UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE DES SCIENCES SEMLALIA
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
MARRAKECH

Année universitaire 2013-2014

TD N°1 d'électricité III SMP

EXERCICE 1:

L'espace entre les armatures d'un condensateur plan est remplie par un diélectrique LHI. de permittivité relative ε_r. Les armatures distantes de d, sont soumises à une ddp variable pour maintenir la charge du condensateur constante, soit σ_ℓ la densité surfacique des charges libres de l'armature positive et Oz l'axe orthogonal aux armatures.

1- Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}_0$ créé par les charges libres entre les armatures en l'absence de diélectrique puis le champ électrique macroscopique $\vec{E}$ en présence du diélectrique.

2- En déduire le vecteur polarisation $\vec{P}$.

3- Calculer les densités de charges de polarisation et le champ dépolarisant $\vec{E}_p$.

4- Que deviennent le vecteur polarisation $\vec{P}$ et les charges de polarisation si l'espace entre les armatures est rempli d'un diélectrique linéaire de permittivité absolue $\varepsilon(z)=\varepsilon_0(1+\alpha z)$ où α constante positive.

EXERCICE 2:

Un diélectrique L.H.I., de permittivité absolue ε, ayant la forme d'une sphère de rayon R, est polarisé de manière uniforme, sous l'effet d'un champ électrique extérieur uniforme $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z$. $\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire de l'axe Oz vertical ascendant.

1- Calculer en fonction de P (le module du vecteur polarisation) les densités de charges de polarisation en tout point de la sphère. Faîtes une représentation.

2- Donner l'expression du:

a- potentiel $dV_p(M)$ créé en un point M de l'espace par un moment dipolaire électrique élémentaire $d\vec{p} = \vec{P}d\tau$ correspondant à l'élément de volume $d\tau$.

b- potentiel $V_p(M)$ sous forme d'une intégrale et montrer qu'elle se ramène à un calcul de champ électrostatique à déterminer.

3- En déduire le potentiel $V_p(M)$ le champ de polarisation $\vec{E}_p$ en tout point de l'espace.

Question suplinentaire : 4 - En deduire $\vec{E}$ et $\vec{D}$ en tout point de l'espace
5. Verifier la relation de passage entre les deux milieux ① et ②
diele vide

EXERCICE 3:

On place sur l'axe Z'Z d'un diélectrique cylindrique LHI de permittivité relative ε_r, creux, de rayons R_1, R_2 et de longueur infinie, un fil conducteur infini chargé uniformément avec une densité de charge linéique λ positive.

1- Quel est l'effet du champ électrique $\vec{E}_0$ crée par le fil infini sur le diélectrique.

2- Déterminer les expressions du vecteur excitation électrique $\vec{D}$, du champ électrique total $\vec{E}$ et celle du champ de polarisation $\vec{E}_p$ en tout point de l'espace.

3- Donner l'expression du vecteur polarisation $\vec{P}$ en fonction de ε_r, λ, et r.

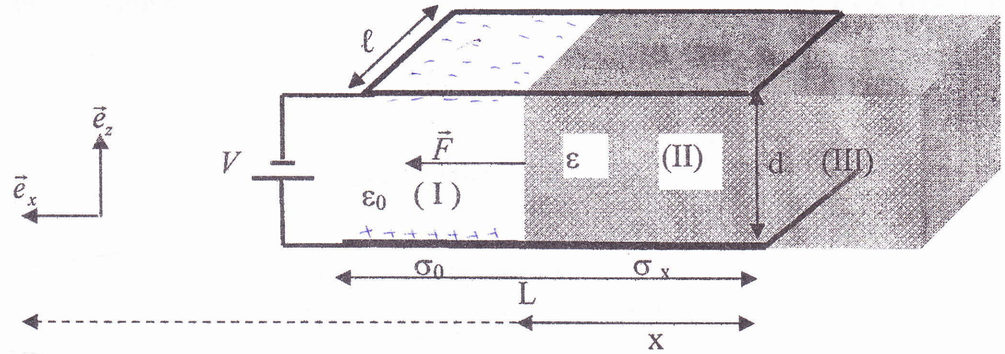
4- Déterminer les densités des charges de polarisation et retrouver $\vec{E}_p$.

5- Montrer que l'énergie électrostatique W_p, par unité de longueur, nécessaire pour polariser le diélectrique est donné par : $W_p = \dfrac{\lambda^2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon^2} Ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$

EXERCICE4 :

PARTIE A:

On considère un condensateur plan de plaques rectangulaires de surface $S = L.\ell$ distantes de d, et un diélectrique LHI de permittivité absolue $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ de même surface que les plaques et d'épaisseur d, on néglige tout effet de bords. On applique entre les plaques métalliques de ce condensateur une différence de potentiel V constante. Le diélectrique peut glisser à l'intérieur de ce condensateur. Soit x la longueur de la partie introduite du diélectrique entre les plaques (voir figure).



1- Montrer que les champs électriques $\vec{E}_1$ dans le vide (région I) et $\vec{E}_2$ dans la partie du diélectrique introduite dans le condensateur (région II) sont égaux. Donner leur expression en fonction de V et d.

2- a) Déterminer les vecteurs déplacements électriques $\vec{D}_1, \vec{D}_2$ et $\vec{D}_3$ dans les 3 régions.

b) En déduire les densités surfaciques de charges libres σ_0 et σ_x portées, respectivement, par la surface métallique inférieure du côté vide (région I) et du côté diélectrique (région II) en fonction de ε_0, ε_r, V, et d.

3) Déterminer le vecteur polarisation $\vec{P}$ et les densités de charges de polarisation dans la région III (partie extérieure du diélectrique)

4- a) Déterminer la charge totale Q de la plaque métallique inférieure.

b) En déduire la capacité du condensateur C en fonction de L, ℓ, x, d, ε_r et ε_0.

5 Déterminer l'énergie électrostatique W du système.

6- Déterminer la force électrostatique exercée par le condensateur sur le diélectrique, sachant que $\vec{F} = \overrightarrow{grad}W$

7- Que deviennent les grandeurs C, W et $\vec{F}$ lorsque le diélectrique rempli complètement l'espace entre les deux plaques du condensateur.

<u>PARTIE B</u>:

Dans la suite on suppose que le diélectrique est un gaz monoatomique non polaire et qu'il rempli complètement l'espace entre les deux plaques du condensateur. On admet que ce diélectrique acquiert une polarisation $\vec{P}$ uniforme, parallèle au champ électrique macroscopique $\vec{E}$.

1- Déterminer le vecteur de polarisation $\vec{P}$ en fonction de $\vec{E}$ et en déduire les densités de charges de polarisation.

2- Déterminer le champ de polarisation $\vec{E}_p$ en un point du diélectrique, en fonction de $\vec{E}$.

3- Donner la définition du champ local $\vec{E}_{\ell oc}$ et déterminer son expression en un point du diélectrique, en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{P}$ (relation de Lorentz).

4- En considérant qu'un atome du diélectrique est assimilable à un noyau ponctuel de charge +Ze et à une charge électronique -Ze répartie uniformément sur une sphère de rayon R. Définir le processus de la polarisation électronique de l'atome en présence du champ électrique local $\vec{E}_{\ell oc}$. (On suppose que, sous l'effet du champ local permanent, le nuage électronique reste indéformable mais la charge +Ze subit un déplacement constant $\delta < R$).

5- déterminer la distance δ et la polarisabilité α de l'atome, et exprimer son moment dipolaire induit $\vec{p}$.

6- Etablir la relation dite de Clausius-Mossotti, liant les grandeurs α, ε_0, ε_r et n (nombre d'atomes par unité de volume du diélectrique).

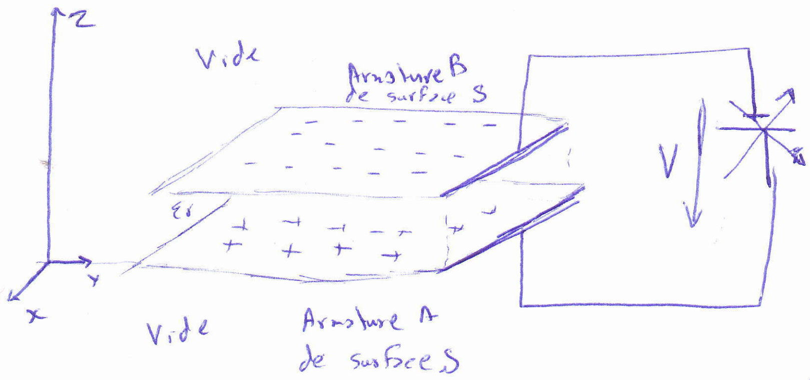
7-Calculer le rayon R de l'atome sachant que la masse molaire est M=28g, sa mase volumique vaut $\rho_v = 1.3 kg/m^3$ et $\varepsilon_r - 1$ vaut $6.\ 10^{-4}$.

