Université Cadi Ayyad
Faculté des sciences semlalia
Département de physique
Marrakech.

Année Universitaire: 2013-2014

TD N°2 : ELECTRICITE 3
SMP S3

Exercice I:

A- On considère un solénoïde infini de rayon R, comportant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I. Le champ magnétique de ce solénoïde est $\vec{B}_e = \mu_0 nI\, \vec{e}_z$ (ou $\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire de l'axe du solénoïde). On remplit le solénoïde d'un matériau paramagnétique (LHI) de susceptibilité χ_m.

1- Quelles sont les propriétés de l'aimantation $\vec{M}$ qui apparait dans le matériau magnétique ?

2- Déterminer les densités de courants d'aimantation volumique $\vec{j}_{av}$ et surfacique $\vec{j}_{as}$. En déduire l'équivalent du système constitué uniquement par la matière aimanté.

3- Déterminer alors les expressions du champ d'aimantation $\vec{B}_m$ créé par l'aimantation $\vec{M}$ et du champ magnétique total dans la matière $\vec{B}$. Ecrire $\vec{B}$ en fonction de $\vec{B}_e$ et χ_m.

4- Quel est l'intérêt d'utiliser un matériau paramagnétique dans le solénoïde ?

5- Donner l'expression de $\vec{M}$ en fonction uniquement de $\vec{B}_e$, μ_0 et χ_m. Que devient $\vec{M}$ si $\vec{B}_e$ tend vers zéro.

B - Un barreau cylindrique constitué de matière aimanté, de rayon R et assez long pour négliger tout effet de bord, est aimanté dont le vecteur aimantation $\vec{M}$ est $\vec{M} = M\,\vec{e}_\theta$ où M est une constante et $\vec{e}_\theta$ le vecteur unitaire de coordonnées cylindriques.

1- Donner les expressions des densités de courants d'aimantation $\vec{j}_{av}$ et surfacique $\vec{j}_{as}$ en fonction de M et indiquer sur une figure $\vec{j}_{av}$, $\vec{j}_{as}$ et $\vec{M}$.

2- Déterminer alors l'expression du champ magnétique $\vec{B}_m$ créé par l'aimantation $\vec{M}$ en tout point de l'espace.

C- Le matériau est maintenant un milieu paramagnétique LHI de susceptibilité χ_m. On lui applique un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B}_e = B_e \vec{e}_x$.

1- Que peut-on dire de l'aimantation $\vec{M}$ du matériau ?

2- Donner en fonction de M les expressions des courants d'aimantation.

3- Pourquoi ne peut-on plus calculer le champ magnétique $\vec{B}_m$ aussi simple que dans la question B ?.

Pour déterminer $\vec{B}_m$ on procède comme suit :

4- Justifier la recherche d'un potentiel vecteur colinéaire à l'axe du barreau $\vec{A}(M) = A(r,\theta,z)\vec{e}_z$.

5- Montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par ce potentiel vecteur est donnée par : $r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial A}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 0$

6- On supposera que $A(r,\theta,z)$ se met sous la forme $k_n r^n \sin\theta$ (k_n une constante et $n \in Z$). Résoudre cette équation (on cherchera k_n et n) et déterminer le champ d'aimantation et l'excitation en tout point.

Exercice II:

Une sphère de matière linéaire homogène et isotrope LHI de centre O et de rayon R, placée dans le vide, est uniformément aimantée avec le vecteur aimantation $\vec{M} = M\vec{e}_z$.

1-a- Déterminer la distribution de courants équivalente à cette sphère.

b- Calculer le champ d'aimantation $\vec{B}_m$ au centre O de la sphère.

2- a- Exprimer le potentiel vecteur crée par une telle sphère sous la forme $\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M} \wedge \vec{I}(P)$ où on exprimera $\vec{I}(P)$ sous forme intégrale.

b- calculer cette intégrale par analogie électrostatique.

c- en déduire l'expression du champ magnétique d'aimantation en tout point de l'espace.

3- La sphère possède maintenant une cavité sphérique concentrique de rayon R_o.

a- Déterminer en tout point de l'espace le champ magnétique d'aimantation.

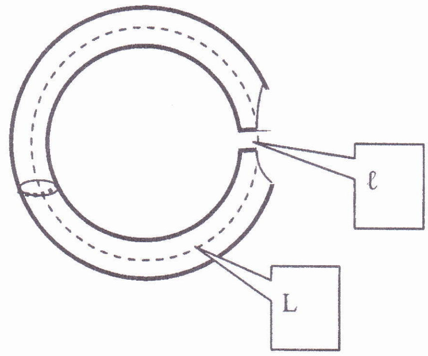
b- Que devient ce champ dans la cavité lorsque le centre de celle-ci ne coïncide plus avec le centre de la surface externe.

Exercice III : Aimant permanent

On cherche à réaliser un aimant permanent au moyen d'une substance ferromagnétique pour laquelle la courbe de désaimantation (partie supérieure du cycle d'hystérésis) est donnée par la relation : $B = \alpha\frac{H+\beta}{H+\gamma}$ où α, β, γ sont positives avec $\beta<\gamma$.

1- relier les constantes où α, β, γ à l'aimantation rémanente Mr et à l'excitation coercitive Hc.

On réalise au moyen de ce matériau un aimant torique selon la géométrie ci-dessous :



On appelle S la section constante de l'aimant dans sa partie principale de longueur L. un entrefer est ménagé dans celui-ci, de longueur ℓ, de section faible s. on admet que le seul effet des sections tronconiques de l'aimant est de canaliser les lignes de champ parallèlement au cercle moyen de longueur L+ ℓ. On appelle B et H les valeurs des champs dans le matériau ferromagnétique et b la valeur du champ dans l'entrefer.

2- exprimer le rapport des volumes $\frac{V}{v} = \frac{SL}{s\ell}$ de l'aimant et de l'entrefer en fonction de B, H, b.

Donner les signes de B et H si b>0.

3- pour un volume de l'entrefer v donné et un champ b donné déterminer la solution unique de l'équation que doit satisfaire H pour que la masse de l'aimant soit minimale. Donner le rapport H/B dans cette configuration en fonction de α, et γ.

Electricité 3 : TD 2

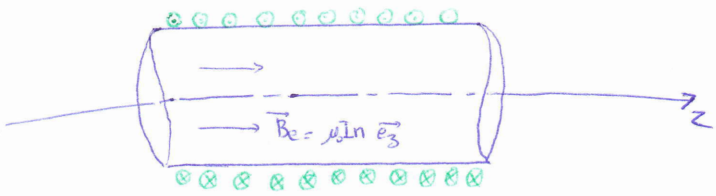
M= dm

Milieux aimantés

Exercice I :

Solénoïde infinie :

$\vec{B_e} = \vec{0}$



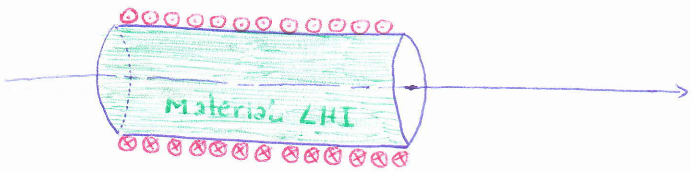
$\vec{B_e} = \vec{0}$

À l'interieur du solenoïde infinie on a un champ $\vec{B_e} = \mu_0 n I \ \vec{e_z}$ (uniforme)

quand on remplit le solénoïde par un ~~dielectrique~~ Materiau paramagnétique

Donc le matériau se trouve placer dans le champ $\vec{B}_{ex} = \vec{B}_e = \mu_0 n I \ \vec{e_z}$

Donc il va s'aimanter

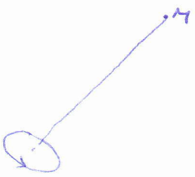


Donc il va acquerir l'aimantation $\vec{M}$

Rappel :

- Un milieu paramagnétique est un milieu constitué d'atomes (ou molecules) qui possedent des dipoles non nuls

- Un dipole est une boucle de courant de faible dimension devant le point où on calcule son effet.



