UNIVERSITÉ IBN ZOHR
Faculté des Sciences d'Agadir
Département de Physique
AGADIR

Solution Épreuve "Électricité 3"
Module "Physique 7" – SMP4

A - Condensateur sphérique en présence d'un milieu diélectrique

1) a) • (S_1) et (S_2) sont isolées et en influence totale ;

• (S_1) porte la charge surfacique Q_0 uniformemnt réparties sur sa surface ;

• (S_2) : la surface de rayon R_2 porte la charge $-Q_0$ et la surface de rayon R_3 porte la charge Q_0 .

b) Règles de symétrie :

• Tout plan passant par O est plan de symétrie ;

• Il y a invariance de la distribution de charge pour toute rotation θ et φ.

$\Longrightarrow \vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$

Théorème de Gauss appliqué à des sphères de centre O et de rayon r variable :

$$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- $r < R_1 \Longrightarrow \vec{E}_1(M) = \vec{0}$
- $R_1 < r < R_2 \Longrightarrow \vec{E}_2(M) = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$
- $R_2 < r < R_3 \Longrightarrow \vec{E}_3(M) = \vec{0}$
- $r > R_3 \Longrightarrow \vec{E}_4(M) = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

c)

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2(M).\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\Big) = \frac{Q_0}{C_0}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{C_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\Big)$$

2) a) Théorème de Gauss appliqué à $\vec{D}(M)$ et à des sphères de centre O et de rayon r variable $\Longrightarrow \oiint_S \vec{D}.\mathrm{d}\vec{S} = Q_{int} \Longrightarrow D\, 4\pi r^2 = Q_{int}$

- $r < R_1 \Longrightarrow \vec{D}_1(M) = \vec{0}, \quad \vec{E}_1(M) = \vec{0}$

- $R_1 < r < R_2 \Rightarrow \vec{D}_2(M) = \dfrac{Q_0}{4\pi r^2}\vec{e}_r \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{E}_{2\,vide} = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \\ \vec{E}_{2\,diel} = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r \end{cases}$

- $R_2 < r < R_3 \Longrightarrow \vec{D}_3(M) = \vec{0}, \quad \vec{E}_3(M) = \vec{0}$

- $r > R_3 \Longrightarrow \vec{D}_4(M) = \dfrac{Q_0}{4\pi r^2}\vec{e}_r \quad \vec{E}_4(M) = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

b)

$$\begin{aligned}
V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2(M).\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} &= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{a}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\int_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{b}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \\
&= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{R_2}\right)\right] \\
&= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\right]$$

c) • Vecteur polarisation $\Longrightarrow \vec{P} = \left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)\vec{E}_{2\,diel} = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\dfrac{Q_0}{4\pi r^2}\vec{e}_r$

$$\rho_{pol} = -\operatorname{div}\vec{P} = 0 \quad \text{car} \quad \operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$\sigma pol \Longrightarrow \quad \begin{cases} (\sigma_p)_a = \vec{P}.(-\vec{e}_r) = -\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\dfrac{Q_0}{4\pi a^2} \Longrightarrow (Q_p)_a = -\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}Q_0 \\ (\sigma_p)_b = \vec{P}.\vec{e}_r = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\dfrac{Q_0}{4\pi b^2} \Longrightarrow (Q_p)_b = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}Q_0 \end{cases}$$

d) $(Q)_a + (Q)_b = 0 \Longrightarrow$ le diélectrique est globalement neutre.

B - Cylindre magnétique dans un champ extérieur $\vec{B}_0$ uniforme

1) Méthode des courants d'aimantation

1.1) Les vecteurs densités de courants d'aimantation sont :

- En volume : $\vec{J}_m = \mathbf{rot}\,\vec{M} = \vec{0}$ car $\vec{M}$ est uniforme.
- Sur la surface latérale : $\vec{J}_m^s = \vec{M} \wedge \vec{n}_{ext} = M\vec{e}_\varphi$
- Sur les surfaces des bases : $\vec{J}_m^s = \vec{M} \wedge \vec{n}_b = \vec{0}$

Le barreau aimanté est équivalent à un solénoïde parcouru par un courant de densité surfacique $\vec{J}_m^s = M\vec{e}_\varphi$

