Pr A. SDAQ
Juin 2015

Épreuve "Electricité 3"
SN SMP4

I. 1-a-

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{div}\,\vec{E} = 0 & \vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}\,\vec{B} = 0 & \vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}}$$ (1)

b- $\begin{cases} -i\vec{k}.\vec{E} = 0 & -i\vec{k}\wedge\vec{E} = -i\omega\vec{B} \\ -i\vec{k}.\vec{B} = 0 & -i\vec{k}\wedge\vec{B} = i\mu_0\varepsilon\omega\vec{E} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \vec{k}.\vec{E} = 0 & \vec{k}\wedge\vec{E} = \omega\vec{B} \\ \vec{k}.\vec{B} = 0 & \vec{k}\wedge\vec{B} = -\mu_0\varepsilon\omega\vec{E} \end{array}}$ (1)

2- $\vec{k}\wedge(\vec{k}\wedge\vec{E}) = (\vec{k}.\vec{E})\vec{k} - k^2\vec{E} = \vec{k}\wedge\omega\vec{B} = -\mu_0\varepsilon\omega^2\vec{E}$

(1) $\Rightarrow \boxed{k^2 = \mu_0 \varepsilon \omega^2}$ relation de dispersion

3- • $k = n\dfrac{\omega}{c} \Rightarrow k^2 = n^2\dfrac{\omega^2}{c^2} = \mu_0\varepsilon\omega^2$

$\Rightarrow \boxed{n^2 = \varepsilon_r^* = \varepsilon'_r + i\,\varepsilon''_r}$ (0.5)

or $n^2 = (n' + i n'')^2 = n'^2 - n''^2 + 2in'n'' \Rightarrow$ $\boxed{n'^2 - n''^2 = \varepsilon'_r}$ $\boxed{n'n'' = \varepsilon''_r/2}$ (0.5)

• Cas d'un diélectrique parfait : $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon'_r$ (réel positif)

$\boxed{n = \sqrt{\varepsilon'_r}}$ (0.5)

• Cas d'un bon conducteur : $\varepsilon = i\,\varepsilon_0\varepsilon''_r$ (imaginaire pure)

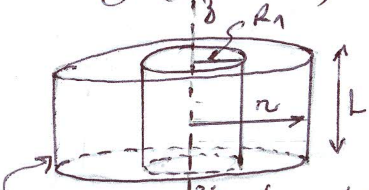
$n^2 = i\,\varepsilon''_r \Rightarrow \boxed{n = \sqrt{i}\sqrt{\varepsilon''_r} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon''_r}}$ (0.5)

II - 1 - a * Les plans contenant l'axe $z'z$ des deux cylindres ainsi que les plans perpendiculaires à cet axe sont plans de symétrie :

$$\vec{E_0}(M) = E_0(M)\,\vec{e_r} \quad (M \text{ se trouvant entre } C_1 \text{ et } C_2).$$

* Il y a invariance pour toute translation z ($//$ à $z'z$) et toute rotation θ autour de $z'z$:

$$\vec{E_0}(M) = E_0(r)\,\vec{e_r}$$



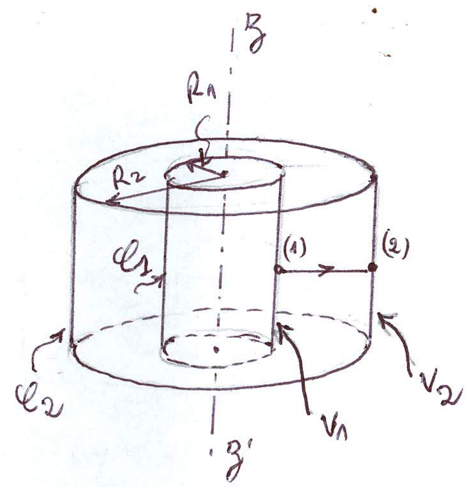
1

* Th. Gauss : $\oiint_S \vec{E_0}\cdot\vec{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

S = cylindre de hauteur "L" et de rayon "r".

$$E_0 \cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E_0} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L}\,\vec{e_r}}$$

b - $V_1 - V_2 = \displaystyle\int_1^2 \vec{E_0}\cdot\vec{dl}$ $\quad \vec{dl} = dr\,\vec{e_r}$



$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\,\mathrm{Ln}\frac{R_2}{R_1}$$

1

$$= \frac{Q}{C_0}$$

D'où $\boxed{\dfrac{1}{C_0} = \dfrac{\mathrm{Ln}\, R_2/R_1}{2\pi\varepsilon_0 L}}$

2 - a - • Pour calculer $\vec{E}(M)$, on calcule d'abord $\vec{D}(M)$.