Moment dipolaire

$\vec{m} = I\vec{S}$

À l'echelle atomique : chaque couche d'electrone est equivalant à un dipôle magnétique.

Rq :

Pour les milieux diamagnétique ($\chi_m < 0$)

Constitues d'atomes ne possedant pas dipôles magnétique

Milieux paramagnétique ($\chi_m > 0$)

placé dans un champ $\vec{B}_{ex} = \vec{B}_e = \mu_0 n I \, \vec{e_z}$

$\Longrightarrow$ Le dipôles pré existants (de chaque atomes) vont s'orienter

Donc $\boxed{\vec{M} = M \vec{e_z}}$

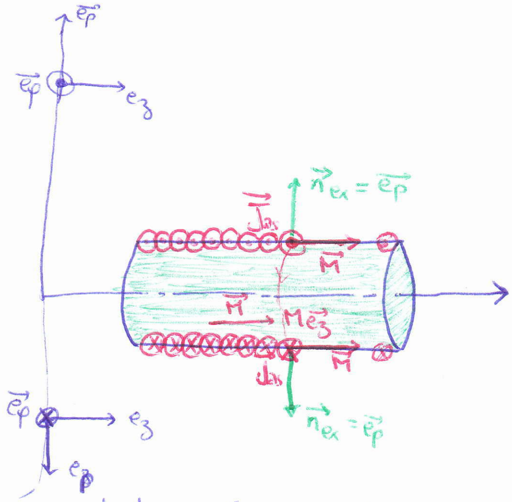
Milieux (LHI) placé dans $\vec{B}_e$ uniforme $\Big\} \Longrightarrow \vec{M}$ uniforme

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$
$\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\quad \chi_m > 0 \Longrightarrow \vec{B}, \vec{M}, \vec{H}$ sont parallel et de même sens.

2°/ Densité de courants d'aimentation :

- En Volume : $\boxed{\vec{J}_{av} = \vec{rot}\,\vec{M}}$

- En Surface : $\boxed{\vec{J}_{as} = \vec{M} \wedge \vec{n}_{ex}}$

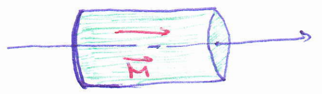


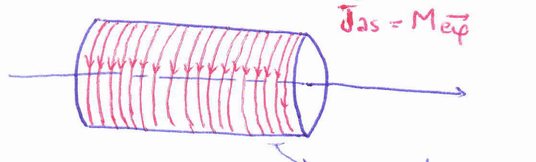
- $\vec{J}_{av} = \vec{0}$ car $\vec{M}$ est uniforme

- $\vec{J}_{as} = M \vec{e_z} \wedge \vec{e_\rho} = M \vec{e_\varphi}$ (cordonnées cylindrique $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$)

Donc

La matière seule aimentée $\vec{M}$ $\equiv$ distribution de courants surfacique de densité $\vec{J}_{as}$ dans le vide





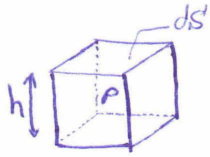
Rappel

Densité Volumique (de courant) $\vec{J}_v$
et
Densité surfacique $\vec{J}_s$

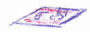
Analogie avec

Densité de charge volumique ρ
et
Densité de charge surfacique σ

densité volumique de charge (ρ)

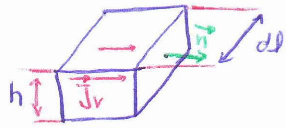


$dq = \rho dv$

quand h devient très petit 

$\Rightarrow \rho \rightarrow \sigma$ et $dq = \sigma dS$

densité de courant volumique $\vec{J_v}$



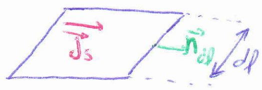
$dI = \vec{J_v} \, \vec{dS}$

$= J_v h dl \, \vec{n}$

$\vec{J_v}$ traverse une surface

quand h devient petit

$\vec{J_v} \longrightarrow \vec{J_s}$



et $dI = \vec{J_s} \, dl \, \underbrace{\vec{n}_{dl}}_{\text{suivant } \vec{J_s}}$

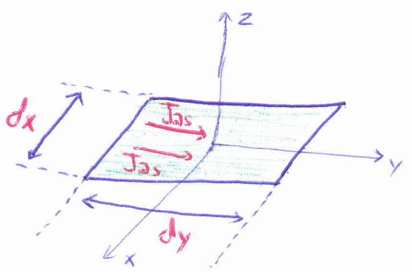
__Unité__

$[J_v] = A/m^2$

$[J_s] = A/m$

Exemple

nappe de courant plane



$dI = j \vec{e_x} \, dl \, \vec{n}_{dl}$

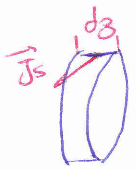
$= J_s \vec{e_x} \, d_x \, \vec{e_x}$

$dI = J_s d_x$

Resumé :

- Une densité volumique $\vec{J_v}$ traverse une surface
- Une densité surfacique $\vec{J_s}$ traverse une longueur

Exemple



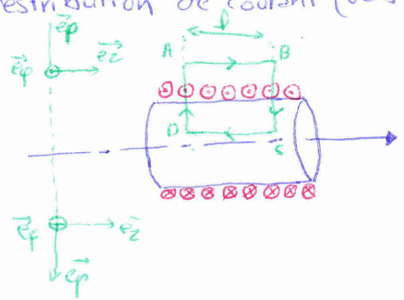
$dI = j_s \, dz$

ou $dI = \vec{J_s} \, \vec{e_\varphi} \, dz \, \vec{e_\varphi} = j_s \, dz$

3°/ champ magnétique et d'imentation et totale

.. On considère la destribution de courant (dans le vide)

Rq : Analogue à un solenoïde



Coord. cylindrique :

$\forall M(\overset{r}{\rho}, \varphi, z)$ la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$

Symétrie et Invariance $\Bigg\} \Rightarrow \vec{B}_m(M) = B_m(r)\,\vec{e_z}$

on peut appliqué le théorème d'Ampère :

Contour : Rectangle ABCDA

Théorème d'Ampère

$$\oint \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 \sum I$$

$$\oint \vec{B}\,\vec{dl} = -B_m l$$

$\sum I = ?$

$$dI = \vec{J}_{as} \cdot \vec{dl}$$

$$I = J_{as} \cdot l = M l$$

$$+B_m \cancel{l} = \mu_0 [+M\cancel{l}]$$

$$\Rightarrow \boxed{B_m = \mu_0 M} \longrightarrow \boxed{\vec{B}_m = \mu_0 M \vec{e_z} = \mu_0 \vec{M}}$$