<u>EXERCICE5</u>: (la solution sera distribuée aux étudiants)

Déterminer les expressions du potentiel et du champ électrostatiques de polarisation V_p et $\vec{E}_p$ créés par un barreau cylindrique diélectrique LHI, de très grande longueur, de rayon R, polarisé uniformément dans une direction perpendiculaire à son axe en employant les 3 méthodes suivantes :

a) En suivant la démarche utilisée dans l'exercice 2.
b) Considérer le cylindre polarisé comme la superposition de 2 cylindres chargés uniformément avec 2 densités volumiques opposées et d'axes décalés de a<<R dans la direction du vecteur de polarisation $\vec{P}$.
c) Chercher en tout point de l'espace des solutions de l'équation de Laplace sous la forme $V_p(r,\theta,z)=f(r)\cos\theta$, où θ est l'angle polaire compté à partir de la direction de $\vec{P}$, et montrer que $f(r)$ est de la forme $A\,r^{-1} + B\,r$. Vérifier que V_p satisfait aux conditions aux limites et en déduire les constantes A et B.

Exercice I : Condensateur

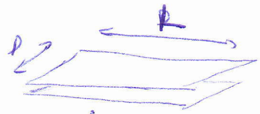


$V = V_A - V_B$

maintenir la charge de condensateur cte

$\Rightarrow$ les charges réels sont sur les Armature

On assimile les armature à des plan infini $\Rightarrow$

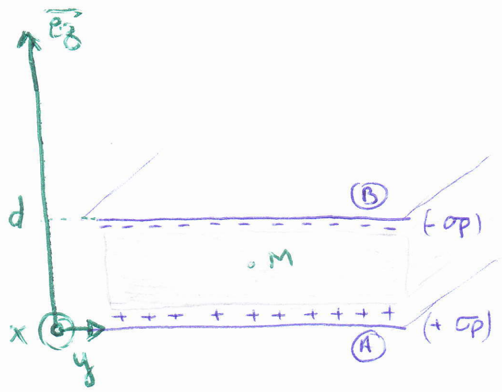


$L \gg d$

$l \gg d$

Armature A chargée $+\sigma_p$

Armature B chargée $-\sigma_p$



Etude de symétrie :

$\forall M(x,y,z) \Rightarrow \vec{E}(M) = E_x \vec{e_x} + E_y \vec{e_y} + E_z \vec{e_z}$

En generale $\boxed{\vec{E}(M) = E(x,y,z)\vec{e_x} + E(x,y,z)\vec{e_y} + E(x,y,z)\vec{e_z}}$

a/ Plan de symetrie ou Axe de symetrie

- Tout plan contenant M est $\perp$ au Armature est un plan de symétrie

  En particulier le plan Oxz passant par M, Oyz passant par M $\Rightarrow$ $\vec{E}$ est porté par $\vec{e_z}$

  $E_x = E_y = 0$ et $\vec{E} = E_z \vec{e_z}$

- Tout axe passant par M et // à l'axe Z est un axe de symétrie $\Rightarrow$ E porté par $\vec{e_z}$

Etude de l'invariance :

Les operation qui l'aissent la symétrie invariante sont :

- Translation suivant x
- Translation suivant y

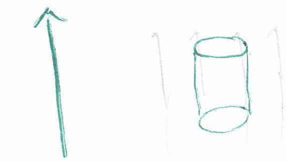
$D = \varepsilon E$

Resumé :

Par raison de symétrie

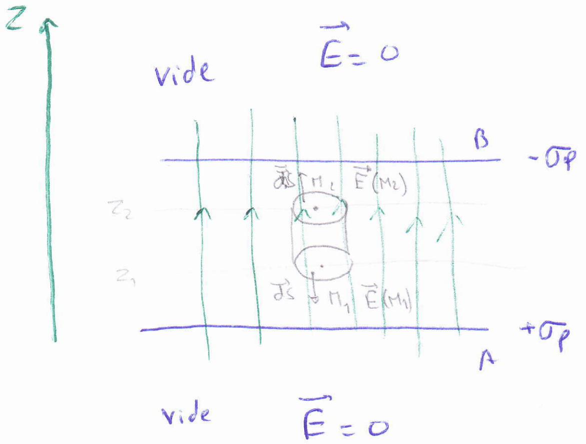
$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(M) &= E_z(z)\,\vec{e_z} \\ \vec{D}(M) &= D_z(z)\,\vec{e_z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Les lignes de champ de } \vec{E} \text{ ou } \vec{D} \text{ sont des droits } \parallel \text{ à l'axe } e_z$$

$\Rightarrow$ choix de la surface de Gauss



petit cylindre de base dS d'axe $\vec{e_z}$

1°/ a/ En absence de dielectrique



montrer que E est uniforme entre les armature

cylindre ① $\longrightarrow$ the. Gauss.

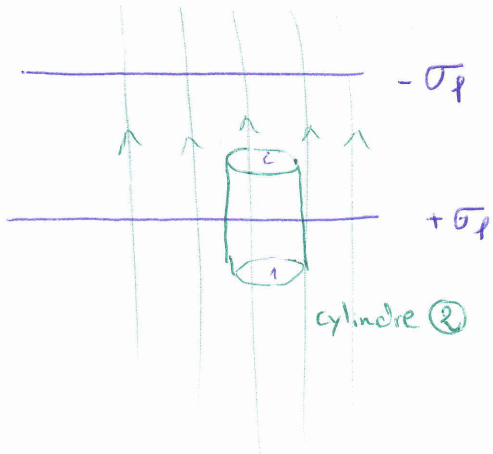
$$d\phi_{\substack{cylind \\ ①}} = d\phi_{b_2} + d\phi_{b_1} + \cancel{d\phi_{S_L}} = 0$$

$$= \vec{E}(M_2)\,\vec{dS}_{bas} + \vec{E}(M_1)\,\vec{dS}_{b_1}$$

$$= \vec{E}(M_2)\,dS - E(M_1)\,dS$$

$$d\phi_{\substack{cylind \\ ①}} = \left(E(M_2) - E_1(M_1)\right) dS = \Sigma Q = 0$$

Donc le champ est uniforme $\Longleftarrow$ $\vec{E}(M_2) = \vec{E}(M_1)$



Th. Gauss ⟶ Cylindre ②

$$d\phi_{cylindre\,2} = d\phi_{b2} + \underbrace{d\phi_{b1}}_{\substack{0 \\ \text{exterieur}}} + d\phi_{SL}^{=0}$$

$$= E_0\, dS = \frac{\sigma_\ell\, dS}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_0 = \frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_0 = \frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_0} e_z} = E_z \vec{e_z}$$

5) Capacité C_0

$$C_0 = \frac{Q_{lib}}{V_A - V_B}$$

$$V_A - V_B = ?$$

$$E = -\text{grad}\, V$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{dV}{dz}$$

$$dV = -E_z\, dz = -\frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_0}\int_0^d dz$$

$$V_B - V_A = -\frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_0} d$$

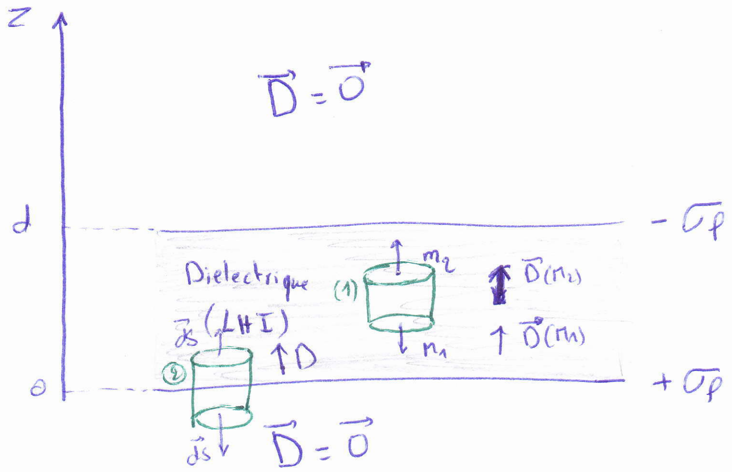
$$V_A - V_B = \frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_0} d$$

Donc $C_0 = \dfrac{Q_{Libr}}{\dfrac{\sigma_p d}{\varepsilon_0}} = \dfrac{\sigma_p S \varepsilon_0}{\sigma_p d} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

Sa Capacite $\boxed{C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}}$

Pour un dielectrique $\boxed{C = \dfrac{\varepsilon S}{d} = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon_r C_0}$

b/ En presence du dielectrique :



Le dielectrique LHI est placé dans le champ $\vec{E}_{ext} = \vec{E}_0$ uniforme

$\Rightarrow$ Il se polarise $\Rightarrow$ Apparition de charge de polarisation

On utilisant le Théoreme de Gauss Appliqué a $\vec{D}$

$$\oiint \vec{D}\,\vec{dS} = \sum Q_{Libre}$$

de même cylindre (1) $\Rightarrow$ $\vec{D}$ uniforme

~~D(M2)~~

1)

de même la capacité C en presence de dielectrique

$$C = \frac{\varepsilon E}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \varepsilon_r C_0$$

Augmentation de la capacité du condensateur

2°/ Vecteur Polarisation :

dielectrique LHI $\Rightarrow$ $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

$$= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon}\vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{P} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_{lib}\,\vec{e_z}}$$

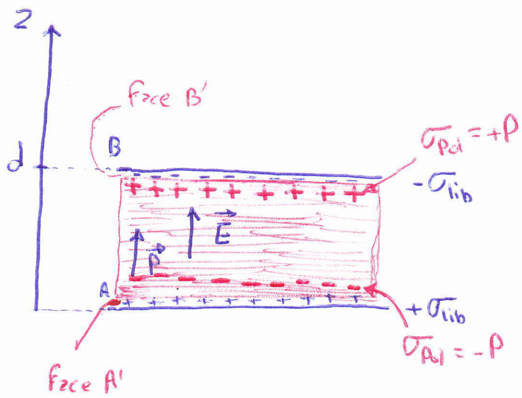
$\vec{P}$ est uniforme

Donc si le dielectrique LHI est placer dans un champ excitateur uniforme

$\Rightarrow$ La polarisation $\vec{P}$ uniforme // $\vec{E_0}$.