• Les mêmes règles de symétrie sont valables pour calculer $\vec{D}$ (cf. 1-a)

• Th. Gauss : $\oiint_S \vec{D}\cdot\vec{dS} = Q_{int}$ $\quad$ S = cylindre de hauteur "L" et de rayon "r"

$$D \cdot 2\pi r L = Q \Rightarrow \boxed{\vec{D}(M) = \frac{Q}{2\pi r L}\,\vec{e_r}}$$

0.5

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{D}(M)}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r L}\vec{e_r}} \quad 1$$

b- $$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\, Ln\, \frac{R_2}{R_1} = \frac{Q}{C}$$

$$1 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{Ln\, R_2/R_1}{2\pi\varepsilon L} = \frac{1}{\varepsilon_r C_0}} \rightarrow C = \varepsilon_r C_0$$

c- • $$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{Q}{2\pi r L}\,\vec{e_r}} \quad 0.5$$

• $$\rho_p = -\,\mathrm{div}\,\vec{P} = -\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{Q}{2\pi L}\,\mathrm{div}\left(\frac{\vec{e_r}}{r}\right) = 0$$

0.5

• En $r = R_1$ $$\sigma_{p1} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{ext} = \vec{P}\cdot(-\vec{e_r}) \Rightarrow \boxed{\sigma_{p1} = -\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{Q}{2\pi R_1 L} < 0}$$

• En $r = R_2$ $$\sigma_{p2} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{ext} = \vec{P}\cdot\vec{e_r} \Rightarrow \boxed{\sigma_{p2} = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{Q}{2\pi R_2 L} > 0}$$

0.5

• <u>Conclusion</u> : charge totale de polarisation : $Q_{p1} + Q_{p2} = \sigma_{p1} \times 2\pi R_1 L + \sigma_{p2} \times 2\pi R_2 L$
$= 0$ (diélectrique neutre).

0.5

d- $$\vec{f} = \frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\,\vec{\nabla} E^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\,\vec{\nabla}\left[\left(\frac{Q^2}{2\pi L\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{r^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon^2}\,\frac{Q^2}{4\pi^2 L^2}\,\underbrace{\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^2}\right)}_{-2/r^3\,\vec{e_r}}$$

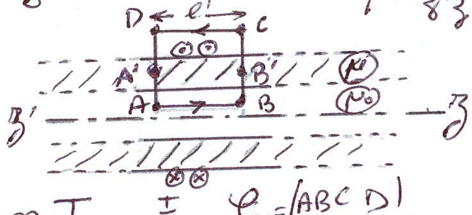
$$1 \quad \boxed{\vec{f} = -\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon^2}\,\frac{Q^2}{4\pi^2 L^2 r^3}\,\vec{e_r}}$$

0.5 $\vec{f}$ est dirigée vers l'axe $z'z$ (régions des forts champs $\vec{E}$)
(sens opposé à $\vec{e_r}$)

III -

1 - a - • Tout plan perpendiculaire à $z'z$ est plan de symétrie $\Rightarrow \vec{H}(M) = H(M)\,\vec{e_z}$

• Il y a invariance pour toute translation z ($//$ à $z'z$) et toute rotation θ autour de $z'z$: $\vec{H}(M) = H(r)\,\vec{e_z}$; r = distance / à $z'z$



• Th. d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{H}\cdot\vec{dl} = \sum_{\pm} I$; $\mathcal{C} = (ABCD)$ ou $(A'B'CD)$

Soit n' le nombre de spires qui traversent $\mathcal{C} = ABCD$ $\Rightarrow H\,l' = n' I \Rightarrow H = \frac{n'}{l'} I = n I$

D'où $\boxed{\vec{H} = n I \vec{e_z}}$ uniforme à l'intérieur du solenoïde 0.5

• Calcul de $\vec{B}$

• $0 < r < b$: $\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 n I \vec{e_z}}$ 0.5