Donc à l'interieur $\vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}$ uniforme

A l'exterieur $\boxed{\vec{B}_m = \vec{0}}$

Donc :

En tout point M à l'interieur du Solénoïde

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_e + \vec{B}_m$$
$$= \vec{B}_e + \mu_0 \vec{M}$$

avec Milieux parramagnétique LHI $\Longrightarrow \vec{B} = \mu H$

et $\boxed{\vec{H} \overset{Def}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{\mu \vec{H}}{\mu_0} - \vec{M} \\ &= \mu_r \vec{H} - \vec{M} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H}$$

$\vec{M} = \chi_m H$ ave $\boxed{\chi_m = \mu_r - 1}$

Milieux LHI $\Rightarrow$ $\vec{B} = \mu H$
$\vec{M} = \chi_m H$

paramagnétique $\chi_m > 0$ et faible $\simeq 10^{-3}$

diamagnétique $\chi_m < 0$ $\simeq -10^{-3}$

Donc $\vec{B}(M) = \vec{B}_e + \mu_0 \vec{M}$

$$= \vec{B}_e + \mu_0 \chi_m \vec{H}$$

$$= \vec{B}_e + \cancel{\mu_0} \chi_m \frac{\vec{B}}{\cancel{\mu_0}\mu_r}$$

$$= \vec{B}_e + \frac{\chi_m}{\mu_r} \vec{B}$$

$$\vec{B}\left(1 - \frac{\chi_m}{\mu_r}\right) = \vec{B}_e$$

$$\vec{B}\left(1 - \frac{\chi_m}{1+\chi_m}\right) = \vec{B}_e$$

$$\vec{B}\left(\frac{1}{1+\chi_m}\right) = B_e$$

$$\boxed{\vec{B}(M) = (1+\chi_m) B_e}$$

4°/ Intérêt d'utilisation d'un matériau paramagnétique :

Intérêt : légère augmentation de $\vec{B}$ à l'interieur du solénoide.
et par suite légère augmentation de l'inductance propre (L) du solénoide

5°/ ~~$\chi_m H$~~

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$= \frac{\chi_m}{\mu_0 (1+\chi_m)} (1+\chi_m) \vec{B}_e$$

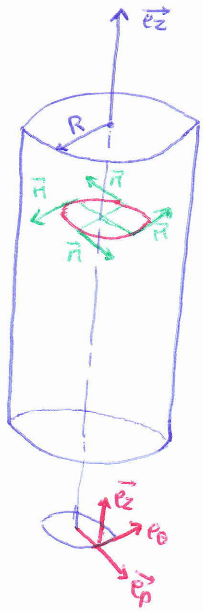
$$\boxed{\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_e}$$

Si $\vec{B}_e \longrightarrow \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{M} \longrightarrow \vec{0}$

quand on supprime $\vec{B}_e$, le materiau perd son aimentation M (Il ne reste plus aimenté)

Par contre :
Dans un ferromagnétique on supprime B_e ($B_e \to 0$), le materiau reste aimenté ($\vec{M} \neq \vec{0}$)
l'aimentation qui reste s'appelle aimentation rémanente.
On obtien aussi un electro-aiment permanent (Aiment obtenu à partir de l'electricité)

Partie B : Cylindre Infiniment long Aimanté $\vec{M} = M\vec{e_\theta}$ (M = cte).



Coordonnées cylindrique $M(\rho = r, \theta, z)$ bas local en M $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

1°/ Matériau Aimanté $\vec{M} = M\vec{e_\theta}$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ Courant d'Aimantation

* **En Surface :**

$$\vec{J}_{as} = \vec{M} \wedge \vec{n}_{ex} \qquad \text{avec } \vec{n}_{ex} = \vec{e_\rho}$$

$$\vec{J}_{as} = M\,\vec{e_\theta} \wedge \vec{e_\rho}$$

$$\boxed{\vec{J}_{as} = -M\,\vec{e_z}}$$

* **En volume :**

$$\vec{J}_{av} = \vec{rot}\,\vec{M} \qquad \vec{M}\left|\begin{array}{l} M_r = 0 \\ M_\theta = M \\ M_z = 0 \end{array}\right.$$

$$\vec{rot}\,\vec{M} = 0\,\vec{e_r} + 0\,\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rM) - 0\right]\vec{e_z}$$

$$\vec{rot}\,\vec{M} = \frac{M}{r}\,\vec{e_z}$$

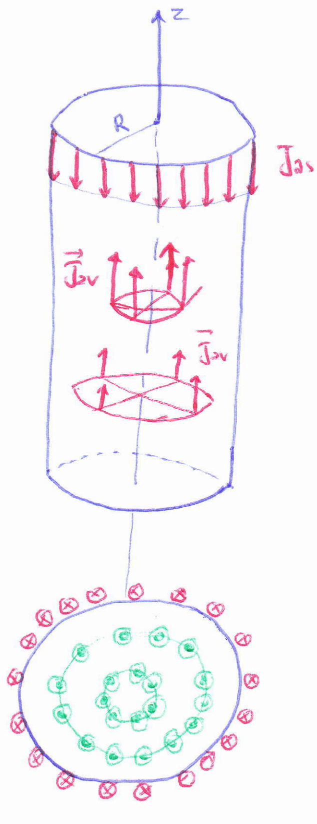
$$\boxed{\vec{J}_{av} = \frac{M}{r}\,\vec{e_z}}$$

$$\boxed{\vec{J}_{av} = J_{av}(r)\,\vec{e_z}}$$

Expression de $\vec{rot}$ En coord. cylindrique :

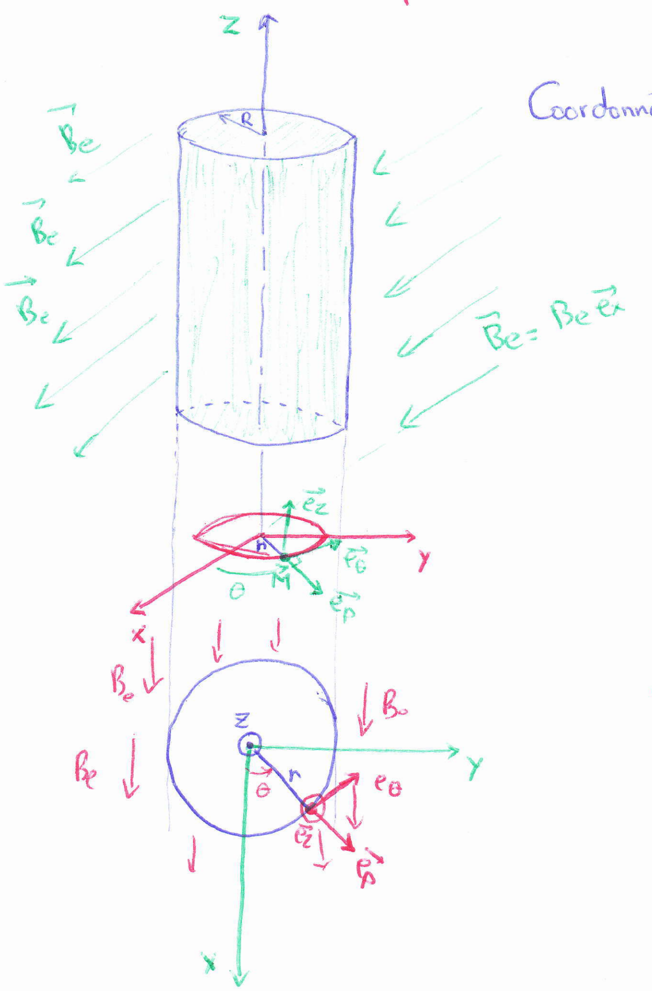
Si $\vec{A}\left|\begin{array}{l} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{array}\right.$

$$\vec{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - r\frac{\partial(\cancel{r}A_\theta)}{\partial z}\right]\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\vec{e_z}$$