3°/ densité de Charges de polarisation :

- En volume : $\rho_{Pol} = -\operatorname{div}\vec{P} = 0$ car $\vec{P}$ est uniforme



Sur la face A'

$$(\sigma_{Pol})_{A'} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{exterieur\ A'}$$

$$= P\vec{e_z}\cdot(-\vec{e_z})$$

$$\boxed{(\sigma_{Pol})_{A'} = -P} \quad \boxed{\sigma_{Pol\,A'} = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_{lib}}$$

Sur la face B'

$$(\sigma_{Pol})_{B'} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{exterieur\ B'} = P\vec{e_z}\cdot\vec{e_z} = +P$$

$$\boxed{(\sigma_{Pol})_{B'} = +P = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_{lib}}$$

on a $\vec{E} = \vec{E_0} + \vec{E_p}$

$$\vec{E_p} = \vec{E} - \vec{E_0}$$

$$= \left(\frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon} - \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0}\right) \vec{e_z}$$

$$\vec{E_p} = \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \vec{e_z}$$

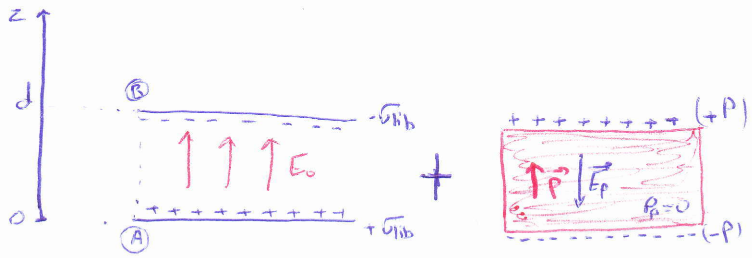
$$\boxed{\vec{E_p} = \frac{-P}{\varepsilon_0} \vec{e_z}}$$

$$\boxed{\vec{E_p} = \frac{-\vec{P}}{\varepsilon_0}}$$

Rq : E_p de sens opposé à $\vec{P}$ d'ou l'apparition de champ depolarisant.

Par superposition

système $\equiv$



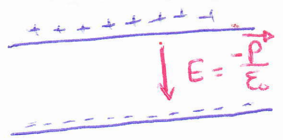
condensateur seul

Dielectrique polarisé $\vec{P}$

$\vec{E_p} = \frac{P}{\varepsilon_0}(-\vec{e_z})$

$\Updownarrow$

a une distribution de charges dans le vide qui a la forme d'un condensateur Plan dans le vide



4°/ $\varepsilon(z) = \varepsilon_0(1 + \alpha z)$ $\alpha > 0$

on a $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + P$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon(z)\vec{E} - \varepsilon_0 E = (\varepsilon(z) - \varepsilon_0)\vec{E}$$

$$= (\varepsilon(z) - \varepsilon_0)\frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon(z)} \vec{e_z} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(z)}\right)\sigma_{lib} \vec{e_z}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha z}\right)\sigma_{lib} \vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\alpha z}{1+\alpha z}\,\sigma_{lib}\,\vec{e_z}}$$

, $\vec{P}$ n'est pas uniforme il depend de z $\quad \vec{P} = P(z)\,\vec{e_z}$

* Les densité de charges de polarisation

• En volume

$$\rho_{Pol} = -\,\mathrm{div}\,\vec{P} =$$

En coordonnées cartesienne

En general si on a $\vec{P}\left|\begin{array}{l} P_x \\ P_y \\ P_z \end{array}\right.$

$$\mathrm{div}\,\vec{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

Ici on $\vec{P}\left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ P_z = P(z) \end{array}\right.$

$$\mathrm{div}\,\vec{P} = \frac{\partial P(z)}{\partial z} = \frac{d P(z)}{dz}$$

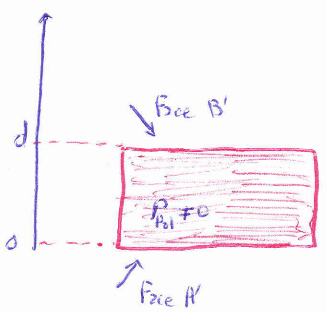
$$\mathrm{div}\,\vec{P} = \frac{dP(z)}{dz} \quad \text{avec} \quad P(z) = \frac{\alpha z}{1+\alpha z}\,\sigma_{lib}$$

$$= \alpha\sigma_{lib}\left[\frac{1+\alpha z - \alpha z}{(1+\alpha z)^2}\right]$$

$$\mathrm{div}\,\vec{P} = \frac{\alpha}{(1+\alpha z)^e}\,\sigma_{lib}$$

Or $\quad \boxed{\rho_p = -\,\mathrm{div}\,\vec{P} = -\frac{\alpha}{1+\alpha z}\,\sigma_{lib}}$

• En surface $\quad \sigma_{Pol} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{exterieur}$



sur la face A' $\quad z=0 \qquad P(z)=0$

$$\vec{P} = P(z=0)\,\vec{e_z} = \vec{0}$$

$$\sigma_{Pol})_{A'} = 0$$

sur la face B' $\quad z = d$

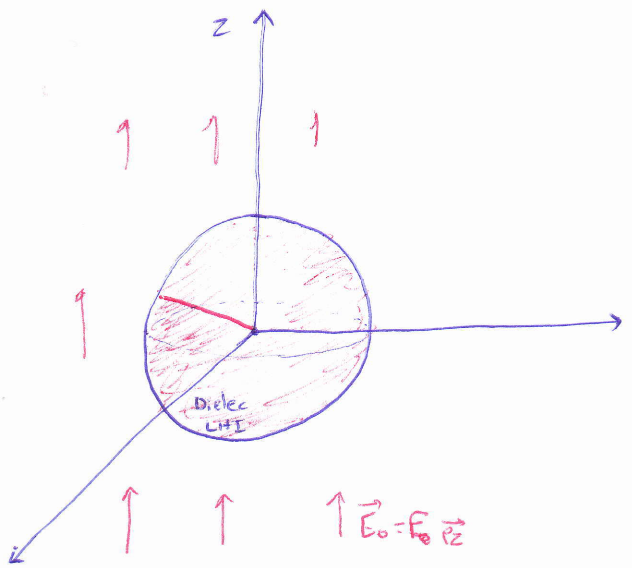
$$\vec{P}_{(z=d)} = \frac{\alpha d}{1+\alpha d} \sigma_{lib} \, \vec{e_z}$$

$$\sigma_{Pol}\Big|_{B'} = \vec{P}_{(z=d)} \cdot \vec{n} = P_{(z=d)} \vec{e_z} \cdot e_z = +P_{(z=d)}$$

$$\boxed{\sigma_{Pol}\Big|_{B'} = \frac{\alpha d}{1+\alpha d} \sigma_{lib}}$$

Exercice II

Dielectrique LHI Sphérique placé dans un champ uniforme $\vec{E_0} = E_0 \vec{e_z}$



On a un dielectrique LHI place dans un champ $\vec{E_0} = E_0 \vec{e_z}$ (uniforme)

$\Rightarrow$ la polarisation $\vec{P}$ est uniforme

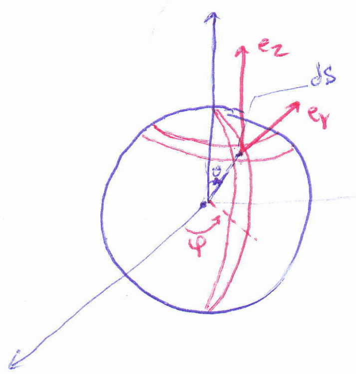
$$\boxed{\vec{P} = P \vec{e_z}}$$

1°/ Densités de charge de polarisation

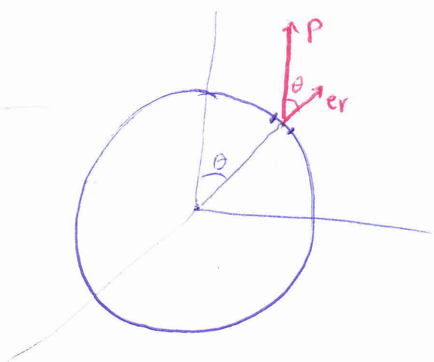
- En volume :

$\rho_{Pol} = -\operatorname{div} \vec{P} = 0 \qquad$ car $\vec{P}$ est uniforme

- En surface :



$\sigma_{lib} = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \vec{e_z} \cdot \vec{e_r}$