1.2) Si le solénoïde équivalent comporte N spires parcourues par un courant I, le courant total à la surface du barreau est donné par :

$$NI = \int_L \vec{J}_m^s.\vec{\mathrm{d}\ell} \quad (\vec{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}z\vec{e}_\varphi) \Longrightarrow NI = J_m^s\,L = M\,L$$

$$\vec{B}_m = \frac{\mu_0 L}{2\sqrt{R^2 + L^2/4}} M\vec{e}_z$$

1.3.a) • Barreau infinement long ($L >> R$)

$$\vec{B}_m = \frac{\mu_0}{2\sqrt{(R/L)^2 + 1/4}}\vec{M} \simeq \mu_0\vec{M}$$

- Champ démagnétisant : $\vec{H}_D = \dfrac{\vec{B}_m}{\mu_0} - \vec{M} = \vec{0}$

1.3.b) $\vec{H}_t = \vec{H}_0 \Longrightarrow \dfrac{\vec{B}_t}{\mu} = \dfrac{\vec{B}_0}{\mu_0} \Longrightarrow \vec{B}_t = \dfrac{\mu}{\mu_0}\vec{B}_0$

Or $\vec{B}_t = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \Longrightarrow \dfrac{\mu}{\mu_0}\vec{B}_0 = \mu_0\left(\dfrac{\vec{B}_0}{\mu_0} + \vec{M}\right) \Longrightarrow \vec{M} = \dfrac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\dfrac{\vec{B}_0}{\mu_0}$

2) Méthode du champ auxiliaire

2.1) $\mathrm{d}\vec{A}(P) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{\mathrm{d}m} \wedge \vec{r}}{r^3} \qquad \vec{\mathrm{d}m} = \vec{M}\mathrm{d}\tau$

$$\begin{aligned}\vec{A}(P) &= \iiint_\tau \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M} \wedge \iiint_\tau \frac{4\pi\varepsilon_0\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M} \wedge \vec{E}^*\end{aligned}$$

On notera que $\vec{E}^*$ est le champ électrostatique créé par la densité de charge $\rho = 4\pi\varepsilon_0$ répartie uniformement dans le volume du cylindre.

2.2.a)

• Pour un cylindre infini chargé, on a par raison de symétrie ; $\vec{E}^*$ est perpendiculaire à Oz et dépend seulement de $r \Longrightarrow \vec{E}^*(P) = E^*(r)\vec{e}_r$

• Théorème de Gauss appliqué à un cylindre de surface S, de hauteur h et de rayon r variable$\Longrightarrow E^*\,2\pi rh = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$r > R \qquad E^*\,2\pi rh = \frac{\rho\,\pi R^2\,h}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}^* = 2\pi\frac{R^2}{r}\vec{e}_r$$

$$r < R \qquad E^*\,2\pi rh = \frac{\rho\,\pi r^2\,h}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}^* = 2\pi r\vec{e}_r$$

2.2.b)

$$r < R \qquad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M} \wedge 2\pi r\vec{e}_r \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{2}\vec{M} \wedge \vec{r}$$

$$r > R \qquad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M} \wedge 2\pi\frac{R^2}{r}\vec{e}_r \Rightarrow \vec{A} = R^2\frac{\mu_0}{2}\vec{M} \wedge \frac{\vec{r}}{r^2}$$

2.2.c)

$$r < R \qquad \vec{B} = \mathbf{rot}\,\vec{A} = \mathbf{rot}\Big(\frac{\mu_0}{2}M\vec{e}_z \wedge r\vec{e}_r\Big) = \frac{\mu_0 M}{2}\,\mathbf{rot}(r\vec{e}_\varphi)$$

$$\text{Or} \qquad \mathbf{rot}(r\vec{e}_\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2)}{\partial r}\vec{e}_z \Longrightarrow \vec{B} = \mu_0\vec{M}$$

$$r > R \qquad \vec{B} = \mathbf{rot}\left(R^2\frac{\mu_0}{2}\vec{M} \wedge \frac{\vec{r}}{r^2}\right) = \frac{\mu_0 M R^2}{2}\,\mathbf{rot}\Big(\frac{1}{r}\vec{e}_\varphi\Big)$$

$$\text{Or} \qquad \mathbf{rot}\Big(\frac{1}{r}\vec{e}_\varphi\Big) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r/r)}{\partial r}\vec{e}_z = \vec{0} \Longrightarrow \vec{B} = \vec{0}$$