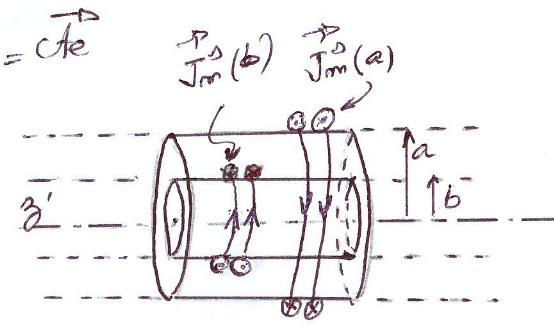
• $b < r < a$: $\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu n I \vec{e_z}}$ 0.5

b - $\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m n I \vec{e_z} \Rightarrow \boxed{\vec{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} n I \vec{e_z}}$ 1

2 - 0.5 • $\vec{J_m} = \vec{rot}\,\vec{M} = \vec{0}$ car $\vec{M} = \vec{cte}$

0.5 • $\vec{J_m^s}(r = b) = \vec{M} \wedge \vec{n}_{ext} = -M\,\vec{e_\varphi}$

0.5 • $\vec{J_m^s}(r = a) = \vec{M} \wedge \vec{n}_{ext} = +M\,\vec{e_\varphi} = -\vec{J_m^s}(b)$

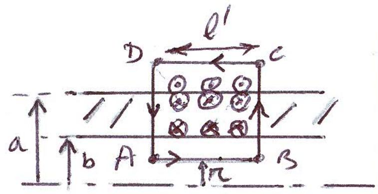


$J_m^s(a) = J_m^s(b) = M$

3 - Les mêmes règles de symétrie sont valables pour calculer $\vec{B}$.

• Th. d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \sum_{\pm} (I_l + I_m)$ $\begin{cases} I_l = \text{courant libre} \\ I_m = \text{" d'aimantation} \end{cases}$

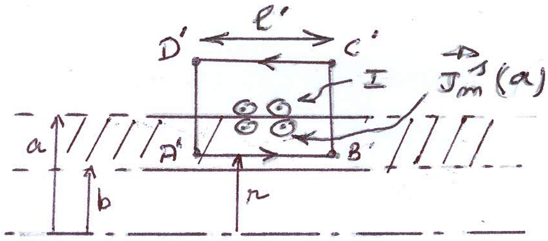
✱ $0 < r < b$; $\mathcal{C} = ABCD$



$B\,l' = \mu_0 \big(\underbrace{J_m^s(a)}_{M}\, l' - \underbrace{J_m^s(b)}_{M}\, l' + n l' I \big)$

0.5 $\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e_z}}$ et $\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = n I \vec{e_z}}$ 0.5

* $b < r < a$ $\quad \mathcal{C} = A'B'C'D'$



$$B\ell' = \mu_0 \left(M\ell' + \overbrace{n\ell'}^{n'} I \right)$$

$$B = \mu_0 \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} nI + nI \right)$$

Soit n' = nbre de spires qui traversent $\mathcal{C}$.

0.5 $\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu n I \vec{e}_z}$ et $\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = nI\vec{e}_z}$ 0.5

4.a- Pour un corps para- ou diamagnétique :

1 $\boxed{\vec{f} = \chi_m \vec{\nabla}\left[\frac{B_0^2}{2\mu_0}\right]}$ densité de force

b- La force agissant sur la sphère est :

$\vec{F} = \vec{f}\cdot\tau$ $\quad \tau$ = volume de la sphère (petite taille)

$= f_z \tau \vec{e}_z$ $\quad$ car $\vec{B}_0$ dépend uniquement de z sur l'axe $z'z$.

$= \frac{\chi_m}{\mu_0}\tau B_0 \frac{dB_0}{dz}\vec{e}_z$ $\quad$ La sphère se déplace sous l'effet de cette force.

1 bonus

• Il y a équilibre de la sphère si :

$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dB_0}{dz} = 0$ (extrémum de B_0)

La sphère est en équilibre pour $z = 0$ (en O).

• L'énergie magnétique de la sphère est :

$W = -\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}_0$ $\quad \vec{\mathcal{M}} = \vec{M}\tau$ (moment magnétique de la sphère) $\quad$ avec $\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$ (pour para- ou dia)

$= -\frac{\chi_m \tau}{\mu_0} B_0^2$

D'où en O → si $\chi_m > 0$ (sphère para-) : W est minimale $\Rightarrow$ équilibre stable

→ si $\chi_m < 0$ (sphère dia-) : W est maximale $\Rightarrow$ équilibre instable