{B}_a \approx \mu_0 \vec{H} \quad \text{et} \quad \vec{M} \approx \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_a \quad \text{comme dans le vide.}$$

Remarque : dans les milieux paramagnétiques (polarisation magnétique d'orientation) la dépendance de χ_m avec la température suit la loi de curie : $\chi_m = \frac{c}{T}$ (c : est la constante de curie)

IIIIV-ANALOGIE AVEC LES MILIEUX DIELECTRIQUES :

Milieux diélectriques	ϵ_0, ϵ	\vec{E}	\vec{D}	\vec{P}	χ_e	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$
Milieux magnétiques	μ_0, μ	\vec{H}	\vec{B}	$\mu_0 \vec{M}$	χ_m	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$	$\mu_0 \vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}$

XI-FORCE EXERCEE SUR UN MILIEU MAGNETIQUE DANS UN CHAMP NON UNIFORME :

XI-1-Expression de la force :

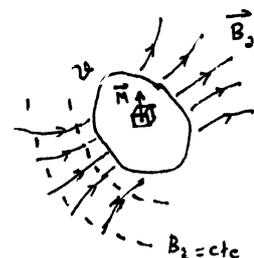
L'élément de volume dv d'aimantation \vec{M} , est équivalente à un dipôle magnétique de moment $d\vec{M} = \vec{M} dv$; subit dans un champ magnétique appliqué non uniforme \vec{B}_a la force élémentaire :

$$d\vec{F} = \vec{\nabla}(d\vec{M} \cdot \vec{B}_a) = \vec{\nabla}(\vec{M} \cdot \vec{B}_a) dv. \quad \text{Soit } dF_x = (\vec{M} \cdot \frac{d\vec{B}_a}{dx}) dv; \quad dF_y = (\vec{M} \cdot \frac{d\vec{B}_a}{dy}) dv; \quad dF_z = (\vec{M} \cdot \frac{d\vec{B}_a}{dz}) dv$$

Pour un matériau para ou diamagnétique on a $\vec{M} \approx \chi_m / \vec{B}_a \mu_0$

La densité volumique de force est :

$$f_x = \frac{dF_x}{dv} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_a \cdot \frac{d\vec{B}_a}{dx} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \frac{d(B_a^2)}{dx}; \quad f_y = \frac{dF_y}{dv} = \dots \quad f_z = \frac{dF_z}{dv} = \dots$$



Soit
$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dv} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \vec{\nabla}(B_a^2)$$

Interprétation de l'expérience de 2°) : Cette expression montre que \vec{f} est perpendiculaire aux surfaces ($B_a = \text{cte}$), et lorsque $\chi_m > 0$ le sens de \vec{f} est celui des \vec{B}_a croissants, donc :

- les paramagnétiques sont attirés vers les régions des champs forts.
- les diamagnétiques sont attirés vers les régions des champs faibles.

XI-2-Mesure de la susceptibilité :

Les méthodes de mesure de χ_m sont basés sur la formule de \vec{f} .

a-Méthode de Gouy (cas des solides en général)

L'échantillon est un barreau cylindrique de section S faible

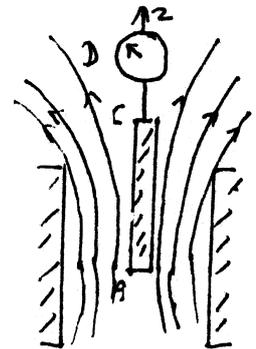
$$dF_z = f_z dv = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \frac{dB_a^2}{dz} S \cdot dz = \frac{\chi_m S}{2\mu_0} d(B_a^2)$$

La force totale s'exerçant sur l'échantillon est :

$$F_z = \int_A^B dF_z = \frac{\chi_m S}{2\mu_0} [B_a^2(c) - B_a^2(A)]$$

S, $B_a(c)$ et $B_a(A)$ sont mesurables (connues), le mesure de F_z donne χ_m .

Cette méthode est aussi valable pour les liquides et les poudres mis dans un tube non magnétique et de parois très minces (v minimal)



b- Tube de Quincke (cas d'un liquide paramagnétique)

On a : $\vec{F}_z = \frac{\chi_m S}{2\mu_0} [B_a^2(c) - B_a^2(A)] \vec{k}$. $\vec{B}_a(A) \approx \vec{0}$ loin de la bobine.

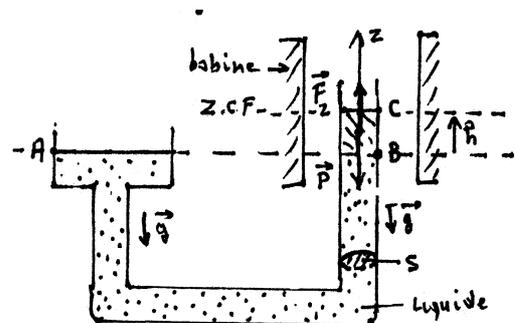
Le poids du volume du liquide déplacé est $\vec{P} = -P\vec{k}$

avec : $P = mg = \rho v g = \rho g S (z_c - z_B) = \rho g S h$

$h = z_c - z_B$ est la distance entre les deux surfaces libres du liquide. La force magnétique équilibre le poids

$\vec{P} + \vec{F}_z = \vec{0}$ Soit $F_z = P$. D'où
$$\chi_m = 2\mu_0 \rho g h / B_a^2(c)$$

$\rho, g, B_a(c)$ sont connus, la mesure de h donne χ_m



c- Remarque : Les deux expériences sont réalisées dans le vide, dans l'air, la mesure donne $\chi_m - \chi_m^{\text{air}}$ avec $\chi_m^{\text{air}} = 37.10^{-8}$ (S.I) dans les C.N.T.P

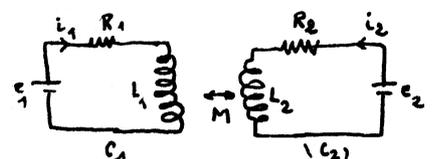
X-ENERGIE DES COURANTS DANS UN MILIEU MAGNETIQUE :

X-1-Energie magnétique des deux circuits :

On montre que l'énergie emmagasinée dans les deux circuits C_1 et C_2 , quand on passe de l'état initial où $I_1 = I_2 = 0$ à un autre état de courants I_1 et I_2 est :

$$W = \frac{1}{2} (I_1 \Phi_1 - I_2 \Phi_2) \text{ OÙ : } \Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2 \text{ et } \Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

Sont respectivement le flux traversant C_1 et C_2 .



Pour plusieurs circuits on a : $W = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i$

X-2-Energie d'un milieu magnétique filiforme dans un champ magnétique extérieur :

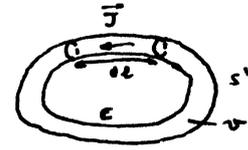
Soit un volume v de matière magnétique parcouru par des courants réels de densité volumique \vec{J} . S' surface s' appuyant sur C .

L'énergie magnétique du milieu est $W = \frac{1}{2} I \Phi$.

$$\Phi = \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S}' = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad \text{et} \quad I = \int_S \vec{I} \cdot d\vec{S}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_v \vec{J} \cdot \vec{A} dv = \frac{1}{2} \int_{\text{espace}} \vec{J} \cdot \vec{A} dv. \quad (\text{car } \vec{J} = \vec{0} \text{ en dehors de } C)$$

A l'aide de $\vec{J} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H}$ et $\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \wedge \vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$.



On montre que :

$$W = \iiint_{\text{espace}} \vec{H} \cdot \vec{B} dv$$

X-3-Densité volumique d'énergie magnétique :

$$\sigma = \frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

et

$$\sigma = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu H^2}{2} \quad \text{Pour un milieu l.h.i}$$

X-4-Cas d'un milieu magnétique contenant des charges et des courants de polarisation :

$$\sigma = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \vec{P} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

IX-REALATIONS DE PASSAGE ENTRE DEUX MILIEUX MAGNETIQUES

Problème : soit deux milieux magnétiques séparés par une surface S' parcourue par une densité superficielle de courant \vec{J}_s (libre ou de conduction). Quelles sont les relations qui lient (\vec{B}_1, \vec{H}_1) dans le milieu (1) et (\vec{B}_2, \vec{H}_2) dans le milieu (2) ?

IX-1-Le champ électrique \vec{E}

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

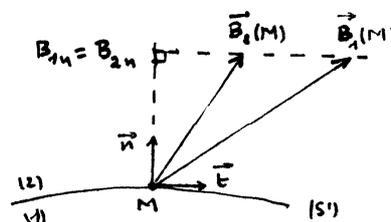
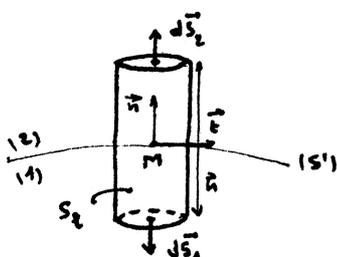
Continuité de : $\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t}$

$$\partial_y E_z - \partial_z E_y = \partial_t B_x \rightarrow 0 = 0$$

$$\partial_z E_x - \partial_x E_z = \partial_t B_y \rightarrow -(E_{z_2} - E_{z_1}) = 0 \rightarrow E_{z_2} = E_{z_1}$$

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = \partial_t B_z \rightarrow -(E_{y_2} - E_{y_1}) = 0 \rightarrow E_{y_2} = E_{y_1}$$

IX-2-Le champ magnétique \vec{B}



$\vec{n}_{12} = \vec{n}$: Normale à S' , orientée d'un milieu (1) vers un milieu (2).