Mercredi 9:45

Partie C : Materiau cylindrique infiniment long paramagnétique LHI placé dans un champ uniforme $\vec{B_e} = B_e \vec{e_x}$



Coordonnées Cylindrique $\forall M(\rho = r, \theta, z)$

base locale en M $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

1°/ Materiau LHI placé dans un champ uniforme $\vec{B_e} = B_e \vec{e_x}$

$\Rightarrow$ Aimentation $\vec{M}$ uniforme

$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = M \vec{e_x}}$

2°/ Materiau Aimenté $\vec{M}$ $\Rightarrow$ Apparition de courant d'aimentation de densité :

- **En volume**

$$\boxed{\vec{J_{av}} = \vec{rot}\, \vec{M} = \vec{0}} \qquad (\vec{M} \text{ uniforme})$$

$\Rightarrow$ Pas de courants en volume.

- **En surface :**

$$\vec{J_{as}} = \vec{M} \wedge \vec{n_{ex}} \qquad \vec{n_{ex}} = \vec{e_\rho} = \cos\theta\, \vec{e_x} + \sin\theta\, \vec{e_y}$$

$$= M\, \vec{e_x} \wedge \vec{e_\rho}$$

Alor $\vec{e_x} \wedge \vec{e_\rho} = \sin\theta\, \vec{e_z}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J_{as}} = M \sin\theta\, \vec{e_z}}$$

Remarque :

$\vec{J_{as}}$ n'est pas uniforme depend de θ

entre 0 et π $\quad \sin\theta > 0$

entre π et 2π $\quad \sin\theta < 0$

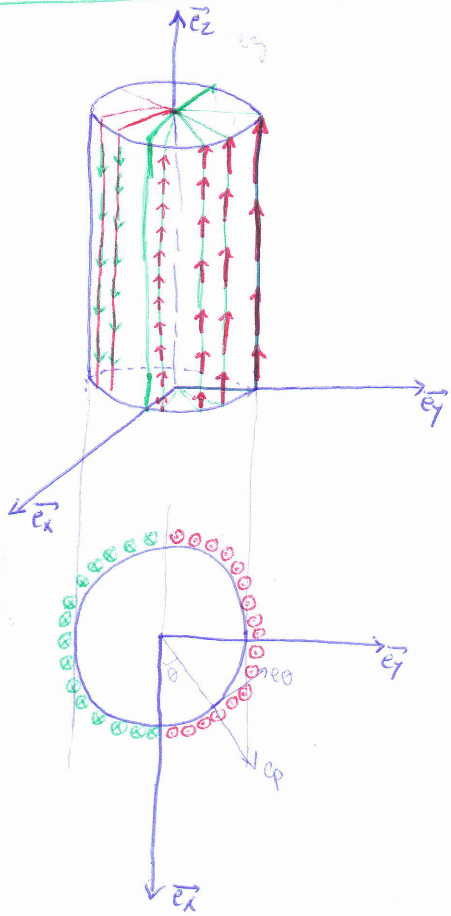
Exemple $\quad 0 < \theta < \pi$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\vec{J_a} = M \sin\theta\, \vec{e_z}$	$\vec{0}$	$\frac{M}{2}\vec{e_z}$	$\frac{M\sqrt{2}}{2}\vec{e_z}$	$\frac{M\sqrt{3}}{2}\vec{e_z}$	$M\vec{e_z}$	$\vec{0}$

Pour $\pi < \theta < 2\pi$

on aura des courants surfacique vers le bas

Representation des courants :



3°/ • Etude de la symétrie Coordonnées cylindrique $M(r, \theta, z)$
$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

- $\forall M$ le plan $(M, \vec{e_\rho}, \vec{e_z})$

  ni symetrie ni antisymetrie

- $\forall M$ le plan $(M\ \vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$ est un plan de Antisymétrie $\Rightarrow$ $\vec{B}(M) \in$ a ce plan $\longrightarrow \vec{B}(M) = B_\rho(r,\theta,z)\vec{e_\rho} + B_\theta(r,\theta,z)\vec{e_\theta}$

  et $\vec{A}(M) \perp$ a ce plan $\longrightarrow \vec{A}(M) = A_z(r,\theta,z)\,\vec{e_z}$

• Invariance :

Il y'a juste invariance suivant z

$\Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{B}(r,\theta)$

$A(M) = \vec{A}(r,\theta)$

Pour le champ $\vec{B}$ $\Rightarrow$ $\vec{B}(M) = B_\rho(r,\theta)\,\vec{e_\rho} + B_\theta(r,\theta)\,\vec{e_\theta}$

$\Rightarrow$ On ne connait pas la forme des lignes de champs

$\Rightarrow$ Donc on ne peut pas appliquer le Théorème d'Ampère car il n'y a pas de symetrie.

4°/ $\vec{A}(M) = A_z(r,\theta)\vec{e_z}$ d'après l'etude de la symetrie et l'invariance (invariant suivant z $\frac{\partial}{\partial z} = 0$)

5°/ Rappel :

Equation de Poisson et Equation de Laplace en Electrostatique et Magnétostatique.

Electrostatique	Magnétostatique
$\vec{E} = -\vec{grad}\, V$ forme Locale du Th. Gausse $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow$ densité volumiq. de charges $div(-\vec{grad} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $-\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$ Equation de Poissons quand $\rho = 0$ $\boxed{\Delta V = 0}$ Equation de Laplace	$\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$ forme locale du Th. Ampere $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J_v} \rightarrow$ (densité de courant Volumique) $\vec{rot}.(\vec{rot} A) = \mu_0 \vec{J_v}$ $grad(div\vec{A}) - \Delta A = \mu_0 \vec{J_v}$ $\boxed{div A = 0 \text{ (Jauge de Colombe) Magnétostatique}}$ $\boxed{\Delta\vec{A} + \mu_0 \vec{J_v} = \vec{0}}$ Equation de poisson. quand $\vec{J_v} = \vec{0}$ $\boxed{\Delta\vec{A} = \vec{0}}$ Equation de Laplace.