Donc $\sigma_{Pol} = P \cos\theta$

→ le signe de σ_{Pol} depend de θ

- Sur la demi sphere superieur

  θ varie entre $0, \frac{\pi}{2}$ $\quad \cos\theta > 0$

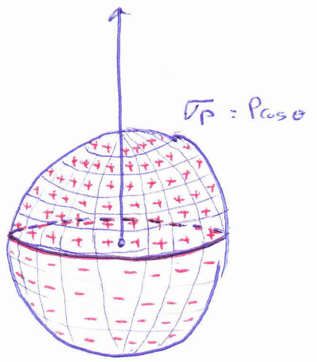
  $$\sigma_{Pol} > 0$$

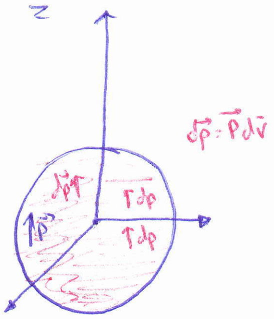
- Sur la demi sphère inferieur

  θ varie entre $\frac{\pi}{2}$, et π $\quad \cos\theta < 0$

  $$\sigma_{Pol} < 0$$

Representation :





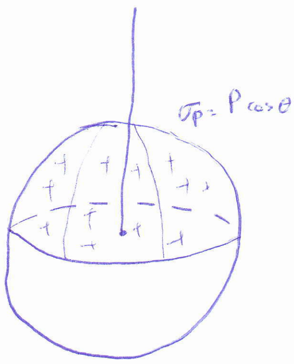
Dielectrique polarisé $\vec{P}$

(plein de dipole)

$\vec{P} = \frac{\vec{dp}}{dV}$ $\quad \vec{dp} \parallel \vec{P}$

Fig (a)

$\Longleftrightarrow$

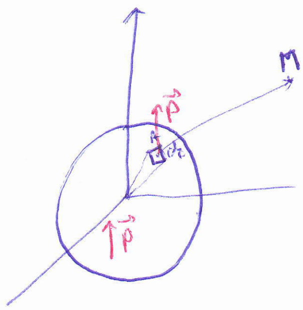


Sphère chargé dans le vide avec une densité $\sigma_p = P\cos\theta$

Fig (b)

Fig (a) $\equiv$ Fig (b)

2°/ a/ En considère la Fig (a)



Soit un petit element de volum $d\tau(A)$ centre sur $\vec{A}$

il contient le moment dipolaire

$$d\vec{p}_{(A)} = \vec{P}\, d\tau$$

et cree en M le potentiel elementaire

$$dV_{Pol}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot \vec{AM}}{AM^3}$$

b/ $$V_{Pol}(M) = \iiint dV = \vec{P} \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\text{volume sphère}} \frac{d\tau\, \vec{AM}}{AM^3}}$$

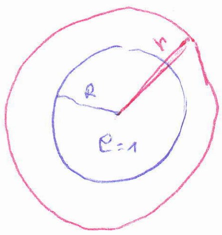
$$= \vec{P} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\text{sphère}} \overset{1}{\rho}\, d\tau \frac{\vec{AM}}{AM^3}$$

$$= \vec{P} \cdot \vec{E}_{\text{Fictif}}$$

$\vec{E}_F = \vec{E}_{\text{Fictif}}$ = champ Fiction

champ du sphère chargée volumiquement ρ ave $\rho = 1$

champ facile a calculer Th de Gu



Symétrie spherique $\vec{E}_F = E_F(r)\, \vec{e_r}$

choix de la S. G sphere de rayon r

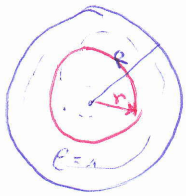
Si M a l'exterieur $r > R$

$$E_F \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4\pi R^3}{3}}{\varepsilon_0}$$

$$E_F = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \quad \text{avec } \rho = 1$$

$$\boxed{(\vec{E}_F)_{exter} = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{e_r}}$$

Si M à l'interieur $r < R$



$$E_F \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4\pi}{3} r^3}{\varepsilon_0}$$

$$E_F = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \qquad \rho = 1$$

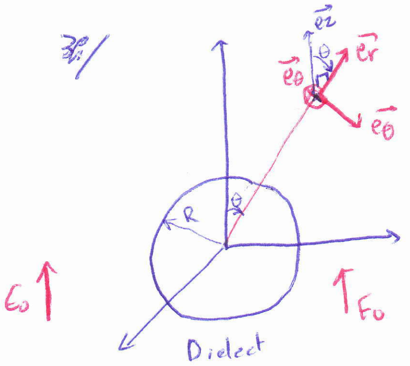
$$\Rightarrow \quad E_F = \frac{r}{3\varepsilon_0}$$

$$\boxed{(\vec{E}_F)_{inter} = \frac{r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r}}$$

2°/ $V_{Pol}(M) = \vec{P} \cdot E_F$ avec $E_F \begin{cases} \text{A l'interieur } r<R & \vec{E}_F = \frac{r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r} \\ \text{A l'exterieur } r>R & \vec{E}_F = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r} \end{cases}$

3°/ Calcule de $V_{Pol}(M)$

3°/



$\vec{P} = P\vec{e_z}$

a_ A l'interieur du dielectrique : $r = OM < R$

$$V_{Pol}(M)_{int} = \vec{P} \cdot \vec{E}_F(M)_{int}$$

$$= P\vec{e_z} \cdot \frac{r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r} = \frac{Pr}{3\varepsilon_0}\underbrace{\vec{e_z}\cdot\vec{e_r}}_{\cos\theta}$$

$$\boxed{V_{Pol}(M)_{int} = \frac{Pr}{3\varepsilon_0}\cos\theta}$$

et $E_{Pol}(M)_{int} = ?$ on utilise $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$

$$E_{Pol}(M)_{int} = -\text{grad}\, V_{Pol}(M)_{int}$$

$$\vec{E}_{Pol} \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-P\cos\theta}{3\varepsilon_0} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{P\sin\theta}{3\varepsilon_0} \\ E_\varphi = \frac{-1}{r}\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{E}_{Pol}(M)_{int} = \frac{-P\cos\theta}{3\varepsilon_0}\vec{e_r} + \frac{P\sin\theta}{3\varepsilon_0}e_\theta}$$

$$\vec{E}_{Pol}(M)_{int} = \frac{-P}{3\varepsilon_0}\underbrace{\left(\cos\theta\, e_r - \sin\theta\, e_\theta\right)}_{e_z}$$

$$\boxed{\vec{E}_{Pol}(M)_{int} = \frac{-P}{3\varepsilon_0}\vec{e_z} = \frac{-\vec{P}}{3\varepsilon_0}}$$

Remarque :

E_p est uniforme s'oppose à $\vec{P}$

aussi ne depend pas de R

(voir cavité sphérique).

b. A l'exterieur : $r = OM > R$

$$V_{Pol}(M)_{ext} = \vec{P} \cdot E_f)_{exteri}$$

$$= P\vec{e_z} \cdot \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$$

$$\boxed{V_{Pol}(M)_{exter} = \frac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^2}\cos\theta}$$

et $\vec{E}_{Pol}(M)_{ext} = \left|\begin{array}{l} E_r = \frac{-\partial V}{\partial r} = +\frac{2PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\cos\theta \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\sin\theta \\ E_\varphi = 0 \end{array}\right.$

$$\boxed{\vec{E}_{Pol}(M)_{ext} = \frac{2PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\cos\theta\,\vec{e_r} + \frac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\,\vec{e_\theta}}$$

4°/ En deduire $\vec{E}$ et $\vec{D}$ en tt pt de l'espace

A l'interieur : diélectrique LHI

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_0 + \vec{E}_{Pol}(M)_{int} = E_0\vec{e_z} + E_{Pol}(M)_{inter}$$

$$\vec{D}(M) = \varepsilon\vec{E}(M)$$

• **A l'exterieur :** vide

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_0 + E_{Pol}(M)_{ext} = E_0\vec{e_z} + \vec{E}_{Pol}(M)_{ext}$$

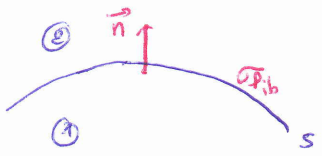
$$\vec{D}(M) = \varepsilon_0\vec{E}(M)$$

5/ Verifier les relation de passage entre les deux milieux ① dielec et ② vide

Rappel

- Continuité de la Composant tangencielle de $\vec{E}$

$$E_{T_1} = E_{T_2} \quad \text{toujour}$$



- Discontinuité de la Composante normale de $\vec{D}$

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{lib}}$$

* Si la surface de separation n'est pas chargée

$$\sigma_{lib} = 0$$

$\Rightarrow$ Continuité

$$\boxed{D_{1N} = D_{2N}}$$

Remarque

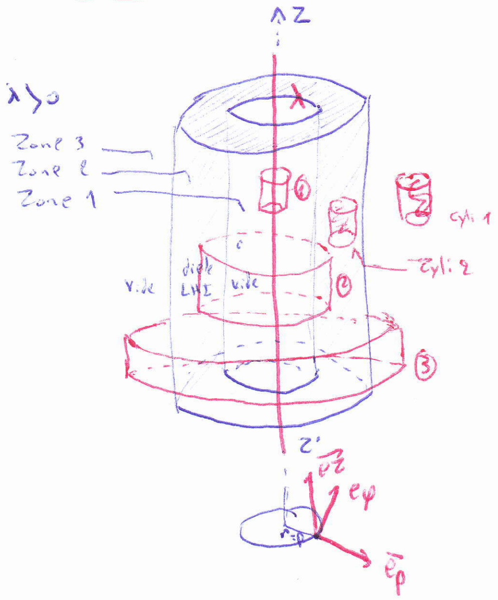
La surface de separation n'est pas chargée (Exercice 2)

$$\Rightarrow \quad E_\theta)_{int} = E_\theta)_{ext}$$

avec $\vec{E}_{int} = E_r \vec{e_z} + E_\theta \vec{e_\theta}$

$$D_r)_{int} = D_r)_{ext}$$

Exercice 3 :