Le flux de \vec{B} à travers la surface $S = S_l \cup S_1 \cup S_2$ cylindrique est :

$$\Phi = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dv = 0 \quad (\text{car } (\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0)), \quad d\vec{S}_2 = -d\vec{S}_1 = \vec{n} dS$$

$$\Phi = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot \vec{n} dS - \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_l} \vec{B} \cdot \vec{E} dS_l = 0 \quad \text{or} \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \iint_{S_l} \vec{B} \cdot \vec{E} dS_l \rightarrow 0$$

$$D'où : (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n}}$$

IX-3-L'excitation électrique \vec{D} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l \Leftrightarrow \partial_x D_x + \partial_y D_y + \partial_z D_z = \rho_l \rightarrow D_{x_2} - D_{x_1} = \sigma_2$$

$$\boxed{\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n} = \sigma_2 \vec{n}_{12}} : \text{Discontinuité de la composante normale de } \vec{D} \text{ due à } \sigma_2$$

IX-4-Excitation magnétique \vec{H}

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \partial_y H_z - \partial_z H_y &= \partial_t D_x + (J_x)_l \Leftrightarrow 0 = 0 & ((J_x)_l = 0) \\ \partial_z H_x - \partial_x H_z &= \partial_t D_y + (J_y)_l \Leftrightarrow -(H_{z_2} - H_{z_1}) = J_y^S \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x &= \partial_t D_z + (J_z)_l \Leftrightarrow (H_{y_2} - H_{y_1}) = J_z^S \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ (H_{y_2} - H_{y_1}) = J_z^S \\ (H_{z_2} - H_{z_1}) = -J_y^S \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{J}_l^S \wedge \vec{n}_{12}} \text{Discontinuité de la composante tangentielle de } \vec{H} \text{ en présence de } \vec{J}_l^S.$$

IX- Réfraction des lignes de champ :

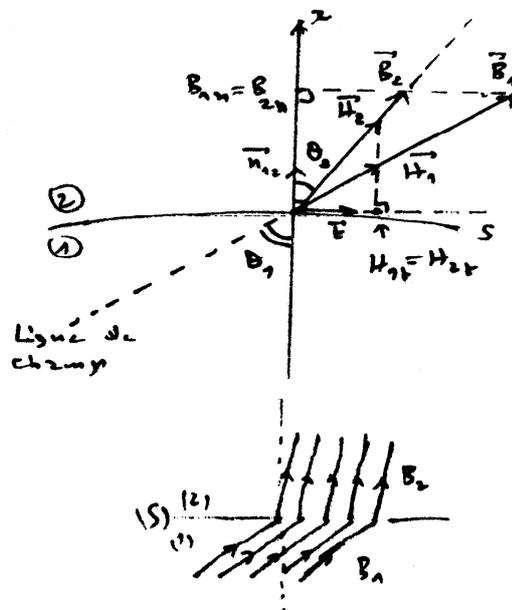
Soient 2 milieux magnétiques (l.h.i) de perméabilité μ_1 et μ_2 , séparés par une surface S où : $\vec{J}_l^S = \vec{0}$ en général.

$$\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n} \Rightarrow \vec{B}_1 \cos \theta_1 = \vec{B}_2 \cos \theta_2 \quad (1)$$

$$\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t} \Rightarrow \frac{B_1}{\mu_1} \sin \theta_1 = \frac{B_2}{\mu_2} \sin \theta_2 \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \rightarrow \boxed{\frac{\tan \theta_1}{\mu_1} = \frac{\tan \theta_2}{\mu_2}}$$

Remarque : si $\mu_1 > \mu_2 \Rightarrow \theta_1 > \theta_2 \Rightarrow B_1 > B_2$



B_I est plus intense dans le milieu (1) :
où les lignes de champ sont plus serrées.

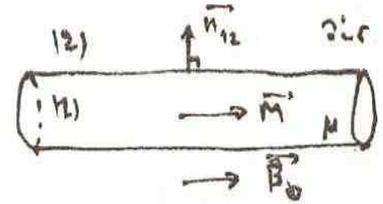
Application : Cas d'un barreau cylindrique aimanté

Le barreau uniformément aimanté ($\vec{M} = \text{cte}$) baigne dans un champ magnétique extérieur \vec{B}_0 parallèle à son axe.

En un point M' d'un barreau $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$, (\vec{B}_m est dû à l'aimantation)

Dans le cas où $\vec{J}_{sl} = \vec{0}$ on a : $\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{J}_{sl} \wedge \vec{n}_{12} = \vec{0}$

Soit $H_{2t} = H_{1t} \leftrightarrow H = H_0$ (c.à.d $H_m = 0$) : excitation démagnétisante.



$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu}$$

Si le milieu est l.h.i :

$$\frac{B}{\mu} = \frac{B}{\mu_0} \Rightarrow B = \mu_r B_0$$

Soit un tube de champ de section S (et S_0) respectivement à l'intérieur (et l'extérieur) du barreau.

comme $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$: le flux se conserve à l'intérieur du tube.

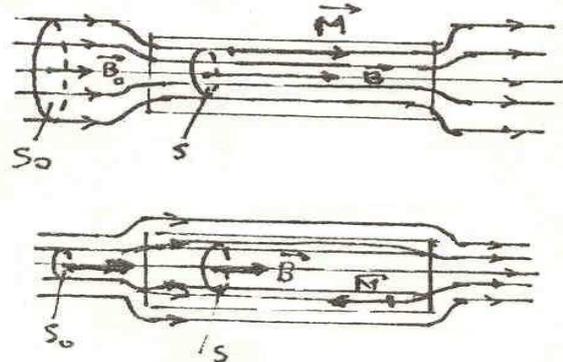
On a : $\Phi = 0 = \vec{B}_0 \cdot \vec{S}_0 + \vec{B} \cdot \vec{S} \leftrightarrow B_0 S_0 = B \cdot S = \mu_r B_0 S \leftrightarrow S_0 = S \mu_r$

Donc : $\boxed{\frac{B}{S_0} = \frac{S_0}{S} = \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m}$ et $\boxed{\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_0}$

-Barreau paramagnétique : $\chi_m > 0, \mu_r > 1, B > B_0, S_0 > S$ et \vec{M} de même sens que \vec{B}_0 . Le cylindre concentre les lignes sz champ dans S.

$\mu > \mu_0$: Le flux traverse facilement le cylindre que l'air (vide) d'où le nom de perméabilité donné à μ .

-Barreau diamagnétique : $\chi_m < 0, \mu_r < 1, B < B_0, S_0 < S$ et M anti-parallèle à \vec{B}_0 . Le cylindre repousse les lignes de champ qui traversent difficilement le cylindre que l'air ($\mu < \mu_0$).



ETUDE MICROSCOPIQUE DE L'AIMANTATION

I-DIAMAGNETISME :

1-ETUDE QUALITATIVE :

Quand on augmente le champ magnétique extérieur de 0 à B_{OT} appliqué à un atome le mouvement des électrons est perturbé. Ceci correspond à un courant induit ($i \sim e = -\frac{d\Phi}{dt}$) càd

un champ magnétique (Biot-Savart : $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{u}}{r^2} dv$) qui tend à s'opposer à l'augmentation de \vec{B}_0 (Loi de lenz). Donc le moment magnétique correspondant à ce mouvement supplémentaire est dirigé dans le sens $-\vec{B}_0$.

Si $\vec{m}_{at} = \vec{0}$: Les moments magnétiques induits précédents interviennent seuls et la substance acquiert une \vec{M} de direction $-\vec{B}_0$: on dit qu'elle est diamagnétique. Le diamagnétisme est une propriété générale de la matière, car cette dernière comporte des électrons .

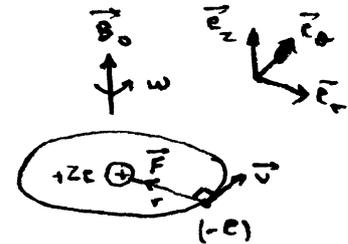
Si $\vec{m}_{at} \neq \vec{0}$ permanent, le diamagnétisme est masqué par le paramagnétisme (phénomène plus

intense).en effet : (l.h.i) $\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_0$; $|(\chi_m)_{dia}| \approx +10^{-5} \ll (\chi_m)_{para} \approx 10^{-3}$

2-THEORIE DU DIAMAGNETISME :

a- Pulsation de Lamor :

Soit un atome avec un électron qui décrit un cercle avec une vitesse angulaire ω_0 , quand $\vec{B}_0 = \vec{0}$. On appliquant un champ $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$, on montre que la



nouvelle vitesse angulaire est : $\omega = \omega_0 + \omega_L$ où $\omega_L = \frac{eB}{2m} = \frac{1}{2} \omega_c$: pulsation de Lamor.

A $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \omega_L$ correspond l'apparition d'un moment magnétique supplémentaire (induit) dirigé dans le sens opposé à \vec{B}_0 .

b-Théorème de Lamor :

Quand on applique un \vec{B}_0 à un atome, un nouveau mouvement possible des électrons est une précession d'ensemble des orbites (q.q.c) électroniques autour de \vec{B}_0 à la vitesse angulaire ω_L

3-SUSCEPTIBILITE DIAMAGNETIQUE :

Soit un atome sous $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$, ses Z électrons effectuent une précession de vitesse $\vec{\omega}_L = \omega_L \vec{e}_z$. Le mouvement de ces Z électrons est équivalent à un courant :

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{Ze}{T_L} = -\frac{Ze\omega_L}{2\pi} \quad \text{où : } \omega_L = \frac{eB}{2m_e}$$

La circulation de I, à la distance ρ de Oz, correspond à un moment magnétique :

$\vec{m} = IS\vec{e}_z = I\pi\rho^2\vec{e}_z$. Le moment magnétique induit dans l'atome, par \vec{B}_0 est :

$m_{at}^{ind} = I\pi\langle\rho^2\rangle\vec{e}_z$ où : $\langle\rho^2\rangle = \frac{1}{v}\iiint_v\rho^2 dv$ est la valeur moyenne de $\rho^2 = x^2 + y^2$ pour les z électrons de l'atome .

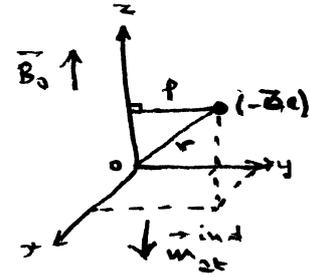
Cas s'un atome sphérique : $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle r^2 \rangle \text{ D'où : } \langle \rho^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle = \frac{2}{3}\langle r^2 \rangle$$

$$\text{D'où : } \vec{m}_{at}^{ind} = -\frac{ze}{2\pi} \cdot \frac{eB_0}{2m_e} \cdot \pi \cdot \frac{2}{3}\langle r^2 \rangle \vec{e}_z = -\frac{ze^2}{6m_e}\langle r^2 \rangle \vec{B}_0$$

Si $\vec{m}_{at}^{par} = \vec{0}$: Ce moment diamagnétique induit

\vec{m}_{at}^{ind} contribue seul à l'aimantation.



Soit une substance contenant n atomes/ v. volume, l'aimantation $\vec{M} = n \vec{m}_{at}^{ind}$, comme

$$\vec{M}_{dia} = \chi_m \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \text{ alors : } \boxed{(\chi_m)_{dia} = -n \mu_0 \frac{Z e^2}{6 m_e} \langle r^2 \rangle} : \text{Formule de Langevin}$$

4- REMARQUES :

Rem 1: χ_m augmente avec Z

Rem 2: χ_m ne dépend de T que par n ; très peu pour les liquides et solides.

Cas d'un gaz parfait : $n = \frac{n'}{V} = \frac{P}{RT}$, n' : nombre d'atomes.

Rem 3: (A.N) cas d'un gaz rare : H₂, N₂.

$$n = \frac{N}{v_M} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{22.4} 10^{-3} \approx 10^{26} m^{-3}, \quad r = 1 \text{ \AA}$$

$$(\chi_m)_{dia} \approx -10^{26} \cdot 10^{-7} \frac{(10^{-19})^2}{10^{-30}} \cdot (10^{-10})^2 \approx -10^{-9} < 0$$

*cas des liquides et solides : $n'' = 10^3 n \rightarrow \chi_m = -10^6 < 0$

Ces ordres de grandeurs correspondent aux valeurs mesurées de $(\chi_m)_{dia}$.

Rem 4 :

La M.Q confirme cette formule pour des distributions électroniques à symétrie sphérique et permet de calculer $\langle r^2 \rangle$ à partir des fonctions d'ondes. L'accord avec l'expérience est excellent pour les gaz rares (atomes à symétrie sphérique).