Analogie :

$\vec{E} \longrightarrow \vec{B}$

$V \longrightarrow \vec{A}$

$\rho \longrightarrow \vec{J_v}$

$\varepsilon_0 \longrightarrow \frac{1}{\mu_0}$

Ici on n'a pas de courant volumique

donc on utilise l'equation de Laplace $\Delta\vec{A} = \vec{0}$

Rq : ΔF : Laplacien scalaire

si $F = F(x,y,z)$ $\quad \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$

$\Delta\vec{A}$: Laplacien vecteur

$$\Delta\vec{A} \left| \begin{array}{l} \Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{array} \right| \Longrightarrow \Delta\vec{A} = \Delta A_x \vec{e_x} + \Delta A_y \vec{e_y} + \Delta A_z \vec{e_z}$$

Ici pour calculer $\Delta\vec{A}$ en coordonnées cylindrique

on va utiliser la formule

$$\vec{rot}(\vec{rot}\vec{A}) = grad(\underbrace{div\vec{A}}_{0}) - \Delta\vec{A}$$

$$\vec{rot}(\vec{rot}\vec{A}) = -\Delta\vec{A}$$

Si $\Delta\vec{A} = 0 \implies \vec{rot}(\vec{rot}\vec{A}) = \vec{0}$

Expression de $\vec{rot}$ en coordonnées cylindrique :

$$\text{Si } \vec{A}\left|\begin{array}{l} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{array}\right.$$

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial z}\right]\vec{e_\rho} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\vec{e_z}}$$

$$\text{Ici on a} \quad A\left|\begin{array}{l} A_r = 0 \\ A_\theta = 0 \\ A_z = A(r,\theta) \end{array}\right.$$

$$\vec{rot}\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - 0\right]\vec{e_\rho} + \left[0 - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[0 - 0\right]\vec{e_z}$$

$$\underbrace{\vec{rot}\vec{A}}_{\vec{A'}} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\theta}\right]\vec{e_\rho} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\vec{e_\theta}$$

$$\vec{A'} = \vec{rot}\,\vec{A} \qquad \text{or} \qquad \vec{A'}\left|\begin{array}{l} A'_r = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\theta}\right) \\ A'_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \\ A'_z = 0 \end{array}\right.$$

$$\vec{rot}\vec{A'} = \vec{rot}(\vec{rot}\vec{A}) = \frac{1}{r}\left[0-0\right]\vec{e_\rho} + \left[0-0\right]\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\theta}\right)\right)\right]\vec{e_z} = \vec{0}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 A}{\partial\theta^2}\right]\vec{e_z} = \vec{0}$$

$$\times r^2 \implies \boxed{r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 A}{\partial\theta^2} = 0}$$

5/ On cherche les solution sous forme $A(r,\theta,z) = K_n r^n \sin\theta$ avec $K_n = cte$ et $n \in \mathbb{Z}$

On ~~...~~

$$\boxed{r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 0}$$

$$\frac{\partial A}{\partial r} = K_n n r^{n-1} \sin\theta$$

$$r\frac{\partial A}{\partial r} = K_n r^n \sin\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) = K_n n^2 r^{n-1} \sin\theta$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) = K_n n^2 r^n \sin\theta$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = K_n r^n \cos\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) = -K_n r^n \sin\theta$$

$$K_n n^2 r^n \sin\theta - K_n r^n \sin\theta = 0$$

A ~~$(r,\theta,z) = K_n r^n \sin\theta$~~

$$\cancel{K_n} n^2 \cancel{r^n} \cancel{\sin\theta} = \cancel{K_n} \cancel{r^n} \cancel{\sin\theta} \Rightarrow n^2 = 1$$

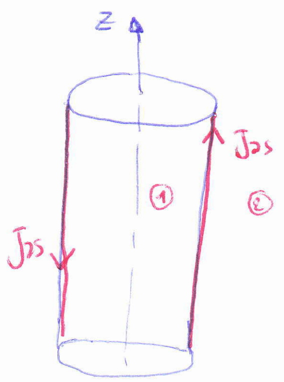
$$\Rightarrow n = \pm 1$$

Donc les solution sont

$n = 1 \longrightarrow A_1 = K_1 r \sin\theta$

$n = -1 \longrightarrow A_{-1} = K_{-1} \dfrac{\sin\theta}{r}$

On a un barreau



On destingue deux zones

- Zone ①: a l'interieur du barreau $(r<R)$
- Zone ②: a l'exterieur du barreau $(r>R)$

Cherchon la solution valable pour chaque zone.

Pour ça on prend quelque points particulier.

• Zone ①: $r < R$

on prend $r = 0$ sur l'axe

$$\begin{cases} A_1 \text{ valable} & A_1 = 0 \\ A_2 \text{ non valable} & A_2 = \infty \end{cases}$$

• Zone ② $r > R$

on Prende $r \longrightarrow \infty$

$$\begin{cases} A_1 \longrightarrow \infty & \text{Non valable} \\ A_2 \longrightarrow 0 & \text{valable} \end{cases}$$

Donc • à l'interieur du barreau) On prend $A(M) = K_1 r \sin\theta \, \vec{e_z}$

• à l'exterieur du barreau) On prend $A(M) = K_1 \dfrac{\sin\theta}{r} \vec{e_z}$

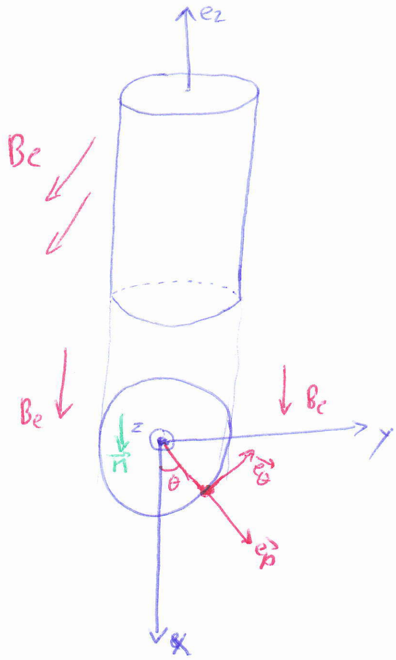
Champ $\vec{B}_{aim} \longrightarrow$ on utilise $\vec{B}_{aimen}(M) = \vec{rot} \, A_{ain}(M)$

ici on a $\vec{A} \begin{vmatrix} A_r = 0 \\ A_\theta = 0 \\ A_z = A(r,\theta) \end{vmatrix}$ Coordonnées Cylindrique base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

$$\vec{rot} \, \vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \cancel{r\frac{\partial A_\theta}{\partial z}}^{\,0}\right]\vec{e_\rho} + \left[\cancel{\frac{\partial A_r}{\partial z}}^{\,0} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\cancel{\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r}}^{\,0} - \cancel{\frac{\partial A_r}{\partial \theta}}^{\,0}\right]\vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{rot} \, \vec{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta}\right)\vec{e_\rho} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{e_\theta}}$$

A l'interieur du barreau $r < R$	A l'exterieur du barreau $r > R$
$\vec{A}_{aim}(M) = K_1 r \sin\theta \, \vec{e_z}$	$\vec{A}_{aim}(M) = K_1 \dfrac{\sin\theta}{r} \vec{e_z}$
$\vec{B}_{ain}(M) = \vec{rot} \, \vec{A}_{aim}(M)$ $= \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta}\right]\vec{e_\rho} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \vec{e_\theta}$	$\vec{B}(M) = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta}\right]\vec{e_\rho} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \vec{e_\theta}$
$\vec{B}_{ain}(M) = K_1 \cos\theta \, \vec{e_\rho} - K_1 \sin\theta \, \vec{e_\theta}$	$\vec{B}_{ain}(M) = \dfrac{1}{r^2} K_{-1} \cos\theta \, \vec{e_\rho} + \dfrac{K_{-1}}{r^2} \sin\theta \, e_\theta$
$= K_1 \underbrace{\left[\cos\theta \, \vec{e_\rho} - \sin\theta \, \vec{e_\theta}\right]}_{\vec{e_x}}$	$\vec{B}_{ain}(M) = \dfrac{K_{-1}}{r^2} \underbrace{\left[\cos\theta \, \vec{e_\rho} + \sin\theta \, \vec{e_\theta}\right]}_{\vec{e_r}}$
$\boxed{\vec{B}_{ain}(M) = K_1 \vec{e_x}}$	$\boxed{\vec{B}_{ain}(M) = \dfrac{K_{-1}}{r^2} \vec{e_r}}$