Le système possede une symetrie cylindrique

$\rho = r$

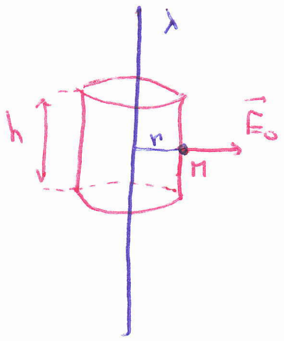
$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e_\rho}$$

$$\text{et} \quad \vec{D}(M) = D(r)\,\vec{e_\rho}$$

Donc par application de Th de Gauss

$\longrightarrow$ Surface de Gausse | cylindre de rayon r
de hauteur h
centré sur z'z

1°/ Le file infini chargée $\lambda > 0$ crée un champ $\vec{E_0}$ en tout point M de l'espace



Théorème De Gauss :

$$E(r)\, 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Donc $\boxed{\vec{E_0} = E(r)\vec{e_p} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e_p}}$

qui polarise de dielectrique. Avec $\boxed{\vec{P} = P(r)\,\vec{e_p}}$

2°/ On applique le Théorème de Gauss à D

$$\oiint_S \vec{D}\,d\vec{S} = \Sigma Q_{libre}$$

On distingue 3 zone

- Zone 1 (vide) $r < R_1$ Cylindre ① $\Rightarrow$ $D_1\, 2\pi r h = \lambda h$

$$D_1 = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$\boxed{\vec{D_1} = \frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e_p}}$$

$\vec{D_1} = \varepsilon_0 \vec{E_1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E_1} = \frac{D_1}{\varepsilon_0}\vec{e_r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e_p}}$

$\vec{E_1} = \vec{E_0} + \vec{E_{p_1}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E_{p_1}} = \vec{E_1} - \vec{E_0} = \vec{0}}$

- Zone 2 (diele LHI) $R_1 < r < R_2$ Cylindre 2 $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{D_2} = \frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e_p}}$

$D_2 = \varepsilon E_2$ $\Rightarrow$ $E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon}$

$$\boxed{\vec{E_2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\vec{e_p}}$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\vec{e_p}$$

$$\vec{E}_{p_2} = \vec{E}_2 - \vec{E}_0$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\vec{e_p}$$

$$\boxed{\vec{E}_{p_2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right)\vec{e_p}}$$

- Zone 3 (vide) Cylindre 3 $\boxed{D_3 = \frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e_p}}$

$r > R_2$

$$\vec{D}_3 = \varepsilon_0 \vec{E}_1 \Longrightarrow \vec{E}_3 = \frac{\vec{D}_3}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}_3 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e_p}}$$

$$\vec{E}_{p_3} = \vec{E}_3 - \vec{E}_0 = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{E}_{p_3} = \vec{0}}$$

3°/

$$\left.\begin{array}{l}\vec{D} = \varepsilon \vec{E}_2 \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2\end{array}\right\}$$ zone ② dielec LHI

$$\vec{P}_2 = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_2$$

$$= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_2$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \cdot \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\vec{e_p}$$

$$\vec{P} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e_p}$$

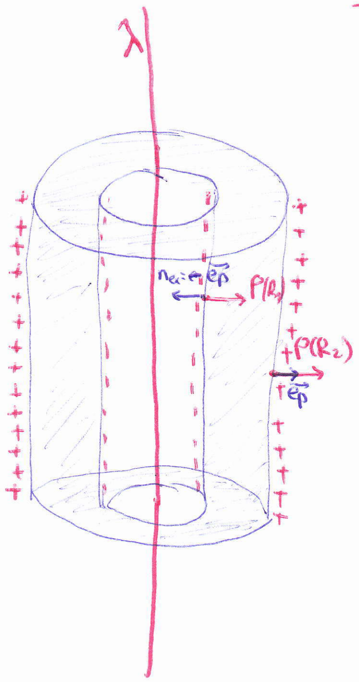
$$\boxed{\vec{P} = \frac{\lambda}{2\pi r}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\vec{e_p}}$$

$\vec{P} = P(r)\,\vec{e_p}$: Avec $P(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)$

6/ Densité de charge de polarisation

- **En surface** $\sigma_{Pol} = \vec{P} . \vec{n}_{exter}$

surface interne :



$$\vec{P}(r) = \vec{P}(R_1) = \frac{\lambda}{2\pi R_1}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\vec{e_p}$$

$$\vec{n} = \vec{e_p}$$

$$\sigma_{Pol_{ext}} = \vec{P}(R_1) . \vec{n}_{ex} = P(R_1)\, \vec{e_p} . (-\vec{e_p})$$

$$\sigma_{Pol_{ex}} = -P(R_1)$$

$$\boxed{\sigma_{Pol_{1}ext} = \frac{-\lambda}{2\pi R_1}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)} < 0$$

surface externe

$$\sigma_{Pol\, ext} = \vec{P}(R_2) . n_{ex}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi R_2}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\vec{e_p} . e_p$$

$$\boxed{\sigma_{Pol_{2}ext} = \frac{\lambda}{2\pi R_1}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)} > 0$$

- **En Volume :**

$$\rho_{Pol} = -\mathrm{div}\, \vec{P}$$

Expression de div en coord cylindrique $M(\rho = r, \varphi, z)$. $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$

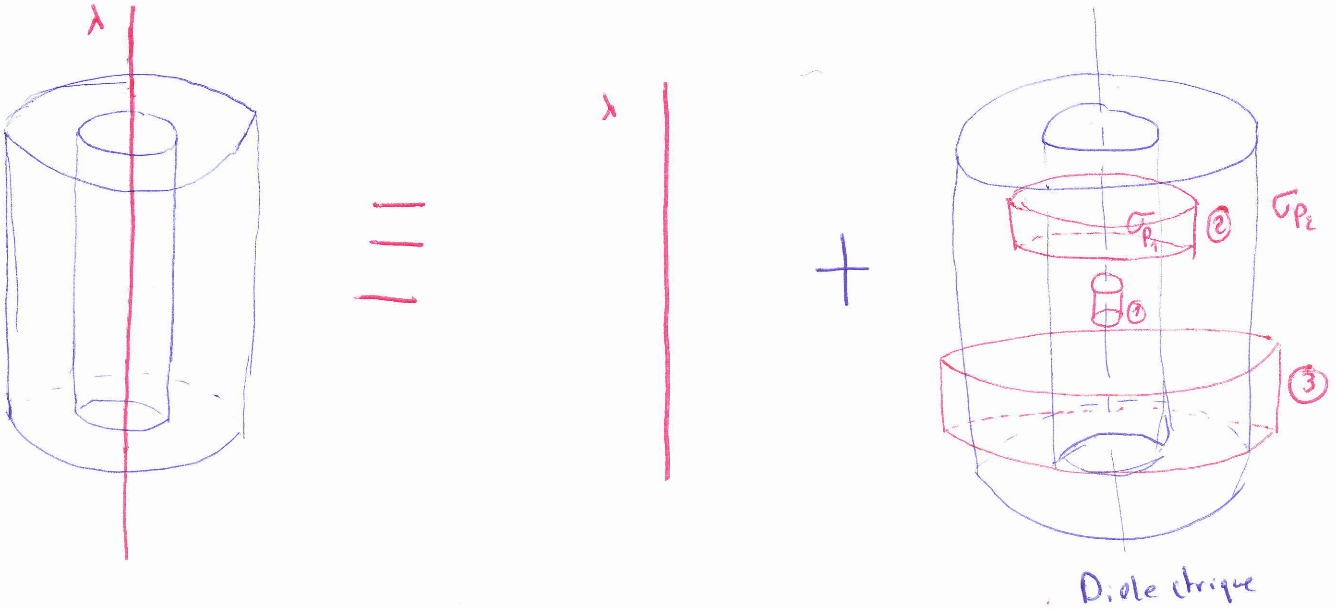
En general on a $\vec{A} \begin{vmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{vmatrix}$

$$\boxed{\mathrm{div}\, \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

$$\vec{P} \cdot \begin{vmatrix} P_r = P(r) \\ P_\varphi = 0 \\ P_z = 0 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r} \times \frac{\lambda}{2\pi \cancel{r}}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\right) = 0$$

$\boxed{\rho_{pol} = 0}$ => pas de charge En volume.