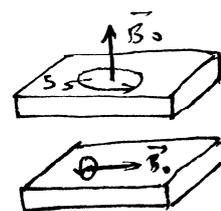
Rem 5 :

$(\chi_m)_{dia}$ est sensiblement en accord avec l'expérience pour des substances dont les atomes n'ont pas la symétrie sphérique, mais disposés de façon aléatoire (gaz, liquides, et solides amorphes).

Pour des cristaux anisotropes \vec{M} dépend de la direction de \vec{B}_0 . Exemple, graphite C

\vec{B}_0 Transversale $\vec{M}_{(dia)} = \chi_m \frac{B_0}{\mu_0}$ importante

\vec{B}_0 Longitudinale $\vec{M}_{(dia)} = \chi_m \frac{B_0}{\mu_0}$ faible.



II-PARAMAGNETISME

1- INTRODUCTION :

Soit un milieu aimanté formé d'atomes, chacun de moment magnétique permanent \vec{m} . Dans \vec{B}_0 extérieur, les dipôles atomiques subissent le couple : $\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$ et tendant à s'orienter dans le sens de \vec{B}_0 (minimum de $H = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$). Il apparaît une \vec{M}_{para} dans le sens de \vec{B}_0 . Cette tendance d'orientation est contrariée par l'agitation thermique, Donc pour \vec{B}_0 donné $M_{para} \sim \frac{1}{T}$ est fonction décroissante de T. D'où P_{or} et M_{para} sont des phénomènes analogues.

P_{elect} et M_{diam} \rightarrow à des perturbations de l'orientation électronique de l'atome sous un champ appliqué.

$P_{elect} \rightarrow$ Distorsion électronique dans la direction de \vec{E}_{ext} : Phénomène indépendant de T

$M \rightarrow$ Précession électronique autour de \vec{B}_0 : Phénomène indépendant de T

Soit un milieu formé d'atomes ayant des moments (\vec{p} ou \vec{m}) permanente.

La Polarisation $\vec{P} = \vec{P}_{elec} + \vec{P}_{orient}$: de même sens avec $P_{elec} \approx P_{orient}$
 $\quad \quad \quad > 0 \quad \quad \quad > 0$

L'aimantation $\vec{M} = \vec{M}_{dia} + \vec{M}_{para}$: de sens opposés $M_{dia} \ll M_{para}$
 $\quad \quad \quad < 0 \quad \quad \quad > 0$

2- MILIEU PARAMAGNETIQUE :

a) quand $\vec{m}_{at} \neq \vec{0}$ (permanent) de paramagnétisme masque de diamagnétisme ($\chi_m^{dia} \approx 10^{-3} \chi_m^{para}$) les milieux à structure moléculaire sont souvent diamagnétiques

Exp. : N_2, N_2 sont paramagnétique. A 20°C, P=1atm, $\chi_{O_2} = 2.110^{-6}$ $\chi_{N_2} = -5.10^{-3}$

\Rightarrow Air est paramagnétique.

b) Règle : les atomes (ou ions) dont une sous couche électronique interne (l fixé) est incomplète sont en général paramagnétique.

Exp. : Eléments de transition $Ti^{2+}, Cr^{3+}, Fe^{2+}, Co^{2+}, Ni^{2+}, Cu^{2+}$ (3d incomplète).

Cas sel ferrique ($\chi_m = 3.10^{-3} FeCl_3$) paramagnétique important

Fe ↑↓ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑↓ $1s^2 2(s^2 p^6) 3(s^2 p 6d^6) 4s^2 Z=26$

Fe^{3+} ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ $1s^2 2(s^2 p^6) 3(s^2 p 6d^6 d^5) 4s^2$ (5 e⁻ célibataires)

Eléments de terres rares : Na, Sm, Eu, Gd, Tb à couche f (l=3) incomplète

Exp. : Gd^{3+} à 7 e⁻ célibataires.

3- CALCUL CLASSIQUE DE \vec{M} PARAMAGNETIQUE :

Un dipôle magnétique \vec{m} dans un champ \vec{B}_0 à l'énergie potentielle : $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ à comparer avec $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ d'un dipôle électrique : Le calcul de \vec{M}_{para} est identique à celui de \vec{P}_{orien} (calcul de Langevin)

Un milieu contenant n dipôles magnétiques rigides, de moments \vec{m} , / volume acquiert sous

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_0 e_z \text{ l'aimantation } \vec{M} = nm L(a) \vec{e}_z \quad \text{où : } L(a) = \coth a - \frac{1}{a} \quad \text{et } a = \frac{mB}{K_B T}$$

A.N) T=300K, B=1 tesla = 10^4 Gauss, $m_{at} \approx \mu_B = 10^{-23} \text{ A} / \text{m}^2$

$$a \approx \frac{10^{-23}}{1.410^{-23} \cdot 300} = \frac{1}{400} \ll 1 \quad \text{c.à.d : } mB \ll K_B T$$

$$L(a) \approx \frac{2}{3} \quad \vec{M} = n \cdot m \cdot \frac{mB_0}{3K_B T} = \frac{nm^2}{3K_B T} \vec{B}_0 \equiv \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_0$$

D'où : $\chi_m^{para} = \frac{C}{T} \succ 0$ où : $C = \frac{n\mu_0 m^2}{3K_B}$: cte de Curie.

- T=300K, $m \approx 10^{-23} \text{ A} / \text{m}^2$ gaz $n = 10^{26} \text{ atomes} / \text{m}^3$
- $\chi_m^{para} \approx 10^{26} \frac{4\pi \cdot 10^{-3} \cdot (10^{-2})^2}{3 \cdot 1.410^{-23} \cdot 310^2} \approx 10^{-6}$
- L'expérience confirme la loi de Curie $\chi_m^{para} = \frac{C}{T}$ pour (T forte, B faible) $a \ll 1$ alors qu'à basse T on a un désaccord avec l'expérience.

4-CALCUL QUANTIQUE DE \vec{M} PARAMAGNETIQUE :

a- Rappel :

M.Q+Physique atomique – expérience de Stern-Gerlach : Quantification.

Moment cinétique orbital : $|\vec{L}|^2 = l(l+1)\hbar^2, \quad L_z = m_l \hbar \rightarrow (m_z)_{or} = ml\mu_B$

$l \in \mathbb{N}, m_l = (-l, -l+1, \dots, l-1, l) \in \mathbb{Z}$ prend $(2l+1)$ valeurs

Moments cinétique de spin : $|\vec{s}|^2 = s(s+1)\hbar^2, s_z = m_s \hbar \rightarrow (m_z)_s = m_s g \mu_B \quad (m_s = s = \pm \frac{1}{2})$

\Rightarrow Couplage $\vec{L} - \vec{S}$: Le moment cinétique total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ est quantifié

$|\vec{J}|^2 = j(j+1)\hbar^2, J_z = m_j \hbar \rightarrow (m_z)_j = mjg\mu_B$

$m_j = (-j, -j+1, \dots, j-1, j) \in \mathbb{Z}$ prend $(2j+1)$ valeurs.

effet orbital ($g = 1$), de spin ($g = 2$)

b- Théorie de Brillouin :

Soit un matériau isolant contenant des ions dotés d'un moment magnétique \vec{m} permanent, caractérisé par le nombre quantique j

Supposition : les moments \vec{m}_{at}^i sont discernables : on néglige l'interaction magnétique entre les

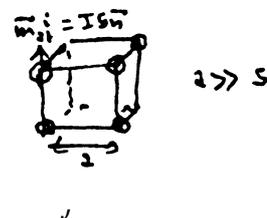
\vec{m}_{at}^i Dans $\vec{B}_0 = \vec{B}_0 e_z$, chaque \vec{m} a tendance à s'orienter suivant \vec{B}_0 .

Calcul de Langevin toutes les $\theta = (\vec{m}, \vec{B}_0)$ sont possibles c.à.d m_z peut varier de façon continue.

Or, M.Q m_z ne peut prendre que l'une des $(2j+1)$ valeurs :

$(m_z)_p = pg\mu_B, \quad m_j = p = (-j, -j+1, \dots, j-1, j)$

$= \frac{p}{j} \mu$ on posant : $\mu = jg\mu_B$



Le niveau d'énergie de l'état P est : $\mu_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0 = -(m_z)_p$,))

D'après le statistique de Boltzmann, le nombre de dipôle, par unité de volume, dans l'état p est :

$$n_p = A e^{-\mu_p / K_B T} = A e^{(P/j)a} \quad \text{avec } a = \frac{\mu B_0}{K_B T}$$

L'aimantation paramagnétique du milieu est $\vec{M} = M \vec{e}_z$ (raison de symétrie)

$$M = \sum_{P=-j}^{P=j} n_P (m_z)_P = \mu A \sum_{P=-j}^j \frac{P}{j} e^{(P/j)a}$$

Or on a n états par unité de volume : $n = \sum_{P=-j}^j n_P = A \sum_{P=-j}^j e^{(P/j)a}$ D'où : $\vec{M} = n \mu B_j(a) \vec{e}_z$

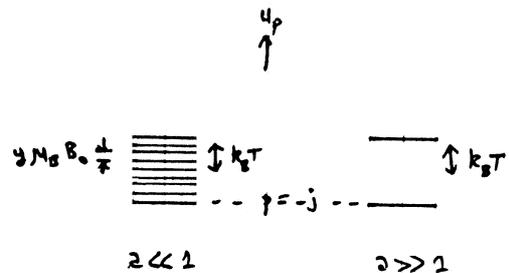
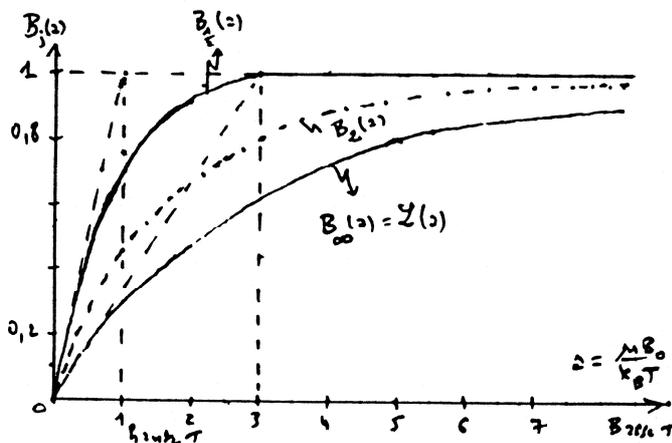
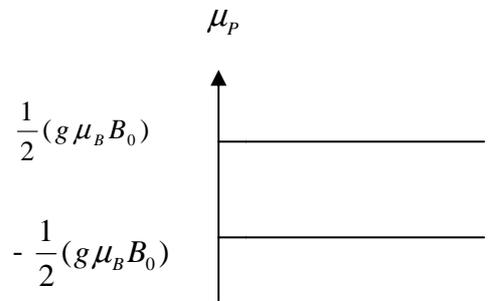
Ou : $B_j(a) = \frac{\sum_{P=-j}^j (P/j) e^{(P/j)a}}{\sum_{P=-j}^j e^{(P/j)a}}$: fonction de Brillouin d'ordre j

Le calcul quantique remplace une intégration par un calcul de somme
 $B_j(a)$ remplace $L(a)$ du calcul classique .