Remarque :

$\vec{B}(M) = \vec{B}_e + \vec{B}_{aim}$ Par superposition

$\vec{H}(M) = \vec{H}_e + \vec{H}_{aim}$ $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

$= \frac{\vec{B_e}}{\mu_0} + \frac{\vec{B}_{aim}}{\mu_0} + \vec{M}$

a l'exterieur $\vec{M} = \vec{0}$

interieur (continu)

$$\boxed{\vec{H}_{aim}(M) = \frac{\vec{B}_{aim}}{\mu_0} - \vec{M}}$$

$$\vec{H}_{aim}(M) = \frac{K_1}{\mu_0}\vec{e_x} - M\vec{e_x} = \left(\frac{K_1}{\mu_0} - M\right)\vec{e_x}$$

$$\vec{H}_{aim}(M) = \left(\frac{K_1}{\mu_0} - M\right)\left[\cos\theta\,\vec{e_\rho} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right]$$

exterieur (continue) $\vec{M} = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{H}_{aim}(M) = \frac{\vec{B}_{ai}}{\mu_0}}$$

$$\vec{H}_{aim}(M) = \frac{K_{-1}}{\mu_0 r^2}\left[\cos\theta\,\vec{e_\rho} + \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right]$$

Les Composantes

$$\vec{B}_{int}\left|\begin{array}{l} B_\rho = K_1\cos\theta \\ B_\theta = -K_1\sin\theta \\ B_z = 0 \end{array}\right.$$

$$\vec{B}_{ext}\left|\begin{array}{l} B_\rho = \frac{K_{-1}}{r^2}\cos\theta \\ B_\theta = \frac{K_{-1}}{r^2}\sin\theta \\ B_z = 0 \end{array}\right.$$

$$\vec{H}_{in}\left|\begin{array}{l} H_\rho = \left(\frac{K_1}{\mu_0} - M\right)\cos\theta \\ H_\theta = -\left(\frac{K_1}{\mu_0} - M\right)\sin\theta \\ H_z = 0 \end{array}\right.$$

$$\vec{H}_{ext}\left|\begin{array}{l} H_\rho = \frac{K_{-1}}{\mu_0 r^2}\cos\theta \\ H_\theta = \frac{K_{-1}}{\mu_0 r^2}\sin\theta \\ H_z = 0 \end{array}\right.$$

Pour determiner les constante K_1 et K_{-1} on utilise les relation de Passage à la surface de separation entre les 2 zone

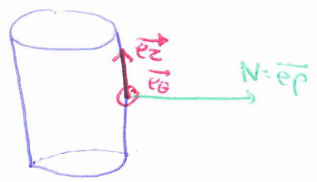
Ici on n'as pas de courants reels sur la surface de separation $\Rightarrow$ Continuité de la Composante tangentielle de $\vec{H}$

$$\left[(H_\theta)_{int} = (H_\theta)_{ext}\right]_{r=R} \quad (1)$$

$(H_z)_{int} = (H_z)_{ext} = 0$ ✓ verifier

- Composantes Normale suivant $\vec{e_\rho}$

- Composante Tangentiel suivant $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_z}$



- Continuité de la composante Normal de $\vec{B}$ (toujour)

$$\left[(B_\rho)_{int} = (B_\rho)_{ext}\right]_{r=R} \quad (2)$$

$$(1) \Longrightarrow -\left(\frac{K_1}{\mu_0} - M\right)\cancel{\sin\theta} = \frac{K_{-1}}{\mu_0 R^2}\cancel{\sin\theta}$$

$$M - \frac{K_1}{\mu_0} = \frac{K_{-1}}{\mu_0 R^2}$$

$$(2) \Longrightarrow K_1 \cancel{\cos\theta} = \frac{K_{-1}}{R}\cancel{\cos\theta} \Longrightarrow \boxed{K_1 = \frac{K_{-1}}{R^2}}$$

$$\Longrightarrow M - \frac{K_{-1}}{\mu_0 R^2} = \frac{K_{-1}}{\mu_0 R^2}$$

$$M = 2\frac{K_{-1}}{\mu_0 R^2}$$

$$\boxed{K_{-1} = \frac{\mu_0 M R^2}{2}}$$

et $\boxed{K_1 = \frac{\mu_0 M}{2}}$

Donc finalement

- A l'interieur :

$$\boxed{\vec{B}_{ai}(M) = \frac{\mu_0 M}{2}\vec{e_x} = \frac{\mu_0 \vec{M}}{2}}$$

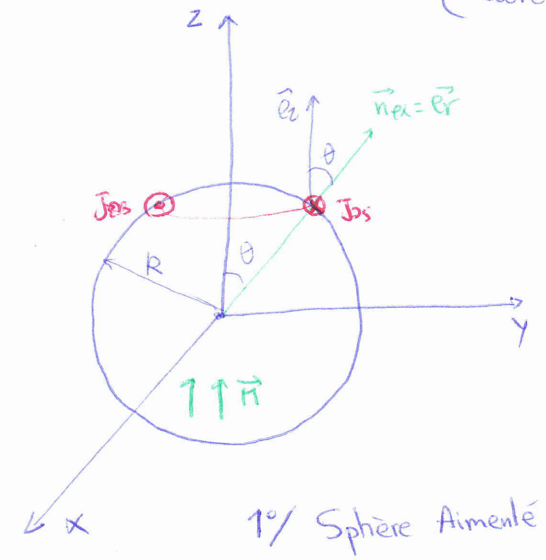
- A l'exterieur :

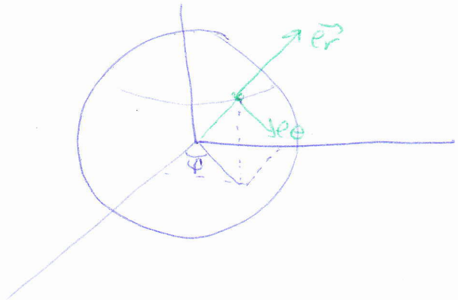
$$\boxed{\vec{B}_{ain}(M) = \frac{\mu_0 M R^2}{2 r^2}\left[\cos\theta\, \vec{e_\rho} + \sin\theta\, \vec{e_\theta}\right]}$$

Exercice II

Sphère Aimanté uniformement $\vec{M} = M\vec{e_z}$

(Coordonnees spherique, $\forall M$, $(\vec{OM} = r, \theta, \varphi)$, base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$)





1°/ Sphère Aimenté $\vec{M}$ $\Longrightarrow$ Apparition de Courant d'aimentation

