Épreuve d'électromagnétisme
Session de rattrapage - SMP4

I - Lame paramagnétique

1- • Densité de courant d'aimantation volumique :

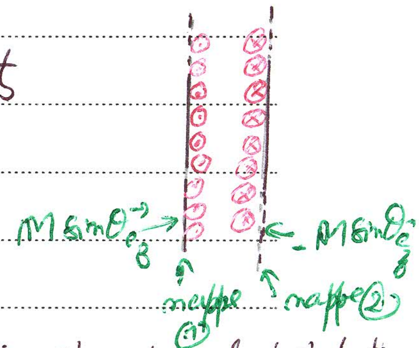
$$\vec{J}_m = \vec{rot}\,\vec{M} = \vec{0} \quad \text{car } \vec{M} \text{ uniforme}$$

•• Densité de courant d'aimantation surfacique :

→ en $x = -\frac{d}{2}$: $\vec{J}_{m}^{s}\left(-\frac{d}{2}\right) = \vec{M} \wedge -\vec{e_x} = M \sin\theta\, \vec{e_z}$

→ en $x = \frac{d}{2}$: $\vec{J}_{m}^{s}\left(\frac{d}{2}\right) = \vec{M} \wedge \vec{e_x} = -M \sin\theta\, \vec{e_z}$

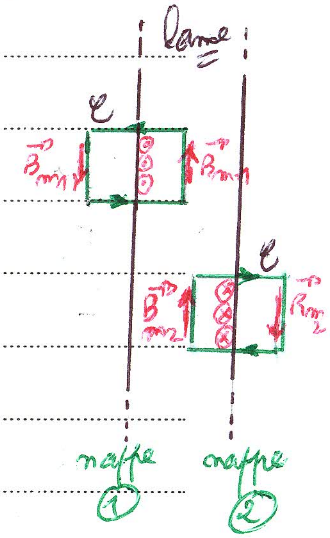
La lame paramagnétique ≡ 2 nappes de courant surfaciques



2 - a • Tout plan // au plan Oxz est plan de symétrie pour les distributions de courant

$$\Rightarrow \vec{B}_m(P) = B_m(P)\,\vec{e_y}$$

•• Il y a invariance des distributions de courant pour toute translation "y" ou "z" $\Rightarrow \vec{B}_m(P) = B_m(x)\,\vec{e_y}$



Nappe (1)

Th. d'Ampère $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_{m1}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \sum\limits_{\pm} I$

$$2 B_{m1}\, l = \mu_0\, J_m^s\left(-\tfrac{d}{2}\right) l$$

$$\vec{B}_{m1} = \frac{\mu_0}{2} M \sin\theta\, \vec{e_y}$$

Nappe (2)

$$2 B_{m2}\, l' = \mu_0\, J_m^s\left(\tfrac{d}{2}\right) l'$$

$$\vec{B}_{m2} = \frac{\mu_0}{2} M \sin\theta\, \vec{e_y}$$

Le champ à l'intérieur de la lame :

$$\vec{B}_m = \vec{B}_{m1} + \vec{B}_{m2}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_m = \mu_0 M \sin\theta\, \vec{e_y}$$

2-b
- $\vec{B}_{int} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \vec{B}_0 + \mu_0 M \sin\theta \, \vec{e_y}$
- $\vec{H}_{int} = \dfrac{\vec{B}_{int}}{\mu_0} - \vec{M} = \dfrac{\vec{B_0}}{\mu_0} + M \sin\theta \, \vec{e_y} - \vec{M}$

d'où $\vec{H}_{int} = \dfrac{\vec{B_0}}{\mu_0} - M \cos\theta \, \vec{e_x}$

3- 1ère méthode

$$\vec{H}_D = \frac{\vec{B}_m}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{H}_D = -M \cos\theta \, \vec{e_x}$$

2ème méthode

$$\vec{H}_{int} = \vec{H}_0 + \vec{H}_D = \frac{\vec{B_0}}{\mu_0} + \vec{H}_D$$

$$\Rightarrow \vec{H}_D = -M \cos\theta \, \vec{e_x}$$

4- $\vec{B}_{int} = \mu \vec{H}_{int} = \dfrac{\mu}{\mu_0} \vec{B}_0 - \mu M \cos\theta \, \vec{e_x}$

$$= \left(\frac{\mu}{\mu_0} B_0 \cos\alpha - \mu M \cos\theta\right) \vec{e_x} + \frac{\mu}{\mu_0} B_0 \sin\alpha \, \vec{e_y}$$

5- $\vec{B}_{int} = \vec{B}_0 + \mu_0 M \sin\theta \, \vec{e_y}$ (d'après 2-b)

$$= B_0 \cos\alpha \, \vec{e_x} + (B_0 \sin\alpha + \mu_0 M \sin\theta) \, \vec{e_y}$$