Cas d'un système à 2 niveaux d'énergie :

$$j = \frac{1}{2}, P = \pm \frac{1}{2} \quad (m_z)_P = \pm \frac{1}{2} g \mu_B, \quad \mu_P = \pm \frac{1}{2} (g \mu_B B_0)$$

$$B_{1/2}(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} = th(a)$$



Pour $a \gg 1$: basse T, B_0 intense : saturation de l'aimantation $M = M_s = n \mu$.

Pour $a \ll 1$ ($T \sim 300K$) $th a \approx a$ on définit $\chi_m = C'/T$ ($C' = \frac{n \mu^2 \mu_0}{K_B}$)

• Calcul de $B_j(a)$:

Rappel : progression Géométrique : raison r, 1^{ier} terme U_0 , n termes

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$D = \sum_{p=-j}^j e^{p(a/j)} = e^{-a} + e^{(-j+1)a/j} + \dots + e^a \quad e^a = e^{-a} - e^{2a}$$

$$= e^{-a} \left[1 + e^{a/j} + \dots + e^{2j(a/j)} \right] = e^{-a} \frac{1 - e^{(aj+1)a/j}}{1 - e^{a/j}}$$

Car j entier ou demi—entier $\rightarrow 2j$ entier

$$B_j(a) = \frac{1}{D} \cdot N = \frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{da} = \frac{d}{da} (\ln D)$$

$$\ln D = -a + \ln(1 - e^{\frac{2j+1}{j}a}) - \ln(1 - e^{a/j})$$

$$B_j(a) = -1 - \frac{\frac{2j+1}{j} e^{\frac{2j+1}{j}a}}{1 - e^{\frac{2j+1}{j}a}} + \frac{1}{j} \frac{e^{a/j}}{1 - e^{a/j}}$$

Transformant les 2 rapports suivants :

$$\frac{e^x}{1 - e^x} = \frac{e^{x/a}}{e^{-x/a} - e^{x/a}} = -\frac{1}{2} \frac{ch(\frac{x}{2}) + sh(\frac{x}{2})}{sh(\frac{x}{2})} = -\frac{1}{2} (1 + \coth \frac{x}{2})$$

$$B_j(a) = \frac{2j+1}{2j} \coth(\frac{2j+1}{2j}a) - \frac{1}{2j} \coth(\frac{a}{2j})$$

Cas particuliers :

- $a \gg 1 : B_j(a) \rightarrow 1$: saturation de M dans un champ intense .

$$\coth u \approx \frac{1}{u} + \frac{u}{3} \rightarrow B_j(a) \approx \frac{j+1}{j} \frac{2}{3}$$

$$M = \frac{n\mu^2}{3} \frac{\bar{B}_0}{K_B T} \frac{j+1}{j} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \bar{B}_0 \Rightarrow \chi_m = \frac{C''}{T} \quad (C'' = \frac{n\mu_0}{K_B} \frac{j+1}{j} \frac{\mu^2}{3})$$

- $a \ll 1$: or $\mu = jg\mu_B$ $C'' = \frac{n\mu_0}{3K_B} \frac{j+1}{j} j^2 g^2 \mu_B^2 = \frac{n\mu_0}{3K_B} m^2$

$$\text{car : } \vec{m} = \gamma \vec{J} \quad J_z = m_j \hbar \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \quad \gamma = \frac{2e}{2m_e}$$

$$m^2 = \gamma^2 j(j+1)\hbar^2 = j(j+1)g^2\mu_B^2$$

$$C'' = C (de3^\circ)$$

- $j \rightarrow \infty : B_\infty(a) = \coth a - \frac{1}{a} = L(a)$

Interprétation : $j \rightarrow \infty$ un système ayant nombre grand nombre de niveau d'énergie. Les discontinuités introduites par la quantification deviennent imperceptibles et on retrouve les résultats de la théorie classique.

- **Remarque :** Les calculs (Langevin et Brillouin) supposent l'absence d'interaction entre les \vec{m}_{at}^i : Approximation non valable pour des gaz comprimés ou des solutions concentrées de sels paramagnétiques.

FERROMAGNETISME

1° - Généralités :

a - Définition :

Certains corps solides s'aimantent fortement, même avec un champ magnétique faible ; et gardent cette aimantation quand on supprime le champ. Ces corps sont appelés : ferromagnétiques.

b- Exemples et applications :

Fe(Z=26), Co(Z=27), Ni(Z=28) et leurs alliages est composés qui servent dans la fabrication des aimants permanents. CrO₂ utilisé dans la fabrication des bandes magnétiques.

L'alliage (Cu, Mn, Al) qui est ferromagnétique alors qu'aucun de ses composants ne l'est.

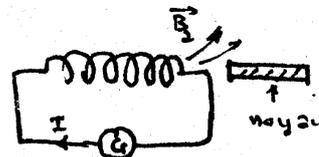
Les alliages : Alnico (Al, Ni Co); Ticonal (Ti, Co, Ni, Al).

2° - Faits expérimentaux :

a- Expérience 1 :

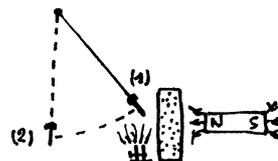
En plaçant un morceau de fer ou d'acier non aimanté (noyau) dans le champ magnétique B_a créée par un solénoïde on constate que :

- Le noyau est attiré par le solénoïde et se stabilise au centre (Région des champs intenses) comme un paramagnétique.
- Le champ fourni par l'ensemble solénoïde-noyau est plus intense que B_a.
- Quand on coupe le courant I un champ magnétique subsiste : le noyau s'est aimanté.



b- Expérience 2 :

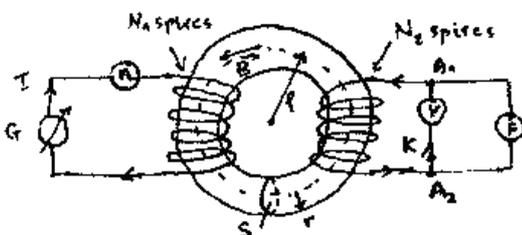
Un clou de fer est attiré à travers une plaque d'amiante (isolant thermique) par un aimant permanent (1). Quand on chauffe le clou à $T > T_c = 770^\circ C$, il s'éloigne de la plaque. Mais une fois refroidie (2) il est attiré par l'aimant. On assiste alors à un mouvement périodique.



c- On verra que dans les ferromagnétiques l'aimantation \vec{M} n'est pas proportionnelle à l'excitation \vec{H} et que \vec{M} dépend de l'histoire antérieure de l'échantillon. Il faut utiliser un échantillon désaimanté $T > T_c$ ou qui n'a jamais été aimanté.

3° - Etude expérimentale de L'aimantation :

a- Mesure d'une aimantation induite:



K fermé: V voltmètre
K ouvert: F fluxmètre
ou circuit Intégrateur

Un échantillon torique ($r \ll R$) est placé à l'intérieur d'une bobine 1 traversée par un courant stationnaire I. \vec{B} , \vec{M} et $\vec{H} = (\vec{B} / \mu_0) - \vec{M}$ sont tangents à la circonférence moyenne (de rayon R) et confinés à l'intérieur du tore (à l'extérieur \vec{B} totale est nul), où l'excitation démagnétisante \vec{H}_d est nulle. En plus, il n'y a pas d'effets de surface d'extrémités contrairement à

un cylindre fini (court). Tous ces arguments justifient l'utilisation de la forme torique qui est, en fait, équivalente à un cylindre de longueur infinie.

Le théorème d'ampère pour \vec{H} donne :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot l = I_l = N_1 I \Rightarrow H = \frac{N_1 I}{2\pi R}. \text{ Donc la lecture de } I \text{ sur l'ampèremètre}$$

détermine H.

Une variation de courant I (c à d \vec{H} ou \vec{B}) conduit à une variation de flux $d\phi_2 = N_2 S dB$ à travers la bobine 2 c à d à l'apparition d'une d.d.p égale à la f.e.m induite à ses bornes.

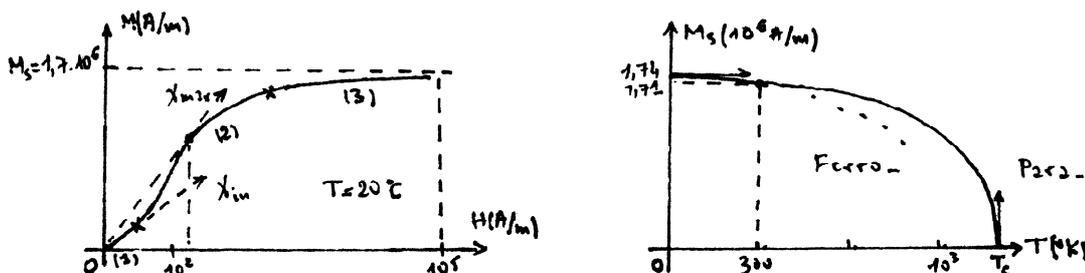
$$\text{On a : } \Delta V = V_1 - V_2 = -e_{12} = -\left(-\frac{d\phi_2}{dt}\right) = N_2 S \frac{dB}{dt} \text{ avec } S = \pi \cdot r^2. \text{ On relève les indications}$$

du voltmètre $\Delta V = f(I)$ (k fermé) et par intégration graphique on en déduit B.

$$\text{Connaissant } \vec{H} \text{ et } \vec{B} \text{ on en déduit } \vec{M} = (\vec{B} / \mu_0) - \vec{H}$$

b- Courbe de première aimantation:

Le procédé dessus conduit au tracé $M = M(H)$ qu'on appelle courbe de première aimantation (figures : cas du fer très pure).



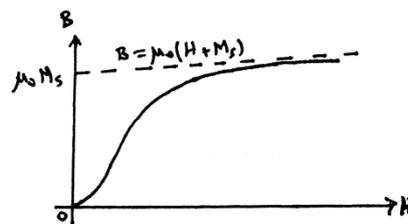
La courbe $M(H)$ comporte trois zones :

- * Zone 1 : Pour H faible, M croît linéairement avec H, et on a : $\chi_m = M / H$.
- * Zone 2 : M croît plus vite que H on n'a plus de linéarité.
- * Zone 3 : De fortes excitations, M croît lentement et tend vers une asymptote horizontale M_s appelée *aimantation à saturation*.

M_s est une caractéristique du matériau , elle dépend de sa pureté et sa température. La courbe $M_s(T)$ montre q'elle varie peu au voisinage de la température ordinaire, puis décroît très vite pour s'annuler à la température T_c de curie. Cette décroissance de M_s est due à la désorientation des moments magnétiques $\propto \vec{M}_i$ par l'agitation thermique.

Pour $T > T_c$ le matériau est paramagnétique.