- **En volume**

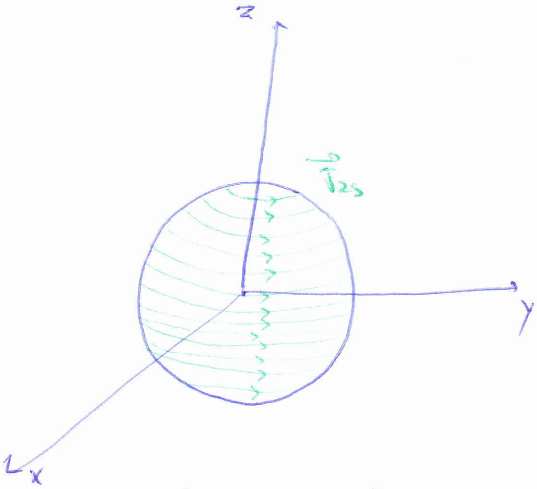
$\vec{J_{av}} = \vec{rot}\,\vec{M} = 0$ (M uniforme) pas de courant en ~~surf~~ volume

- **En surface**

$J_{as} = \vec{M} \wedge \vec{n_{ex}}$ $\quad\quad \vec{n_{ex}} = \vec{e_r}$

$= M\vec{e_z} \wedge \vec{e_r}$

$= M \sin\theta\, \vec{e_\varphi}$



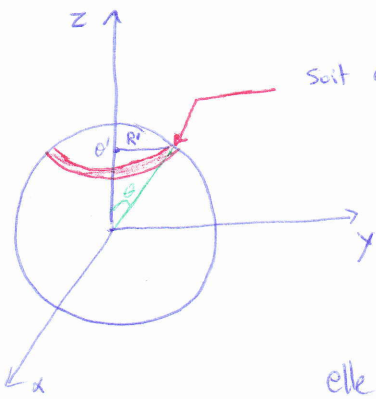
Remarque :

J_{as} n'est pas uniforme

Pour chaque θ on a un J_{as}

(On ne peut pas appliqué le Théorème d'Ampère pour calculer $\vec{B}$)

b- Calcule de B_m au point O.



Soit cette courenne, on l'assimile à une spire de centre O' de Rayon

$R' = R\sin\theta$

Parcouru par un courant $dI = \vec{J_{as}}\, dl$

$= J_{as} \cdot R\, d\theta$

$= M \sin\theta\, R\, d\theta$

elle crée en O le champ elementaire $d\vec{B_m}(O) = \frac{\mu_0\, dI}{2R'} \sin^3\theta\, \vec{e_z}$

$$d\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 dI}{2R'} \sin^3\theta\, \vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0 M \sin\theta R d\theta}{2R\sin\theta} \sin^3\theta\, \vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0 M}{2} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 M}{2} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta}_{I}$$

$$\boxed{\vec{B}_m(0) = \frac{2\mu_0 M}{3}\vec{e_z} = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}}$$

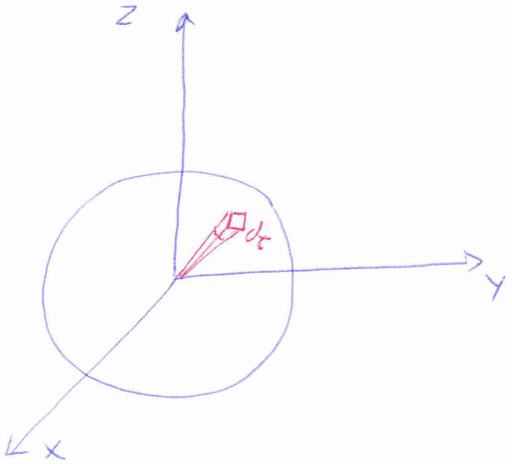
$$I = \int_0^{\pi} \sin\theta(1 - \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta + \int_0^{\pi} -\sin\theta \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= -[\cos\theta]_0^{\pi} + \frac{1}{3}[\cos^3\theta]_0^{\pi}$$

$$= -(-2) + \frac{1}{3}(-2)$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

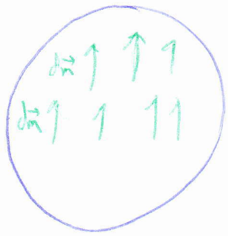


Chaque element de volume $d\tau$

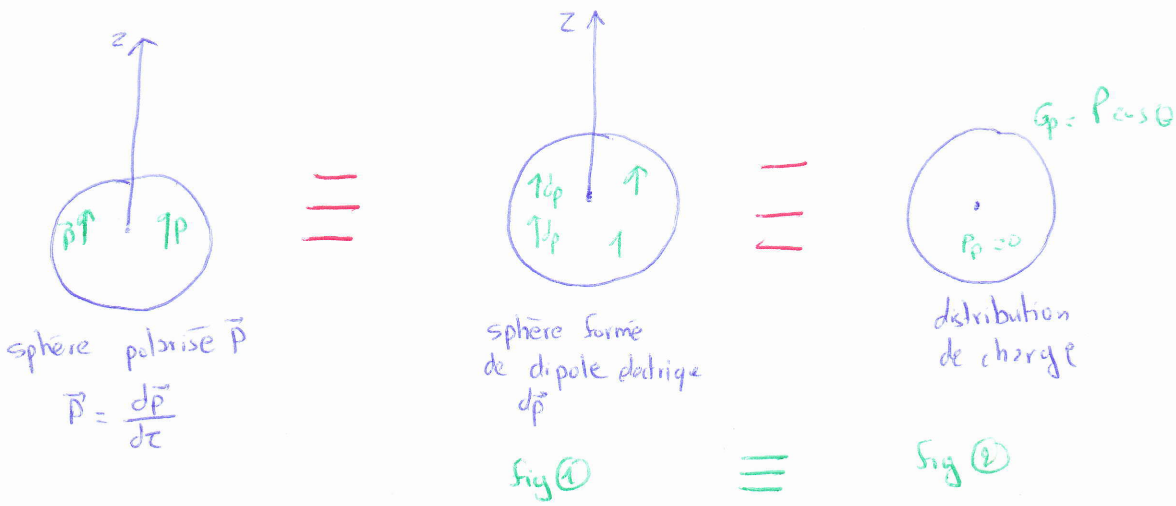
se comporte comme ~~un element de volume~~ un dipole magnétique $d\vec{m}$

$$dm = M d\tau$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}$$



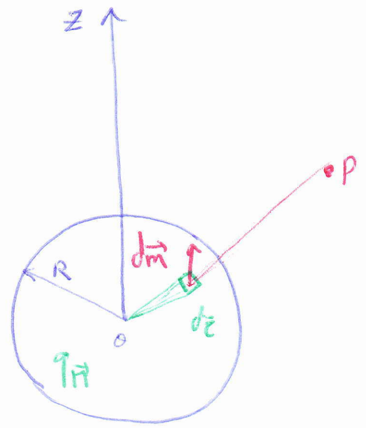
2°/ Méthode Analogue à celle d'une sphère polarisé $\vec{P}$ (TD N°1)



On considere la sphère Aimantée $\left(\vec{M} = \dfrac{d\vec{m}}{d\tau}\right)$ comme etant une sphère pleine de dipoles magnétique

chaque element $d\tau$ contient un dipole magnetique

$$d\vec{m} = \vec{M}\, d\tau$$



Soit un element de volume $d\tau(A)$ centrer sur A

→ il crée en P, le potentiel elementaire

$$d\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{d\vec{m}\wedge\vec{AP}}{AP^3} \qquad \text{avec} \quad d\vec{m} = \vec{M}\,d\tau$$

M uniforme $\Longrightarrow$

$$d\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{M}\,d\tau\wedge\vec{AP}}{AP^3}$$

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M}\wedge\underbrace{\iiint d\tau\,\frac{\vec{AP}}{AP^3}}_{\vec{I}(P)}$$

$$\boxed{\vec{I}(P) = \iiint d\tau(A)\,\frac{\vec{AP}}{AP^3}}$$

(b)

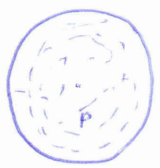
$$\vec{I}(P) = \underbrace{\iiint \overset{1}{\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}}\,\frac{d\tau\,\vec{AP}}{AP^3}}_{\vec{E}(P)\text{: champ fictif}}$$

d'une sphère de rayon R
chargée uniformement
avec $\dfrac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} = 1$

$\vec{E}(P)$ champ fictif facile à calculer :

en applique le théorème de Gauss.