Dielectrique Polarisé => Distribution de charge dans le vide (chargée en surface σ_{p_1} et σ_{p_2})

Théorème De Gausse :

symétrie cylindrique

$\vec{E_p} = E_p(r)\,\vec{e_p}$

=> Surface de Gauss : cylindre de rayon r de hauteur h centré sur ZZ'

Zone 1 : $r < R_1$ => $\boxed{\vec{E}_{p_1} = \vec{0}}$

cylindre ①

Zone 2 $R_1 < r < R_2$

cylindre ②

$$E_{p_2}\, \cancel{2\pi} r \cancel{h} = \frac{\sigma_{p_1} \times \cancel{2\pi} R_1 \cancel{h}}{\varepsilon_0}$$

$$E_{p_2} = \frac{\sigma_{p_1} R_1}{\varepsilon_0 r} = \frac{-\lambda(\varepsilon_r - 1)}{2\pi \cancel{R_1}\, \varepsilon_r} \times \frac{\cancel{R_1}}{\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{E_{p_2} = \frac{\lambda(\varepsilon_r - 1)}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r}}$$

identique à celle trouvé avant

Zone 3 $r > R_2$

Cylindre 3

$$E_{p_3}\, \cancel{2\pi}\, \cancel{r} \cancel{h} = \frac{\sigma_{p_1} \cancel{2\pi} R_1 \cancel{h} + \sigma_{p_2} \times \cancel{2\pi} R_2 \cancel{h}}{\varepsilon_0}$$

$$E_{p_3} = \frac{\sigma_{p_1} R_1 + \sigma_{p_2} R_2}{\varepsilon_0 r}$$

5/ Rappel

Densité d'energie

$$\omega = \frac{dW}{d\tau} \qquad \frac{\text{Energie}}{\text{Unite de volum}}$$

Dans le vide on sait que $\boxed{\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2}$

En Présence d'un dielectrique

cette densité devient :

$$\boxed{\left.\frac{dW}{d\tau}\right)_{\text{Systeme}} = \frac{1}{2} \varepsilon |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \vec{D} \cdot \vec{E}}$$

Verification

Dans le vide $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2$$

Pour avoir l'energie de polarisation $\vec{P}$

=> on fait apparaitre $\vec{P}$

On a $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\vec{D} \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 + \vec{P} \cdot \vec{E}$$

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}$$

densité d'energie pour polarise Le dielectrique

$$\boxed{\frac{dW_p}{d\tau} = \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}}$$

densité d'energie nécessaire à La polarisation du dielectrique

Soit un petit element $d\tau(M)$ centré sur M à l'interieur du dielectrique

$$dW_{P(M)} = \frac{1}{2} \vec{P}_{(M)} \vec{E}_{(M)}^{\varepsilon_2} d\tau(M) \qquad d\tau = r dr d\varphi dz$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{2\pi r} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \vec{e_p} \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon r} \vec{e_p} \, r dr d\varphi dz$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2(\varepsilon_r - 1)}{4\pi^2 r^{\cancel{2}} \varepsilon_0 \varepsilon_r} \cancel{r} dr \, d\varphi \, dz$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2(\varepsilon_r - 1)}{4\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r^2} \frac{dr}{r} d\varphi dz$$

$$W_p = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon^2}\right) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^h dz}_{h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

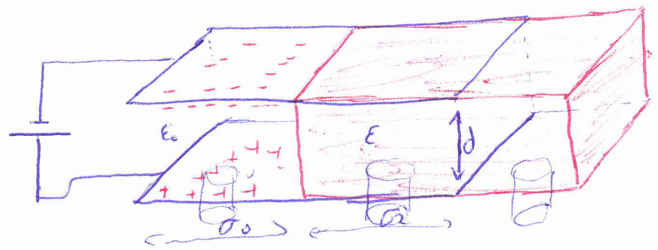
$$\boxed{W_p = \frac{\lambda^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{4\pi \varepsilon^2} h \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Energie par unité de longeur

Donc l'energie par unité de longeur

$$w_p = \boxed{\frac{W_p}{h} = \frac{\lambda^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{4\pi \varepsilon^2} \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Exercice 4 :



Partie (A)

1/ $\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$ sont uniforme et porté par $\vec{e_z}$

$$\vec{E_1} = E_{1z}\,\vec{e_z}$$
$$\vec{E_2} = E_{2z}\,\vec{e_z}$$

$$E_1 \left| \begin{array}{l} E_{1x} = 0 \\ E_{1y} = 0 \\ E_{1z} = E_{1z} \end{array} \right. \qquad E_2 \left| \begin{array}{l} E_{2x} = 0 \\ E_{2y} = 0 \\ E_{2z} = E_{2z} \end{array} \right.$$

Continuité de la composant tengenciel de E

$$E_{T_1} = E_{T_2}$$
$$E_{1z} = E_{2z} \implies \vec{E_1} = E_2$$

$$\vec{E_1} = -\vec{grad}\,V \longrightarrow E_{1z} = \frac{-\partial V}{\partial z} = -\frac{dV}{dz}$$

$$dV = -E_{1z}\,dz$$

$$\int_1^2 dV = -E_{1z}\int_0^d dz$$

$$V_2 - V_1 = -E_{1z}\,d$$

$$\underbrace{V_1 - V_2}_{V} = E_{1z}\,d \implies E_{1z} = \frac{V}{d}$$

Donc $\boxed{E_1 = E_2 = \frac{V}{d}}$

2/ a) region I vide $\qquad \vec{D_1} = \varepsilon_0 \vec{E_1} = \frac{\varepsilon_0 V}{d}\vec{e_z}$

region II diele LHI $\qquad \vec{D_2} = \varepsilon \vec{E_2} = \frac{\varepsilon V}{d}\vec{e_z}$

region III $\qquad \vec{D_3} = \vec{0}$

b) On appliquon le théorème de Gausse à $\vec{D}$

$$\oiint D\,dS = \sum Q_{libre}$$

- Region I : Cylindre ①

$$D_1\,dS = \sigma_0\,dS$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_0 = D_1$$

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0 V}{d}}$$

- Region II : cylindre ②

$$D_2\,dS = \sigma_x\,dS$$

$$\sigma_x = D_2$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{\varepsilon V}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V}{d} = \varepsilon_r \sigma_0}$$

3°/ Determination de $\vec{P}$ et densité de charge (σ_p et ρ_p) de polarisation

- Region III cylindre ③

Dans la region III $\begin{cases} \vec{P} = \vec{0} \\ \sigma_p = 0 \\ \rho_p = 0 \end{cases}$

4°/ a)

$$Q = \sigma_0 S_0 + \sigma_x S_x$$

$$= \sigma_0 (L - x)\ell + x\ell\sigma_x$$

$$\boxed{Q = \frac{\varepsilon_0 V}{d}(L - x)\ell + \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V}{d} x\ell}$$

b)

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0}{d}(L - x)\ell + \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{d} x\ell}$$

5/ $\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\vec{D}.\vec{E}$

$$= \frac{1}{2}\vec{D_1}\vec{E_1} + \frac{1}{2}\vec{D_2}\vec{E_2}$$

$$dW = \frac{1}{2}\vec{D_1}\vec{E_1}\,d\tau_1 + \frac{1}{2}\vec{D_2}\vec{E_2}\,d\tau_2$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2 d\tau_1 + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 d\tau_2$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2 \iiint_{\substack{\text{volume}\\ I}} d\tau_1 + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 \iiint_{\substack{\text{volume}\\ II}} d\tau_2$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2\cdot(L-x)\ell d + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 x\ell d$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{V^2}{d}\left[(L-x)\ell + \varepsilon_r x\ell\right]$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\varepsilon_0(L-x)\ell}{d} + \frac{\varepsilon x\ell}{d}\right)}_{C}V^2 = \frac{1}{2}CV^2$$

On remarque L'energie du Condensateur. $\boxed{W = \frac{1}{2}CV^2}$

6/

On a :

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \ell V^2}{d}\left((L-x) + \varepsilon_r x\right)$$

$$\vec{F} = +\overrightarrow{grad}\,W$$

$$F_x = +\frac{\partial W}{\partial x} = +\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \ell V^2}{d}(\varepsilon_r - 1)$$

$$\vec{F} = F_x\,\vec{e_x} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \ell V^2}{d}(\varepsilon_r - 1)\,\vec{e_x}$$

$\vec{F}$ attire le dielectrique vers les $x>0$

7/ $x = L$

- $C = \dfrac{xL\ell}{d}$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S'}{d}}$$

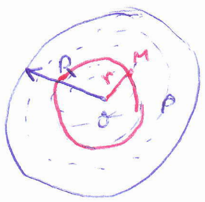
$$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}V^2}$$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{grad}\, W = \vec{0}}$$

Partie B :

Introduction :

Soit une sphère de centre O et de rayon R chargé uniformément ρ



Calculer ~~$E_\rho(M)$~~ $E_\rho(M)$ à l'interieur

Symétrie sphérique $\vec{E}_\rho = E_\rho(r)\,\vec{e_r}$

Théo de Gausse : S.G : sphère de rayon $r = OM$

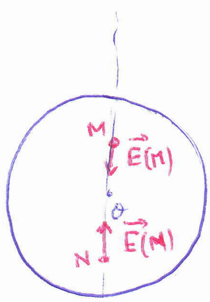
$$E_\rho(r)\,4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_\rho(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{OM}$$

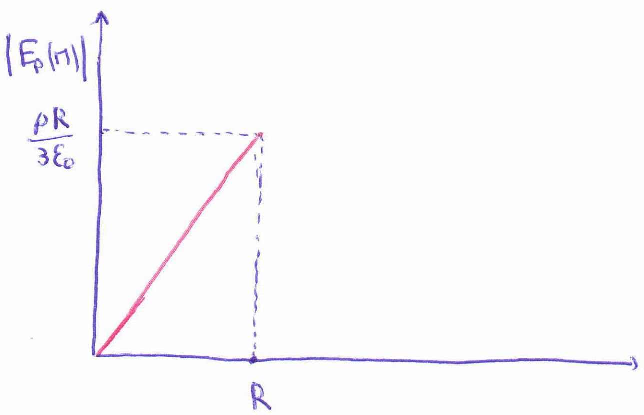
si ρ est positif $\rho > 0$ ⟶ $\vec{E}(M)$ diriger de $O \longrightarrow M \Rightarrow \vec{OM}$