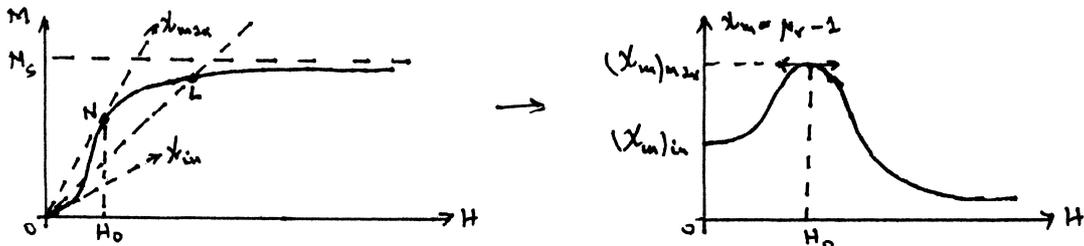
T=20°C	M_s (A/m)	$\mu_0 M_s$ (T)	T_c (K)
Fer	$1.70 \cdot 10^6$	2.14	1101
Cobalt	$1.40 \cdot 10^6$	1.76	1410
Nickel	$0.48 \cdot 10^6$	0.60	650



Comme $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$, la courbe $B(H)$ se déduit de la courbe $\mu_0 M(H)$ en y ajoutant la variation linéaire $\mu_0 H$.

4°-Susceptibilité et perméabilité magnétiques :

Vue la non linéarité de M avec H on continue à définir un susceptibilité magnétique χ_m qui dépend de H par : $\chi_m(H) = M / H$



La courbe $M(H)$ montre que χ_m est la pente de la droite OL .

Et une perméabilité magnétique relative par : $\mu_r(H) = \mu(H) / \mu_0 = 1 + \chi_m(H)$

Tableau 2				H_c (A/m)	Pertes par cycle pour B_m	
					(J/kg)	(T)
Fe(4%Si)	1.97	250	7000	24	0.04	1.5
Permalloy	1.08	8000	100000	4	0.0005	0.5
Mumétal	0.85	20000	120000	2.4	0.0005	0.5
Supermalloy	0.79	125000	1000000	0.3	0.0002	0.5

Ferromagnétique doux à $T = 20^\circ\text{C}$

Le tableau 2 montre que $\mu_r \approx 10^2$ à 10^{10} dans les ferromagnétiques d'où $\mu_r(H) = 1 + \chi_m(H) \approx \chi_m(H)$: Ces deux courbes sont pratiquement confondues.

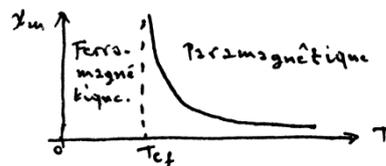
$$\text{Et } \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi_m(H) \cdot \vec{H}) = \mu_0(1 + \chi_m(H)) \cdot \vec{H} \approx \mu_0 \chi_m(H) \cdot \vec{H}$$

Soit $\chi_m(H) = B / \mu_0 H$

Pour $T > T_{cf}$ (Température de curie ferromagnétique) les matériaux ferromagnétiques deviennent paramagnétiques de susceptibilité χ_m -faible-, qui dépend de la température suivant la

loi de curie-Weiss : $\chi_m(T) = \frac{C}{T - T_{cf}}$

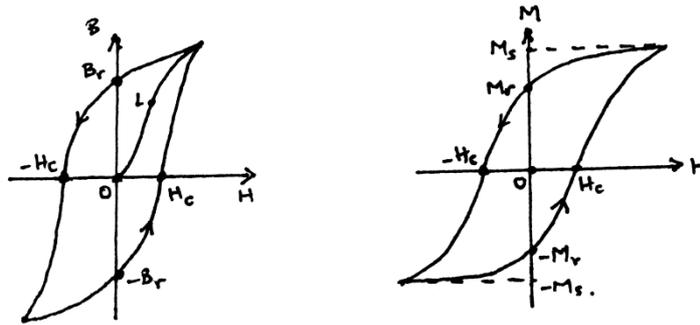
Où C est une constante dite de curie.



5°- CYCLE D'HYSTERESIS:

a- Tracé statique:

La méthode du tore décrite auparavant permet de tracer la courbe $B(H)$ ou $M(H)$ point par point.



Ayant atteint l'aimantation à saturation M_s on diminue H (c à d I). On constate que $M(H)$ décroît, et ne repasse pas par les mêmes points de la courbe de première aimantation et qu'elle passe en dessus (courbe de désaimantation $M(H)$).

On dit qu'on a un retard à la désaimantation ou hystérésis magnétique.

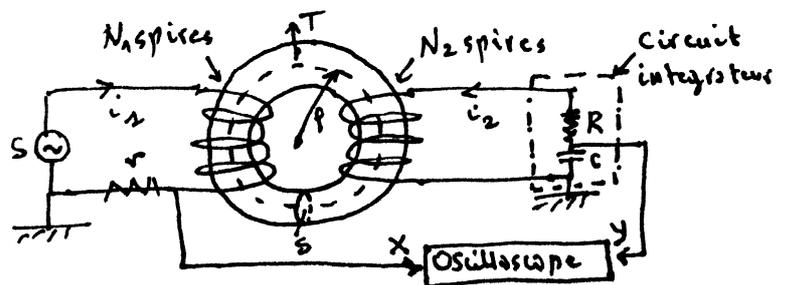
Pour $H = 0$ il subsiste une aimantation M_r (ou champ B_r) appelée aimantation rémanente (ou champ rémanent sur $B(H)$).

On inverse le sens du courant dans le solénoïde on constate que M s'annule pour $H = -H_c$. H_c est appelé excitation coercitive (Tableau 2).

b- Tracé à l'oscilloscope:

On utilise le montage suivant:

T est l'échantillon de forme torique. La source de courant sinusoïdale S débite dans les N_1 spires un courant i_1 de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$.



• La tension aux bornes de r est $v_r = r \cdot i_1$ et le théorème d'Ampère

donne : $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi \rho = N_1 i_1$ et par suite $v_r = \frac{2\pi \rho r H}{N_1}$. Sur le l'oscilloscope :

$$V_X = k_1 v_r \Rightarrow V_X = k_1 \frac{2\pi \rho r}{N_1} \cdot H \text{ c à d } \boxed{V_X \sim H}$$

• Il apparaît au secondaire, par induction :

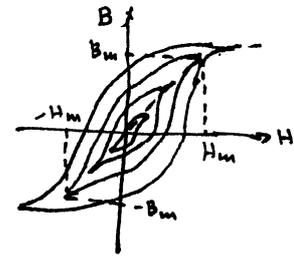
$$u_2 = -e_2 = -\left(-\frac{d\phi}{dt}\right) = R i_2 + v_c = R i_2 = \frac{i_2}{jC\omega} = i_2 \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \Rightarrow i_2 = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \frac{d\phi}{dt}$$

$$\underline{\text{Aux bornes de C :}} v_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i_2 dt = \frac{1}{C} \cdot \frac{N_2 B S}{R + \frac{1}{jC\omega}} \approx \frac{N_2 S}{RC} B \quad \underline{\text{(si } R \gg \frac{1}{C\omega})}$$

Sur le l'oscilloscope on a : $V_Y = k_2 v_c = \frac{k_2 N_2 S}{RC} \cdot B$ c à d $V_Y \sim B$

Donc la courbe $Y = Y(X)$ observée sur l'oscilloscope représente bien la courbe $B(H)$: cycle d'hystérésis.

On diminuant l'amplitude du courant i_1 , on observe des cycles de plus en plus petits, jusqu'à obtenir une aimantation rémanente M_r nulle. On aura, ainsi, désaimanté le matériau. Ceci constitue le deuxième procédé de désaimantation d'un ferromagnétique, après le chauffage à $T > T_{cf}$.



6° - PERTES D'ENERGIES DANS LES FERROMAGNETIQUES :

Dans l'expérience du tracé du cycle à l'oscilloscope, $i_2 \approx 0$ car R est élevée, la puissance consommée dans le bobinage secondaire (N_2 Spires) est négligeable.

Soit r_1 la résistance du bobinage d'entrée (N_1 spires) on a : $u_1 = r_1 i_1 + N_1 \frac{d\phi_1}{dt}$, en multipliant par $i_1 dt$ dont on aura : $u_1 i_1 dt = r_1 i_1^2 dt + N_1 i_1 d\phi_1$

Le théorème d'Ampère donne : $N_1 i_1(t) = 2\pi \rho H(t)$ et comme $d\phi_1(t) = S dB(t)$ ($S = cte$) alors $u_1 i_1 dt = r_1 i_1^2 dt + 2\pi \rho S H(t) dB(t)$.

La puissance moyenne, fournie par le générateur, pendant une période $T = 1/f$ est :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_1 i_1 dt = \frac{1}{T} \int_0^T r_1 i_1^2 dt + 2\pi \rho S \frac{1}{T} \int_0^T H(t) dB(t) = r_1 I_{1eff}^2 + \frac{2\pi \rho S}{T} \cdot A$$

$r_1 I_{1eff}^2$ est la puissance dissipée par effet joule dans le bobinage primaire.

$H(t) dB(t)$ est l'aire entre la courbe $H(B)$ et l'axe des B .

Donc $A = \int_0^T H(t) dB(t)$ est l'aire intérieure au cycle $B(H)$.

La puissance consommée dans le matériau est :

$$\langle P_{h,F} \rangle = \frac{2\pi \rho S}{T} \cdot A = \frac{v \cdot A}{T}$$

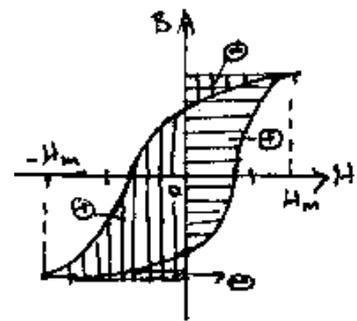
avec $v = 2\pi \rho S$ est le volume du tore et A l'aire du cycle.

Elle est dû aux pertes par hystérésis et courants de Foucault.

Au cours d'un cycle il y a dégagement d'une quantité de chaleur : $Q_{h,F} = \langle P_{h,F} \rangle \cdot T = v \cdot A$ produite par :

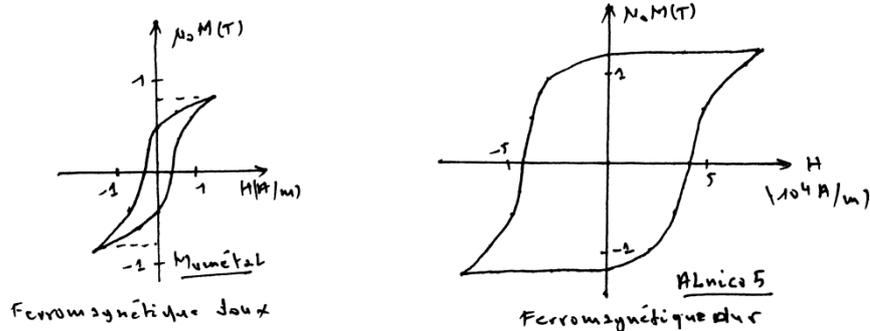
- Hystérésis : $Q_{h,F} \sim A$ qu'on minimise en prenant des matériaux à cycles d'aire petite (cas des ferromagnétiques doux)
- Courants de Foucault dans la masse du matériau, $Q_{h,F} \sim v$, qu'on minimise en feuilletant le matériau en tôles parallèles à \vec{B}

la formule de la puissance $\langle P_{h,F} \rangle$ montre qu'il faut travailler aux faibles fréquences.