En égalisant cette expression avec celle trouvée en 4) :

$$\begin{cases} B_0 \cos\alpha = \dfrac{\mu}{\mu_0} B_0 \cos\alpha - \mu M \cos\theta \\ B_0 \sin\alpha + \mu_0 M \sin\theta = \dfrac{\mu}{\mu_0} B_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} M \cos\theta = B_0 \cos\alpha \left(\dfrac{1}{\mu_0} - \dfrac{1}{\mu}\right) \\ M \sin\theta = \dfrac{\mu}{\mu_0} B_0 \sin\alpha \left(\dfrac{1}{\mu_0} - \dfrac{1}{\mu}\right) \end{cases}$$

D'où $\quad tg\,\theta = \dfrac{\mu}{\mu_0} \, tg\,\alpha \qquad \dfrac{\mu}{\mu_0} = \mu_r$

6- $\vec{M} = M \cos\theta \, \vec{e_x} + M \sin\theta \, \vec{e_y}$

$$\vec{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} B_0 \cos\alpha \, \vec{e_x} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0^2} B_0 \sin\alpha \, \vec{e_y}$$

II – Condensateur sphérique remplit de diélectrique l.h.i.

1 – a – * Tout plan passant par O est plan de symétrie

* Il y a invariance de la distrib^t de charge pour toute rotation O ou φ.

D'où $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e_r}$

* Calcul de E(M) pour $a < r < 2a$:

Th. Gauss : $\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon}$ S = sphère de rayon "r"

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e_r}$$

b –
$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{Q}{4\pi}\int_a^{2a}\frac{dr}{\varepsilon r^2}$$
$$= \frac{Q}{4\pi}\int_a^{2a}\frac{1{,}5a - 0{,}5r}{\varepsilon_0 a r^2}\,dr$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_a^{2a}\left(1{,}5\frac{a}{r^2} - \frac{0{,}5}{r}\right)dr$$

D'où
$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{3}{4} - 0{,}5\,\mathrm{Ln}\,2\right) = \frac{Q}{C}$$
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{3}{4} - 0{,}5\,\mathrm{Ln}\,2\right)$$

2 – a – * $\sigma_p(a) = \vec{P}(a)\cdot(-\vec{e_r})$ avec $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\vec{E}$
$$= -\frac{\varepsilon(a) - \varepsilon_0}{\varepsilon(a)}\,\frac{Q}{4\pi a^2} \qquad \varepsilon(a) = \varepsilon_0$$
$$= 0$$

* $\sigma_p(2a) = \vec{P}(2a)\cdot\vec{e_r}$
$$= \frac{\varepsilon(2a) - \varepsilon_0}{\varepsilon(2a)}\,\frac{Q}{4\pi(2a)^2} \qquad \varepsilon(2a) = 2\varepsilon_0$$
$$= \frac{Q}{32\pi a^2}$$

b- Charges de polarisation surfacique :

* $Q_p^s(a) = 0$
* $Q_p^s(2a) = \sigma_p(2a) \times 4\pi(2a)^2 \Rightarrow Q_p^s(2a) = \frac{Q}{2}$

3- a- $\rho_p(r) = -\operatorname{div} \vec{P}(r) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P(r)\right)$

$$= \frac{-1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(r)}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}\right]$$

$$= \frac{-1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[0{,}5\left(-1+\frac{r}{a}\right)\frac{Q}{4\pi}\right]$$

$$\rho_p(r) = -\frac{Q}{8\pi r^2 a}$$

b- $Q_p^v = \int_a^{2a} \rho_p(r)\, 4\pi r^2 dr$

$$= \int_a^{2a} -\frac{Q}{8\pi r^2 a} \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$= -Q/2$$

Charge de polarisation totale $= Q_p^{tot} = Q_p^s + Q_p^v = 0$

$\Rightarrow$ le diélectrique est globalement neutre.

III. Onde monochromatique dans un conducteur

1. $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\qquad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\qquad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J_e} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ où $\vec{J_e} = \sigma \vec{E}$

2. $$\frac{\|\vec{J_D}\|}{\|\vec{J_e}\|} = \frac{\varepsilon_0 \omega \|\vec{E}\|}{\sigma \|\vec{E}\|} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma}$$

A.N. $= \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma} = \frac{2\pi \times 10^4}{36\pi . 10^9 \times 10^7} = \frac{1}{18} 10^{-12}$

D'où $J_D \ll J_e$ on néglige les courants de déplacement

3. a. $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{\mathrm{grad}}\,(\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E}}_{=0}) - \Delta \vec{E}$

or $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{\mathrm{rot}}\left[-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu_0 \sigma \vec{E}\right] = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

D'où $\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Eq. diff. vérifiée pour $\vec{E}$

b. $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 \vec{E} = -i\omega\mu_0\sigma\,\vec{E}$

D'où $k^2 = i\omega\mu_0\sigma$ et $k = \sqrt{i}\sqrt{\mu_0\omega\sigma}$ $\quad \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1+i}{\delta}$

c. $\vec{E} = \underline{E_0} \exp i\left[\frac{1+i}{\delta}x - \omega t\right] \vec{e_z}$

$= \underline{E_0} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp i\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right) \vec{e_z}$

Il s'agit d'une onde amortie qui se propage selon les "x" croissants.