" " " negatif $\rho < 0$ ⟶ $E(M)$ diriger de $M \longrightarrow O \Rightarrow -\vec{OM}$

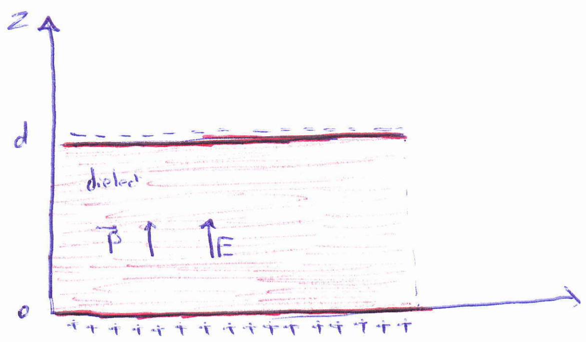
$\rho < 0$



Le module



Partie B :



$\vec{P} = P\vec{e_z}$ uniforme

$\vec{E} = E\vec{e_z}$ uniforme

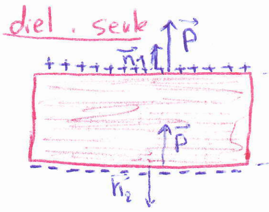
dielectrique : est un gaz { constitué d'atomes monoatomique (même type d'atome)
ou
" molécule : → même molecul (exemple O_2)

non polaire :

Pas de dipôle intrinseque, barycentre des charge ⊕ (noyau) confondu avec celui ⊖ (electron)

1°/ Dielectrique LHI

- $P = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$
- Densité de charge de polarisation
  - * En volume : $\rho_{Pol} = -\text{div} P = 0$ car P est uniforme
  - * En surface $\sigma_{Pol} = \vec{P}.\vec{n}_{ex}$



$\sigma_{P_1} = \vec{P}.\vec{n}_1 = P$

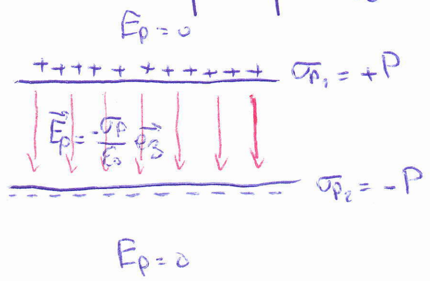
$\sigma_{P_2} = \vec{P}.\vec{n}_2 = -P$

$\sigma_{P_1} = +P = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$

$\sigma_{P_2} = -P = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = -\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$

2°/

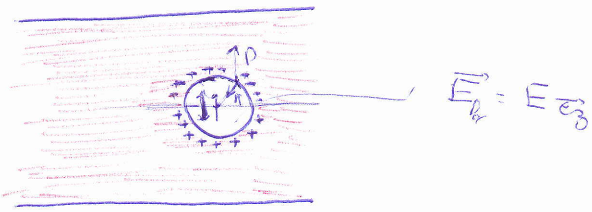
Le dielectrique polarisé P est equivalent à un condensateur de charges dans le vide



$\vec{E_p} = -\frac{P}{\varepsilon_0}\vec{e_z}$

$$\boxed{\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E}{\varepsilon_0} = -(\varepsilon_r - 1)\vec{E}}$$

3°/



On creuse une cavité sphérique de rayon R très petit avec $R \simeq$ Rayon de l'atome.

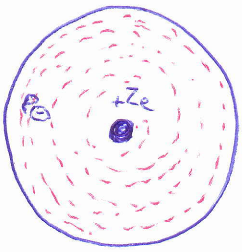
~~Avant de etudier~~

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{E}_p = \vec{E} + \vec{E}_p = \vec{E} + \dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \\ \text{champ à l'interieur de la cavité}\end{array}}$$

Relation de LORENTZ

4°/ L'atome etudier

On assimile
- le noyau a une charge penctuel $+Ze$
- les electrone à un nuage electronique $\equiv$ sphère chargé uniformement ρ
  centre O
  rayon R



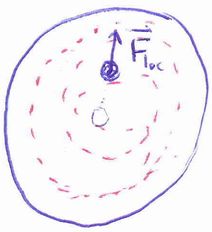
$$\rho_\ominus = \frac{-Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{-3Ze}{4\pi R^3}$$

Le nuage etant fixe (indéformable)

Sous l'action du champ E_{loc} l'atome subit le champ E_{loc}

Le noyau : la charge $+Ze$ sera semise à une force $\vec{F}_{ocal}$ $Ze.\vec{E}_{loc} = F_{loc}$

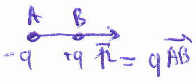
qui le deplace vers le haut



$\Rightarrow$ Décalage entre $+Ze$ et $-Ze$

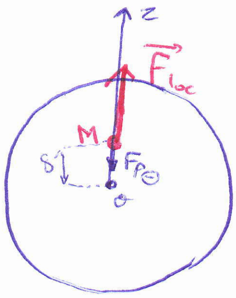
$\Rightarrow$ Creation d'un dipôle de moment dipolaire :

$\cancel{\vec{P} = \frac{Z\delta}{\varepsilon_0}\vec{e_z}}$ $\vec{P} = Ze\,\delta\,\vec{e_z}$

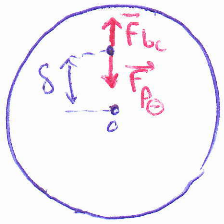


5°/ Dès qu'il y'a decalage, La charge $+Ze$ est soumise à deux force

$$\begin{cases}\vec F_{loc} = +Ze\,\vec E_{loc}\\ \vec F_{p_\ominus} = Ze\,\vec E_{p_\ominus}(M)\end{cases}$$



À L'equilibre



$$F_{loc} + F_{p_\ominus} = 0$$

$$Ze\,E_{loc} + Ze\,E_{p_\ominus} = 0 \Rightarrow \vec E_{loc} = -\vec E_{p_\ominus}$$

$$\Rightarrow \vec E_{p_\ominus}(M) = \frac{\rho_\ominus \vec{OM}}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho_\ominus \delta\, \vec{e_z}}{3\varepsilon_0}$$

avec $\rho_\ominus = \dfrac{-3Ze}{4\pi R^3}$

$$\vec E_{p_\ominus} = \frac{-\cancel{3}Ze}{4\pi R^3} \times \frac{\delta}{\cancel{3}\varepsilon_0}\vec{e_z} = -\frac{Ze\delta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{e_z}$$

A L'equilibre

$$|\vec E_{loc}| = |\vec E_{p_\ominus}| = \frac{Ze\delta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Donc $\boxed{\delta = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R^3 E_{loc}}{Ze}}$ a

$$\vec p = Ze\,\vec{OM} = Ze\,\delta\,\vec{e_z} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_{loc}\,\vec{e_z}$$

c $\boxed{\vec p = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec E_{loc}}$

$$= \alpha_{\substack{e\\i\\0}} \vec E_{loc}$$

e : electronique
i : ionique
0 : orientation

$\Rightarrow$ b $\boxed{\alpha_e = 4\pi\varepsilon_0 R^3}$

6°/ Relation De CLAUSIUS-Mossotti

$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \varepsilon_0\\ \varepsilon_r\end{matrix}\right\}$ et n

chaque atome crée un dipole $\vec p$

si on a n atome/unité de volume $\Rightarrow$ on aura $n\vec p$ dipole/unité de volume

Donc la polarisation $\vec{P}$

$$\boxed{\vec{P} = n\vec{p}} \boxed{= n\alpha \vec{E}_{loc}} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\frac{\vec{P}}{n\alpha} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{P}\left(\frac{1}{n\alpha} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\right) = \vec{E}$$

$$\vec{P}\left(\frac{3\varepsilon_0 - n\alpha}{3\varepsilon_0 n\alpha}\right) = \vec{E}$$

$$\vec{P} = \frac{3\varepsilon_0 n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}\vec{E}$$

Dielectrique LHI

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

$$\cancel{\varepsilon_0}(\varepsilon_r - 1)\cancel{E} = \frac{3\cancel{\varepsilon_0} n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}\cancel{E}$$

$$\Rightarrow (\varepsilon_r - 1) = \frac{3n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}$$

$$(\varepsilon_r - 1)(3\varepsilon_0 - n\alpha) = 3n\alpha$$

$$3\varepsilon_0\varepsilon_r - \varepsilon_r n\alpha - 3\varepsilon_0 + n\alpha = 3n\alpha$$

$$3\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) = n\alpha(\varepsilon_r + 2)$$

Relation de Clausius Mossotti

$$\boxed{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}}$$

7°/

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{n 4\pi\cancel{\varepsilon_0} R^3}{3\cancel{\varepsilon_0}}$$

Donc la polarisation $\vec{P}$

$$\boxed{\vec{P} = n\vec{p}}\boxed{= n\alpha\vec{E}_{loc}}$$

avec $\vec{E}_{loc} = \vec{E} + \dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$

$$\frac{\vec{P}}{n\alpha} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{P}\left(\frac{1}{n\alpha} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\right) = \vec{E}$$

$$\vec{P}\left(\frac{3\varepsilon_0 - n\alpha}{3\varepsilon_0 n\alpha}\right) = \vec{E}$$

$$\vec{P} = \frac{3\varepsilon_0 n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}\vec{E}$$

Dielectrique LHI

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

$$\cancel{\varepsilon_0}(\varepsilon_r - 1)\cancel{E} = \frac{3\cancel{\varepsilon_0} n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}\cancel{E}$$

$$\Rightarrow (\varepsilon_r - 1) = \frac{3n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}$$

$$(\varepsilon_r - 1)(3\varepsilon_0 - n\alpha) = 3n\alpha$$

$$3\varepsilon_0\varepsilon_r - \varepsilon_r n\alpha - 3\varepsilon_0 + n\alpha = 3n\alpha$$

$$3\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) = n\alpha(\varepsilon_r + 2)$$

Relation de Clausius Mossotti

$$\boxed{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}}$$

7°/

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{n\,4\pi\varepsilon_0 R^3}{3\varepsilon_0}$$

Ex 2 Vérification des relations de passage entre 2 milieux.