7° - CLASSIFICATION DES FERROMAGNETIQUES:

L'observation des cycles d'hystérésis a permis de classer les ferromagnétiques en deux grandes catégories.



a- Ferromagnétiques doux :

Ces matériaux ont une faible excitation coercitive ($H_c < 100 \text{ A m}^{-1}$) d'où une grande facilité de modifier leur aimantation. Ils sont caractérisés par une forte susceptibilité magnétique initiale et des cycles très étroits c.à.d des pertes énergétiques faibles. Ce qui justifie leur utilisations dans les transformateurs les électro-aimants, les relais, les écrans magnétiques, les bobines téléphoniques, ... où l'échauffement est indésirable.

Exemples :Le Fer (3-4 % Si), le permalloy, Mumétal, supermalloy (tableau 2)

b- Ferromagnétiques durs :

Ces matériaux ont une forte excitation coercitive $H_c \approx 10^3 \text{ à } 10^6 \text{ A m}^{-1}$ c.à.d une grande difficulté de supprimer l'aimantation rémanente M_r , d'où leur utilisation dans la fabrication des aimants permanents. Ils ont des cycles très larges et même carré (forte pertes d'énergie par échauffement). Comme exemples on peut citer les aciers, l'Alnico 5, le ticonal ...

8° - INTERPRETATION DU FERROMAGNETISME :

a- Origine du ferromagnétisme:

A l'échelle atomique le ferromagnétisme d'un cristal est dû aux spins des électrons non appariés dans les liaisons chimiques et les liaisons covalentes.

Le spin de l'électron est traité comme un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}_i$.

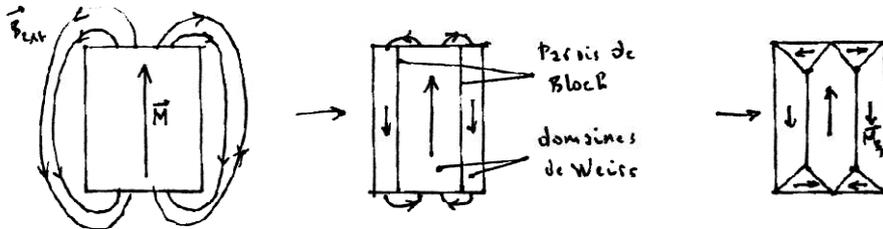
L'interaction de deux dipôles magnétiques classiques favorise un alignement antiparallèle ($\uparrow\downarrow$) des $\vec{\mathcal{M}}_i$. Dans un cristal ferromagnétique les distances interatomiques réalisées conduisent à une interaction d'échange – entre spins – qui favorise un alignement parallèle ($\uparrow\uparrow$) (voir M.Q).

Si l'énergie $k_B T$ due à l'agitation thermique est très inférieure à l'énergie potentielle, $E_p = -\vec{\mathcal{M}}_i \cdot \vec{B}_i = -\mathcal{M}_i B_i$ (si $\vec{\mathcal{M}}_i \parallel \vec{B}_i$) de $\vec{\mathcal{M}}_i$ dans le champ local \vec{B}_i créée par les autres $\vec{\mathcal{M}}_i$; tout les $\vec{\mathcal{M}}_i$ seront orientés dans le même sens. On aura une structure ordonnée c'est le cas des ferromagnétiques $T < T_c$. Dans le cas contraire la structure sera désordonnée c'est le cas des paramagnétiques . $T > T_c$

b- Domaines de Weiss – Parois de Bloch :

Soit un cristal ferromagnétique d'aimantation $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$. Il crée dans son voisinage un

champ magnétique \vec{B}_{ext} important auquel correspond une énergie magnétique $W_B = \iiint_v \frac{B_{ext}^2}{2\mu_0}$ importante.



En se divisant en domaines, le cristal réduit son champ \vec{B}_{ext} et gagne de l'énergie de W_B . Ce gain a servi pour construire des parois de Bloch entre domaines de Weiss.

Un domaine est visible en microscope $\sim 10 \mu m$. Il contient des milliards d'atomes de moments dipolaires de spins de même orientation. L'aimantation \vec{M}_{sp} d'un domaine est appelée : aimantation spontanée à saturation.

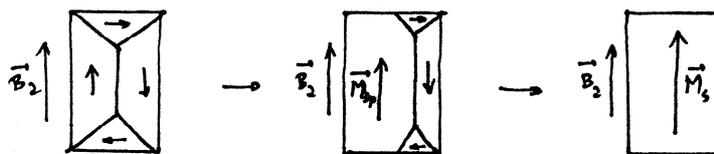
Cette subdivision s'arrêtera une fois que l'énergie gagnée, par diminution de W_B , soit compensée par l'énergie absorbée pour créer ces parois.

Dans un cristal qui n'a jamais été aimanté, ou bien désaimanté, les orientations

des différents domaines sont aléatoires et l'aimantation globale macroscopique est nulle.



c- Effet d'un champ magnétique externe :



Quant on applique au cristal un champ magnétique \vec{B}_a croissant ; les domaines d'aimantation \vec{M}_{sp} de même orientation, ou proche à celle de \vec{B}_a se trouvent énergétiquement favorisés. L'aimantation \vec{M}_{sp} de chaque domaine tourne pour s'orienter de plus en plus dans le sens de \vec{B}_a . Les parois se déplacent et ces domaines grandissent en voyant leurs volumes augmenter au dépend des autres (fig.) .

On obtient alors une aimantation macroscopique \vec{M} de même sens que \vec{B}_a . Dans les champs forts tout les \vec{M}_i sont alignés à \vec{B}_a , le cristal est formé d'un seul domaine d'aimantation à saturation \vec{M}_s .

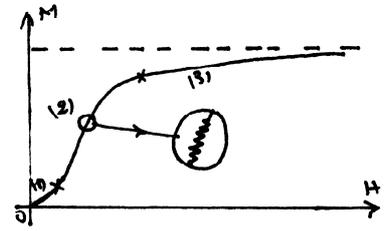
d- Interprétation de l'hystérésis :

Sur la courbe de première aimantation $M(H)$ on distingue trois zones :

Zone 1 : de déplacement réversible des parois c.à.d en diminuant H les parois reviennent à leurs positions initiales et \vec{M} aussi

Zone 2 : de déplacement irréversible des parois de Bloch avec craquement : effet Barkhausen.

Zone 3 : d'alignement des orientations des domaines et disparition progressive des parois jusqu'à la saturation M_s .



Le déplacement irréversible des parois (zone 2) implique une variation du champ c.à.d la création de courants induits dans le métal (Fe, Co...) et par conséquent des pertes de chaleur par effet Joule. Ce qui explique le phénomène d'hystérésis.

L'énergie totale de l'hystérésis inclus les énergies de spins, parois, $B \dots$ c'est pourquoi l'état magnétique d'un cristal ferromagnétique dépend de son histoire.

Si le cristal a des défauts de structure ou des impuretés les parois se déplacent difficilement ce qui justifie que le fer est d'autant doux qu'il est pur alors que les aciers (alliages) sont magnétiquement durs.

Chapitre.4

EQUATIONS DE MAXWELL

I. LES POSTULATS DE L'ELECTROMAGNETISME :

Le but de l'électromagnétisme est de décrire les interactions qui s'exercent à l'intérieur d'un système de particules chargées. Dans un référentiel galiléen R , la force $\vec{F}(\vec{r}, t)$ qui s'exerce sur une particule de charge q de vitesse par rapport à R $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est donnée par la loi de force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Cette expression définit, dans R , le champ électromagnétique $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Les quatre relations locales de Maxwell permettent de calculer le champ (\vec{E}, \vec{B}) à partir de sa source (ρ, \vec{J}) où $\rho(\vec{r}, t)$ densité de charges et $\vec{J}(\vec{r}, t)$ densité de courant. Les postulats de l'électromagnétisme sont la loi de force de Lorentz et les équations de Maxwell

Remarque : le champ électromagnétique contient et transporte de l'énergie de la quantité de mouvement.

II. LES EQUATIONS DE MAXWELL :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Equation du flux magnétique} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{M.}\Phi) \\ \text{Equation de Maxwell-Faraday} & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{M.F}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Equation de Maxwell-Gauss} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{M.G}) \\ \text{Equation de Maxwell-Ampère} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \quad (\text{M.A}) \end{array} \right.$$

Le premier couple (M.Φ et M.F) exprime des propriétés intrinsèques du champ électromagnétique, alors que le second couple (M.G et M.A) exprime le lien entre le champ (\vec{E}, \vec{B}) et sa source (ρ, \vec{J}) .

Remarque : le second couple contient l'équation de la conservation de la charge. En effet ; M.A donne (car $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) = 0$).

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0 = \mu_0 \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] = \mu_0 \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right] = \mu_0 \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho) \right].$$

d'après (M.G) d'où :
$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

III. CONTENU PHYSIQUE DES EQUATIONS DE MAXWELL :

1. Equation du flux magnétique :

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dv \stackrel{M\Phi}{=} 0 \text{ (d'après la formule d'Ostogradsky). soit :}$$

$$\boxed{\text{(M.}\Phi) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad , \quad \forall S}$$



M.Φ exprime le caractère conservatif du flux magnétique c. à d. que le flux magnétique se conserve, à un instant donné, le long d'un tube de champ et on peut définir $\Phi(t)$ à travers un contour sans préciser la surface S utilisée pour calculer celui-ci.

2. Equation de Maxwell-Faraday :

Calculons la circulation, à l'instant t , de \vec{E} le long d'un contour C fixe. S étant une surface quelconque s'appuyant sur C , la formule de Stokes donne :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{S} \stackrel{MF}{=} \iint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



$$\boxed{\text{(M.F)} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Elle exprime qu'un champ magnétique dépendant du temps donne naissance à un champ électrique à circulation non conservative.

Remarques :

- En électrostatique on a $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad , \quad (\partial_t \vec{B} = \vec{0})$

La circulation de \vec{E} est conservative en régime permanent.

- L'équation (M.F) est en accord avec la loi expérimentale $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ de Faraday (1831) :

la circulation de \vec{E} le long d'un contour est égale à la force électromotrice (f. e. m) e induite dans ce contour.

3. Equation de Maxwell-Gauss :

calculons le flux électrique sortant, à l'instant t , d'une surface fermée S limitant un volume V à l'aide de la formule d'Ostogradsky :

$$\Psi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv \stackrel{MG}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv = \frac{Q}{\epsilon_0} \text{ , } Q \text{ charge dans } S.$$

$$\boxed{\text{(MG)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

MG exprime la validité générale du théorème de Gauss (même en régime non permanent).

4. Equation de Maxwell-Ampère :

En régime non permanent, calculons la circulation à l'instant t de \vec{B} le long d'un contour C en utilisant la formule de Stokes et (M.A) ; S étant une surface quelconque s'appuyant sur C :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \left[\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \iint_S \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \cdot d\vec{S} \right]$$

Notons : $i_s = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$: intensité de courant qui traverse S à l'instant t et $\vec{J}_D \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$(M.A) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 [\vec{J} + \vec{J}_D] \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left[i_s + \iint_S \vec{J}_D \cdot d\vec{S} \right]$$

L'équation de (M.A) exprime la forme générale du théorème d'Ampère

Remarques :

- En magnéto-statistique $\partial_t \vec{E} = \vec{0}$ (M.A)_s : $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Leftrightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_s$

Exprime que la circulation de \vec{B} est donnée en régime permanent par le théorème d'Ampère, de la magnéto-statique, qui exprime le lien entre le champ \vec{B} et sa source \vec{J} : \vec{B} tourbillonne autour des courants qui l'engendrent.

- dans (M.A) \vec{J}_D : densité de courant de déplacement, ne représente ni un courant, ni un déplacement de quoi que ce soit. Le sens physique de \vec{J}_D est : un champ électrique dépendant du temps est, au même titre qu'un courant, une source de champ magnétique.

- L'influence du terme $\vec{J}_D \equiv \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$ dans (M.A) est analogue à celle du terme $-\partial_t \vec{B}$ dans (M.F). La présence de ces deux termes réalise un couplage entre les champs \vec{E} et \vec{B} qui interdit de dissocier les deux composantes du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}). Ce couplage est à l'origine de la propagation du champ électromagnétique.

- Origine du terme \vec{J}_D :

La divergence de (M.A)_s $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ vrai en régime permanent. Maxwell introduit dans

(M.A)_s un terme supplémentaire et pose :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 [\vec{J} + \vec{J}_D] \quad (M.A) \text{ pour avoir une cohérence avec } \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial_t \rho.$$

$$(M.A) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0 = \mu_0 [\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D] \quad \Leftrightarrow \quad [-\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D] = 0$$

$$\stackrel{M.G}{\Leftrightarrow} \quad \epsilon_0 \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot [\vec{J}_D - \epsilon_0 \partial_t \vec{E}] = 0$$

Maxwell choisit la solution particulière la plus simple : $\vec{J}_D = \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$.

IV. PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

1. Les equations de propagation :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla}^2 \vec{a}, \text{ appliquée à (M.F)}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge (-\partial_t \vec{B}) = -\partial_t (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = -\partial_t \left[\mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \right] \text{ donc } \boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}} \quad (1)$$

$$(M.A) \rightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \wedge \partial_t \vec{E}$$

$$\text{Et (M.}\Phi) \text{ avec (M.F)} \rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{J}} \quad (2)$$

Remarque : (1) et (2) montrant que le découplage complet existant en régime permanent entre \vec{E} de source ρ et \vec{B} de source \vec{J} n'est plus réalisé en régime variable.

En un point où $\rho = 0$ et $\vec{J} = \vec{0}$, \vec{E} et \vec{B} satisfont à la même équation de propagation :

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_{t^2} \vec{E} = \vec{0}} \quad (1')$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_{t^2} \vec{B} = \vec{0}} \quad (2')$$

2. Equation de d'Alembert à une dimension :

Soit $S(x, t)$ une grandeur fonction de l'abscisse x et de temps t qui vérifie, v étant une constante, l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0} \quad (3)$$

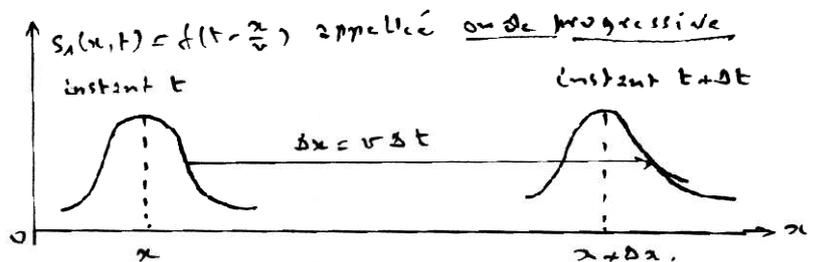
On montre que la solution générale de cette équation de la forme :

$$S(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + f\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Interprétation de la solution particulière :

$$S_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) = f\left(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{v}\right) \text{ si } \Delta x = v \Delta t$$

La grandeur se propage, sans déformation, avec la vitesse v le long de Ox



En résumé, la solution générale de (3) à une dimension peut s'interpréter comme la superposition de 2 ondes progressives de vitesse opposées.

3. Equation de d'Alembert à 3 dimensions :

soit $S(x, y, z, t)$ une grandeur scalaire, l'équation $\vec{\nabla}^2 S - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$ (4), admet pour

solutions particulières des fonctions du type : $S\left(t - \frac{x}{v}\right)$ $S\left(t - \frac{y}{v}\right)$ $S\left(t - \frac{z}{v}\right)$.

qui ont, à un instant t donné, même valeur en tout point d'un plan $x = cte$, $y = cte$ et $z = cte$. Elles représentent de *sondes planes progressives* se propageant avec la vitesse v respectivement le long des axes Ox , Oy et Oz . (4) est linéaire, toute superposition d'ondes planes progressives de vitesse v est solution de (4).

Conclusion :

(1') et (2') s'identifient à (4) en posant $\boxed{v^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$ $\rightarrow v = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ vu le caractère

ondulatoire de la lumière (phénomènes de diffraction et d'interférence Young-Fresnel) et les mesures de la célérité de la lumière $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ réalisée par Fizeau (1851) Maxwell affirme la *nature électromagnétique de la lumière* c.à.d $v \approx c$ d'où la célèbre relation : $\boxed{\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1}$

Remarques

En introduisant l'opération d'Alembertien : $\square^2 = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Les équations du champ électromagnétique (1') et (2') dans l'espace vide de charges et de courants s'écrivent :

$$\square^2 \vec{E} = \vec{0} \quad \square^2 \vec{B} = \vec{0}$$

Les équations de Maxwell sont valables dans un référentiel galiléen R quelconque, et en particulier dans le référentiel terrestre.

On montre dans le cas d'une onde plane progressive que : $\vec{\nabla} = -\frac{1}{c} \vec{u} \frac{\partial}{\partial t}$ où \vec{u} est un vecteur unitaire de l'axe de propagation, dans le sens positif, de l'onde plane progressive.

4. Structure de l'onde plane progressive : ($\rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{c} \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{B} = cte = 0, \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{B} \perp \vec{u}} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{c} \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{E} = cte = 0, \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{E} \perp \vec{u}} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{c} \vec{u} \wedge \partial_t \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{c} \vec{u} \wedge \partial_t \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -c \vec{u} \wedge \vec{B}} \quad (4)$$

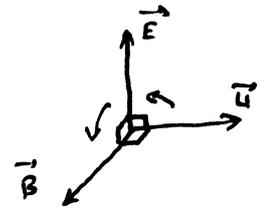
ces relations d'écrivent la structure de l'onde électromagnétique plane progressive se propageant dans le vide. Cette structure quelque soit le temps est :

* (1) et (2) \rightarrow le champ électromagnétique est transversal

* (3) et (4) $\rightarrow \bullet \vec{B} \perp \vec{u}$

$\bullet (\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ trièdre direct.

$$\bullet |\vec{E}| = c |\vec{B}| \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = c B}$$



V. ELECTROMAGNETISME DES MILIEUX MATERIELS :

1. Charges libres et charges liées :

On classe les particules chargées d'une distribution en deux catégories :

Charges structurales ou *charges liées* tel que les protons des noyaux et les électrons des atomes qui sont attachées à la structure du milieu et dont l'amplitude de leurs déplacements éventuels est très limitée ($\sim 1 \text{ \AA}$).

Charges libres : tel que les électrons de conduction d'un métal ou les particules indépendantes d'un faisceau leurs déplacements dans la matière est très supérieurs à l'ordre de grandeur des dimensions atomiques

2. Principe de l'étude d'un milieu matériel :

On fait intervenir dans les équations de Maxwell, comme sources de champ, toutes les particules libres et liées.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(M.}\Phi) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{(M.F)} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(M.G)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{lié}}) \\ \text{(M.A)} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 [\vec{J}_{\text{libre}} + \vec{J}_{\text{lié}} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}_0] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{lié}} = \rho_{\text{libre}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad ; \quad (\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \\ \vec{J} = \vec{J}_{\text{libre}} + \vec{J}_{\text{lié}} = \vec{J}_{\text{libre}} + \vec{\nabla} \wedge \vec{M} + \partial_t \vec{P} \quad ; \quad (\vec{J}_M = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}) \end{array} \right. \quad (\vec{J}_p = \partial_t \vec{P} : \text{courant de polarisation})$$

$$\text{Avec } \boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}} \quad \text{d'où}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(M.G)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}} \\ \text{(M.A)} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}} + \partial_t \vec{D} \end{array} \right.$$

Calcul de (\vec{E}, \vec{B}) à partir des seules charges libres (macroscopiquement)

Remarques :

Cas des milieux l.h.i, pour des champs pas trop intenses, on a :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}, \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \text{ et } \mu = \mu_0 \mu_r$$

L'introduction de \vec{D} et \vec{H} dans les équations de Maxwell permet de camoufler les charges ou courants liés, masquant ainsi une analyse microscopique approfondie du milieu considéré .

cas des métaux :

ρ_{libre} : densité volumique de charges des électrons de conduction

$\rho_{lié}$: densité volumique de charges des cations du réseau cristallin.

En régime permanent et dans tout le domaine des fréquences hertziennes on a :

$$\rho = \rho_{libre} + \rho_{lié} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0} \quad (\text{M.G})$$

\vec{J}_{libre} représente le mouvement de l'ensemble des électrons de conduction .

Cas métaux ferromagnétiques (Fe, Co, Ni) $\vec{J}_{lié} = \vec{J}_M$ due aux spins des électrons

Cas métaux usuels (Cu, Al, ...) *non magnétiques* : $\vec{J}_{lié} \approx \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \vec{J}_{libre}$

$$(\text{M.A}) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 [\vec{J} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}] \quad , \quad (\epsilon_r = \mu_r = 1)$$

VI. EXPRESSIONS DES POTENTIELS :

Partant de (M.Φ) et (M.F) on montre que le champ (\vec{E}, \vec{B}) dérive des potentiels (V, \vec{A}) par les relations :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \partial_t \vec{A} \quad (-\partial_t \vec{A}) \text{ champ électromoteur de Newmann}$$

Qui donnent : $\boxed{A = A_0 + \Delta\varphi}$ et $\boxed{V = V_0 - \partial_t \varphi}$ $\varphi(\vec{r}, t)$ champ scalaire quelconque.

càd pour (\vec{E}, \vec{B}) donné on a une infinité de couples (V, \vec{A}) de potentiels.

cette indétermination conduit à un imposer à (V, \vec{A}) une condition supplémentaire dite

$$\text{jauge de Lorentz : } \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}}$$

L'introduction de \vec{B} et \vec{E} dessus dans les équations de (MG) et (MA) et compte tenu de :

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \nabla^2 V$, $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ et de la jauge de Lorentz on

aboutit aux équations dites de Poisson

$$\boxed{\nabla^2 V + \rho / \epsilon_0 = 0} \quad (\alpha) \quad \text{et} \quad \boxed{\nabla^2 \vec{A} + \mu_0 \vec{J} = \vec{0}} \quad (\beta)$$

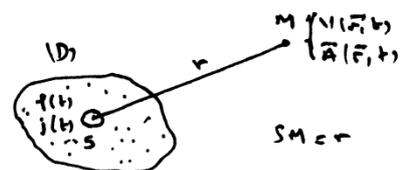
Remarque :

En régimes permanents $\square^2 = \nabla^2$ on a : jauge de Lorentz :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0}, \quad \boxed{\nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

Equations de Poisson en Electrostatique et magnétostatique.