* A l'intérieur $r = OM < R$:

$$\vec{E}_{pol}(M) = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\underbrace{(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta})}_{\vec{e_z}} = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\vec{e_z} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(M) = \vec{E_0} + \vec{E}_{pol}(M) = E_0\vec{e_z} + \vec{E}_{pol}(M).$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(M)\Big)_{in} &= \left(E_0 - \frac{P}{3\varepsilon_0}\right)\cos\theta\,\vec{e_r} + \left(\frac{P}{3\varepsilon_0} - E_0\right)\sin\theta\,\vec{e_\theta} \\ &= (E_r)_{in}\,\vec{e_r} + (E_\theta)_{in}\,\vec{e_\theta}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{D}(M) = \varepsilon\vec{E}(M) &= \varepsilon\left(E_0 - \frac{P}{3\varepsilon_0}\right)\cos\theta\,\vec{e_r} + \varepsilon\left(\frac{P}{3\varepsilon_0} - E_0\right)\sin\theta\,\vec{e_\theta} \\ &= (D_r)_{in}\,\vec{e_r} + (D_\theta)_{in}\,\vec{e_\theta}\end{aligned}}$$

* A l'extérieur $r = OM > R$.

$$\vec{E}_{pol}(M) = \frac{2PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\cos\theta\,\vec{e_r} + \frac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$\vec{E}(M)\Big)_{ex} = \vec{E_0} + \vec{E}_{pol}(M) = E_0\vec{e_z} + \vec{E}_{pol}(M)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(M)\Big)_{ex} &= \left(E_0 + \frac{2PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\right)\cos\theta\,\vec{e_r} + \left(\frac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^3} - E_0\right)\sin\theta\,\vec{e_\theta} \\ &= (E_r)_{ex}\,\vec{e_r} + (E_\theta)_{ex}\,\vec{e_\theta}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{D}(M) = \varepsilon_0\vec{E}(M) &= \varepsilon_0\left(E_0 + \frac{2PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\right)\cos\theta\,\vec{e_r} + \varepsilon_0\left(\frac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^3} - E_0\right)\sin\theta\,\vec{e_\theta} \\ \vec{D}(M)\Big)_{ex} &= (D_r)_{ex}\,\vec{e_r} + (D_\theta)_{ex}\,\vec{e_\theta}\end{aligned}}$$

Vérification des relations de passage :

a/ Continuité de la Composante tangentielle de $\vec{E}$

$$\Big[(E_\theta)_{in} = (E_\theta)_{ex}\Big]_{r=R} \Rightarrow \left(\frac{P}{3\varepsilon_0} - E_0\right)\sin\theta = \left(\frac{PR^3}{3\varepsilon_0 R^3} - E_0\right)\sin\theta \quad \text{Vérifiée}$$

b/ Continuité de la Composante Normale de $\vec{D}$ car la surface de séparation ne contient pas de charges libres ($\sigma_{lib} = 0$).

$$\Big[(D_r)_{in} = (D_r)_{ex}\Big]_{r=R} \longrightarrow \varepsilon\left(E_0 - \frac{P}{3\varepsilon_0}\right)\cancel{\cos\theta} \overset{?}{=} \varepsilon_0\left(E_0 + \frac{2PR^3}{3\varepsilon_0 R^3}\right)\cancel{\cos\theta}$$

$$\longrightarrow \varepsilon\left(E_0 - \frac{P}{3\varepsilon_0}\right) = \varepsilon_0\left(E_0 + \frac{2P}{3\varepsilon_0}\right) \longrightarrow \text{il faut chercher une relation entre } \vec{E_0} \text{ et } \vec{P}$$

on a $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\left(\vec{E_0} - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right) \Rightarrow \vec{P}\left(1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon_0}\right) = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E_0} \Rightarrow \vec{P}\left(\frac{2\varepsilon_0 + \varepsilon}{3\varepsilon_0}\right) = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E_0} = \frac{2\varepsilon_0 + \varepsilon}{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}\vec{P}} \qquad \underline{\text{Donc}} \quad \varepsilon\left(\frac{2\varepsilon_0 + \varepsilon}{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\right)\cancel{P} = \varepsilon_0\left(\frac{2\varepsilon_0 + \varepsilon}{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)} + \frac{2}{3\varepsilon_0}\right)\cancel{P}$$

$$\varepsilon\big(2\varepsilon_0 + \varepsilon - (\varepsilon - \varepsilon_0)\big) = \varepsilon_0\big(2\varepsilon_0 + \varepsilon + 2(\varepsilon - \varepsilon_0)\big)$$

$$\varepsilon\big(2\varepsilon_0 + \cancel{\varepsilon} - \cancel{\varepsilon} + \varepsilon_0\big) = \varepsilon_0\big(\cancel{2\varepsilon_0} + \varepsilon + 2\varepsilon - \cancel{2\varepsilon_0}\big)$$

$$3\varepsilon_0\varepsilon = 3\varepsilon_0\varepsilon \qquad \text{Vérifiée}$$

Mr Chaib

Elec 3. TD. N°1

Ex 4 : Partie B

6°) Etablir la relation de CLAUSIUS_MOSSOTI liant les grandeurs α, ε_0, ε_r et n.

n nb d'atomes / unité de volume ou nb de Molécules / unité de Volume.

On a vu que chaque atome crée un dipôle $\vec{p} = \alpha \vec{E}_{loc}$ avec $\boxed{\alpha = 4\pi\varepsilon_0 R^3}$

Si on a n atomes ou molécules / unité de volume $\longrightarrow$ on aura $n\vec{p}$ dipôls / unité de volume

Donc la Polarisation $\boxed{\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha \vec{E}_{loc}}$ ①

Avec $\vec{E}_{loc} = \vec{E} + \dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$

① $\Rightarrow$ Avec $\vec{E}_{loc} = \dfrac{\vec{P}}{n\alpha} \Rightarrow \dfrac{\vec{P}}{n\alpha} = \vec{E} + \dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$

$\vec{P}\left(\dfrac{1}{n\alpha} - \dfrac{1}{3\varepsilon_0}\right) = \vec{E}$

$\rightarrow \vec{P}\left(\dfrac{3\varepsilon_0 - n\alpha}{3\varepsilon_0 n\alpha}\right) = \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \dfrac{3\varepsilon_0 n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}\vec{E}$

or on diel (lhi) $\Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} \Rightarrow \cancel{\varepsilon_0}(\varepsilon_r - 1)\cancel{\vec{E}} = \dfrac{3\cancel{\varepsilon_0} n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha}\cancel{\vec{E}}$

$\rightarrow (\varepsilon_r - 1) = \dfrac{3n\alpha}{3\varepsilon_0 - n\alpha} \Rightarrow (\varepsilon_r - 1)(3\varepsilon_0 - n\alpha) = 3n\alpha \Rightarrow 3\varepsilon_0\varepsilon_r - n\alpha\varepsilon_r - 3\varepsilon_0 + n\alpha = 3n\alpha$

$3\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) = n\alpha(\varepsilon_r + 2)$.

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \dfrac{n\alpha}{3\varepsilon_0}}$ Relation de CLAUSIUS MOSSOTTI.

Avec $\alpha = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \longrightarrow \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = n \cdot \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_3}{3\varepsilon_0} = n \cdot \dfrac{4\pi R^3}{3}$

7°) Calculer le rayon R de l'atome :

on a : $\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \dfrac{4\pi n R^3}{3} \Rightarrow \boxed{R^3 = \dfrac{3(\varepsilon_r - 1)}{4\pi n \cdot (\varepsilon_r + 2)}}$ ε_r : connu, n : inconnu

Donc il faut calculer n : sachant que : La masse Molaire est : $M = 28g$; La masse volumique $\rho_v = 1300 g/m$

La Masse molaire M est la masse de $\mathcal{N}$ atomes ou molecule) $\mathcal{N}$: nb d'Avogadro $\mathcal{N} = 6{,}023 \times 10^{23}$

$\mathcal{N}$. atomes $\longrightarrow M(g) \longrightarrow 1g \longrightarrow \dfrac{\mathcal{N} \text{ atoms}}{M}$

ds l'unité de volume on a $\rho_v(g) \longrightarrow n = \dfrac{\rho_v \cdot \mathcal{N}}{M}$ atoms / unité de volume. $\Rightarrow n = 28 \times 10^{24}$ atoms/m^3.

$\Rightarrow R \simeq 1{,}2 \times 10^{-10}\,m = 1{,}2\,Å$ //