Soit (D) une distribution d'extension finie de charges et de courants. On montre que la solution, des équations de Poisson (α) et (β), dite *des potentiels retardés* est :



$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(t-r/c)}{r} dv$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(t-r/c)}{r} dv$$

Interprétation des potentiels retardés :

Un observateur placé en M est informé des modifications survenues en S avec le *retard* $\Delta t = r/c$ qui correspond au temps de propagation d'un signal électromagnétique de S vers M.

VII. APPROXIMATION DES REGIMES QUASI-PERMANENTS (ARQP) OU DES ETATS QUASI-STATIONNAIRES :

$$\text{ARQP : } \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (\text{M.}\Phi) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (\text{M.}\text{F}) \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (\text{M.}\text{G}) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & (\text{M.}\text{A})_S \end{cases}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \text{ et } \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \partial_t \vec{A}$$

Remarques :

- L'ARQP néglige les phénomènes de propagation (c à d $\vec{J}_D = \vec{0}$)
- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$: \vec{J} à flux conservatif

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dv = 0, \quad \forall S$$

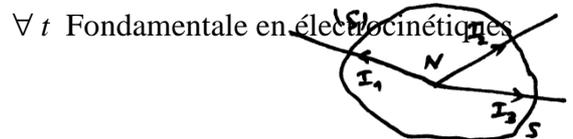
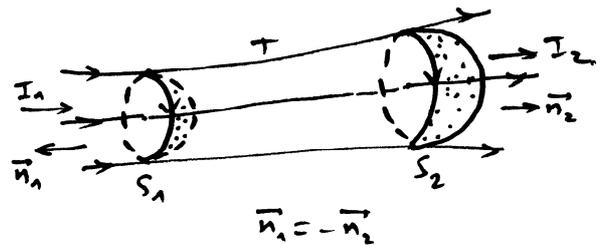
fermée.

Pour un tube de champ T :

$$\iint_T \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0.$$

soit $i_{S_1} = i_{S_2}$ sans t $I_1 = I_2$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \rightarrow \text{Loi des nœuds : } \sum_k I_k = 0$$



(circuits)

- (MΦ) et (M.A_S) de l'ARQP sont identiques à ceux de la magnétostatique.

$$\rightarrow \vec{A}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(t)}{r} dv : \text{ pour } \vec{B}, \text{ l'ARQP utilise, à t, les résultats de la magnétostatique.}$$

- $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \partial_t \vec{A}$ dans (M.G) avec $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ donne $V(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(t)}{r} dv$

L'ARQP néglige les retards $\Delta t = r/c$ des potentiels retardés.

- Dans le cas de (ρ, \vec{J}) variant périodiquement dans le temps (c à d \vec{E}, \vec{B}). En néglige en M tous les retards $\Delta t = SM/c$ devant la période T d'une onde électromagnétique, de longueur d'onde $\lambda \equiv cT$ c.à.d on a La condition de validité de l'ARQP en M :
 $\forall S \in D, \quad SM \ll \lambda.$

Exemple : pour $f = 10^6 \text{ Hertz} \rightarrow \lambda = 3 \cdot 10^8 / 10^6 = 300 \text{ m}$, ce qui justifie l'emploi de l'ARQP pour les circuits de dimension usuelle.

- \vec{B} se calcule dans l'ARQP comme en magnétostatique. Alors que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial_t \vec{A}$ différent du champ \vec{E} permanent. L'ARQP néglige les phénomènes de propagation mais pas les phénomènes d'induction électromagnétique (terme $-\partial_t \vec{A}$).

VIII. ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE :

Nous allons montrer que l'énergie d'un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) variable quelconque, est répartie dans l'espace avec une densité volumique : $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$.

1. Energie du champ électromagnétique :

- Energie localisée dans le champ :

L'expérience montre que l'énergie est *localisée* dans les régions de l'espace où règne un champ électromagnétique.

Remarques :

- On peut supposer que cette énergie est contenue dans le champ \vec{E} qui règne entre les armatures d'un condensateur sous ΔV , ou dans le champ \vec{B} qui règne à l'intérieur d'une bobine parcourue par un courant.
- La relativité montre qu'à une énergie dw correspond une masse $dm = \frac{dw}{c^2}$: un argument en faveur du caractère localisé de l'énergie électromagnétique ($\sim m$).

2. Transport d'énergie par le champ :

Le transport d'énergie par un champ magnétique est appelé *rayonnement*.

Exemples:

- l'énergie solaire nous arrive à travers le vide interplanétaire par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques.
- Une particule électrisée en mouvement accéléré rayonne de l'énergie électromagnétique. D'où le mouvement oscillatoire des électrons d'une antenne, est à l'origine du rayonnement de l'antenne.

(Puissance rayonnée par le dipôle oscillant - électrons d'une antenne- $P = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^3} q^2 a^2$, avec a l'accélération de la charge q oscillante).

3. Equation de conservation de l'énergie :

Soit S une surface fermée qui limite le volume V où règne un champ électromagnétique. La densité d'énergie électromagnétique est : $\omega = \frac{dw}{dv}$

Donc Le volume V conduit l'énergie $W = \iiint_V \omega dv$.

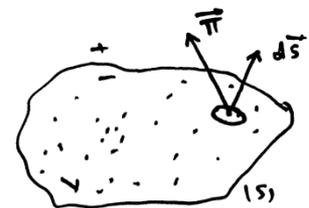
La puissance fournie par une diminution de W se retrouve sous forme de puissance cédée à la matière contenue dans V et sous forme de puissance évacuée à travers S sous forme de rayonnement.

Principe de conservation de l'énergie :

$$-\frac{dw}{dt} = P_{\text{cédée à la matière}} + P_{\text{rayonnée}} \quad (1)$$

* Puissance cédée à la matière :

La puissance P cédée par la force de la place $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ à la charge q à laquelle elle s'applique est :



$P_{\text{cedée}} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} + q \overbrace{(\vec{v} \wedge \vec{B})}^{=0} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$: un champ magnétique ne transfère pas d'énergie aux particules auxquelles il s'applique.

La puissance dP fournie par (\vec{E}, \vec{B}) à un volume dv contenant des charges $n_1 q_1 dv, n_2 q_2 dv \dots$ provenant de porteurs de vitesse d'ensemble $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots$

$$dP = n_1 q_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{E} dv + n_2 q_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{E} dv + \dots$$

Or la densité de courant $\vec{J} = n_1 q_1 \vec{v}_1 + n_2 q_2 \vec{v}_2 + \dots$, d'où la densité volumique de puissance cédée par (\vec{E}, \vec{B}) à la matière :

$$\frac{dP}{dv} (\text{W} \cdot \text{m}^{-3}) = \vec{J} \cdot \vec{E} \rightarrow \boxed{P_{\text{cédée à la matière}} = \iiint_v \vec{J} \cdot \vec{E} dv} \quad (2)$$

* Par analogie avec \vec{J} qui est tel que $i_s = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$, on cherche une densité de courant

$$d'énergie $\vec{\pi}$ tel que : $\boxed{P_{\text{rayonnée}} = \oiint_S \vec{\pi} \cdot d\vec{S}}$ (3)$$

$\vec{\pi}$: vecteur de Poynting ou vecteur radian

* En fin, (2) et (3) dans (1) $\rightarrow \iiint_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) dv$.

$$-\frac{d}{dt} \iiint_v \omega dv = \iiint_v -\frac{d\omega}{dt} dv = \iiint_v \vec{J} \cdot \vec{E} dv + \oiint_S \vec{\pi} \cdot d\vec{S} \quad \forall \forall \quad \boxed{-\frac{d\omega}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} + \vec{J} \cdot \vec{E}} \quad (4)$$

Remarques :

* A comparer avec l'équation de conservation de la charge : $\boxed{-\frac{d\rho}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}}$: l'analogie entre les couples (\vec{J}, ρ) et $(\vec{\pi}, \omega)$ n'est pas totale. Le terme supplémentaire $\vec{J} \cdot \vec{E}$: l'énergie n'est pas conservée intégralement sous forme électromagnétique mais peut être cédée à la matière.

4. Calcul du couple $(\vec{\pi}, \omega)$:

$$(M.A) \rightarrow \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Or : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{b})$ et en tenant compte de (M.F) on aura :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

$$\text{Donc : } \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = -\frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \text{ soit :}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) + \vec{J} \cdot \vec{E} \text{ à comparer avec (4) qui donne :}$$

$$\boxed{\vec{\pi} (\text{W} \cdot \text{m}^{-1}) = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}} \quad \text{et} \quad \omega (J \cdot \text{m}^{-3}) = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Remarques :

* En régime variable, le couplage de \vec{E} et \vec{B} , fait qu'il n'est pas possible de considérer séparément les densités :

$$\omega_E = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \quad \text{et} \quad \omega_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

* En régime permanent \vec{E} et \vec{B} sont découplés, on peut considérer séparément les densités ω_E et ω_B .

* Dans le cas de l'onde plane progressive O.P.P (page 6)

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \left(\frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{B} \right) = \frac{1}{\mu_0} \frac{E^2}{\mu} \vec{u} = \frac{1}{\mu_0} (-c \vec{u} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} = \frac{c}{\mu_0} \vec{B} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) = \frac{c}{\mu_0} B^2 \vec{u}$$

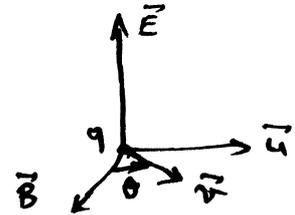
$$\text{Et } \omega = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2 \quad (\text{car } E = cB)$$

Dans ce cas particulier on a : $\omega_E = \omega_B$

* Calculons le rapport des forces : électrique $\vec{f}_E = q\vec{E}$ et magnétique $\vec{f}_B = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$, exercées par (\vec{E}, \vec{B}) sur la particule de charge q et de vitesse \vec{v} , on

a :

$$\frac{f_B}{f_E} = \frac{|\vec{v} \wedge \vec{B}|}{|\vec{E}|} = \frac{vB \sin \theta}{E} = \frac{v}{c} \sin \theta < \frac{v}{c} \quad \text{car } E = cB \text{ et } |\sin \theta| < 1$$



Le cas le plus fréquent est $v \ll c \Rightarrow \frac{v}{c} \ll 1$.

D'où $f_B \ll f_E$: L'action prépondérante est celle du champ électrique.

Démonstration : Equation de conservation de la charge

à t donnée, $q(t) = \iiint_V \rho dv$ contenue dans v et $i_s(t) = \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ qui sort de S égale au taux de

$$\text{diminution de } q(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

$$i_s(t) = \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho dv \right) = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \text{ et}$$

$$i_s(t) = \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Ostogr}}{=} \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dv = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad \forall v \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$