Symetrie spherique



$$\vec{E}(P) = E_\rho(r)\,\vec{e_r}$$

surface de Gausse :

sphère de rayon r

- **A l'interieur : $r < R$**

Th. Gausse

$$E_p(r) \times \cancel{4\pi} r^2 = \frac{\rho \frac{\cancel{4\pi}}{3} r^3}{\varepsilon_0}$$

$$E_p(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \qquad \rho = 4\pi\varepsilon_0$$

$$E = \frac{4\pi}{3} r$$

$$\boxed{\vec{E}_{(P)} = \frac{4\pi}{3} r \vec{e_r} = \frac{4\pi}{3} \vec{r}}$$

- **A l'exterieur $r > R$**

Th. Gausse

$$E_p(r) \times \cancel{4\pi} r^2 = \frac{\rho \frac{\cancel{4\pi}}{3} R^3}{\varepsilon_0}$$

$$E_p = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{r^2}$$

$$\boxed{\vec{E}_{(P)} = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{r^2} \vec{e_r} = \frac{4\pi R^3 \vec{r}}{3 r}}$$

c)

- **A l'interieur $r < R$:**

$$\vec{I}(P) = \vec{E}(P) = \frac{4\pi}{3} r \vec{e_r} = \frac{4\pi}{3} \vec{r}$$

Donc $\vec{A}(P) = \frac{\mu_0 \vec{M}}{4\pi} \wedge \vec{E}(P)$

$$= \frac{\mu_0 M}{\cancel{4\pi}} \vec{e_z} \wedge \frac{\cancel{4\pi}}{3} r \vec{e_r}$$

$$= \frac{\mu_0 M r}{3} (\vec{e_z} \wedge \vec{e_r})$$

$$\boxed{\vec{A}(P) = \frac{\mu_0 M r}{3} \sin\theta \, \vec{e_\varphi}}$$

$\Longrightarrow \vec{B}_{(P)} = \vec{rot}\,\vec{A}(P)$

Expression de $\vec{rot}$ En Coordonnées sphèrique

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_\varphi \sin\theta}{\partial\theta} - \cancel{\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}}\right]\vec{e_r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\cancel{\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}} - \sin\theta\,\frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r}\right]\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\cancel{\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}} - \cancel{\frac{\partial A_r}{\partial\theta}}\right]\vec{e_\varphi}}$$

$$\vec{A}\left|\begin{array}{l} A_r = 0 \\ A_\theta = 0 \\ A_\varphi = A(r,\theta)\end{array}\right.$$

Donc $\boxed{\vec{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_\varphi \sin\theta}{\partial\theta}\right]\vec{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\vec{e_\theta}}$

$$\vec{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mu_0 M r}{3}\sin^2\theta\right)\vec{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_0 M r^2}{3}\sin\theta\right)\vec{e_\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{r\sin\theta}}\left[\frac{\mu_0 M \cancel{r}}{3}\,2\,\cancel{\sin\theta}\cos\theta\right]\vec{e_r} - \frac{1}{\cancel{r}}\frac{\mu_0 M}{3}2\cancel{r}\sin\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$= \frac{2}{3}\mu_0 M\left(\underbrace{\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}}_{\vec{e_z}}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(P) = \frac{2}{3}\mu_0 M\,\vec{e_z} = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}}$

Remarque :

$\vec{B}_m$ est uniforme

resultat identique à celui trouvé à la 1er question $\vec{B}(0) = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$

- A L'exterieur $r > R$:

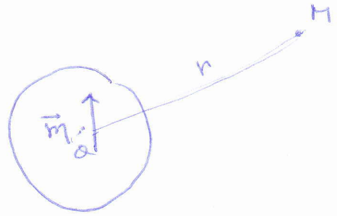
$$\vec{I}(P) = \vec{E}(P) = \frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{r^2}\vec{e_r} = \frac{4\pi}{3}\frac{R^3\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M}\wedge\vec{E}(P) = \frac{\mu_0 M R^3}{3r^2}\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M}\wedge\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{r^3}\vec{r} = \frac{\mu_0 R^3}{3}\frac{\vec{M}\wedge\vec{r}}{r^3} \; *$$

* elle a la forme du potentiel d'un dipôle magnétique

Le moment Resultant de la sphère de centre O et rayon R



$$d\vec{m} = \vec{M}\, d\tau$$

$$\vec{m} = \vec{M} \iiint d\tau = M \times \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\vec{M} = \frac{3\vec{m}}{4\pi R^3}$$

Rq :

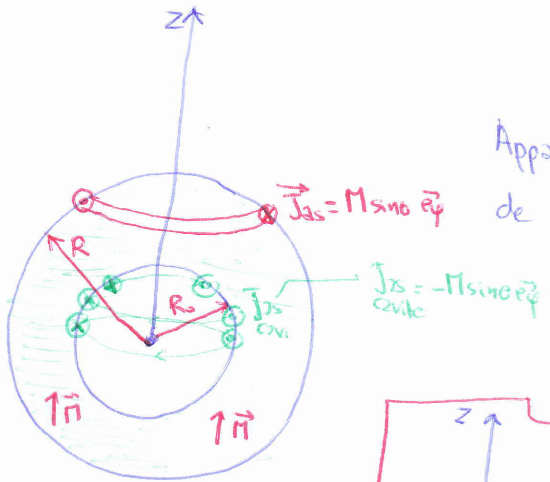
$\boxed{\text{A l'exterieur } (r>R) \text{ la sphère se comporte comme un seule dipôle de moment } \vec{m} = \vec{M}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}$

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0 \cancel{R^3}}{\cancel{3}} \frac{\cancel{3}\vec{m}\wedge\vec{r}}{4\pi \cancel{R^3} r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\wedge\vec{r}}{r^3}$$

avec $\vec{m} = \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{M}$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B}(P) &= \vec{rot}\, \vec{A} \\ &= \frac{\mu_0}{3} M \frac{R^3}{r^3}\left(2\cos\theta\, \vec{e_r} + \sin\theta\, \vec{e_\theta}\right)\end{aligned}}$$

3°/

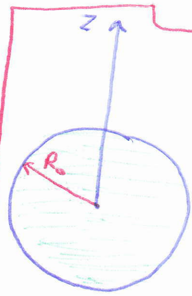


Apparition de courant Surfacique sur la paroi de la cavité

$$\vec{J}_{as\,cavité} = \vec{M}\wedge\vec{n}_{ex} \qquad \vec{n}_{ex} = -\vec{e_r}$$

$$= M\,\vec{e_z}\wedge(-\vec{e_r})$$

$$= -M\sin\theta\, \vec{e_\varphi}$$

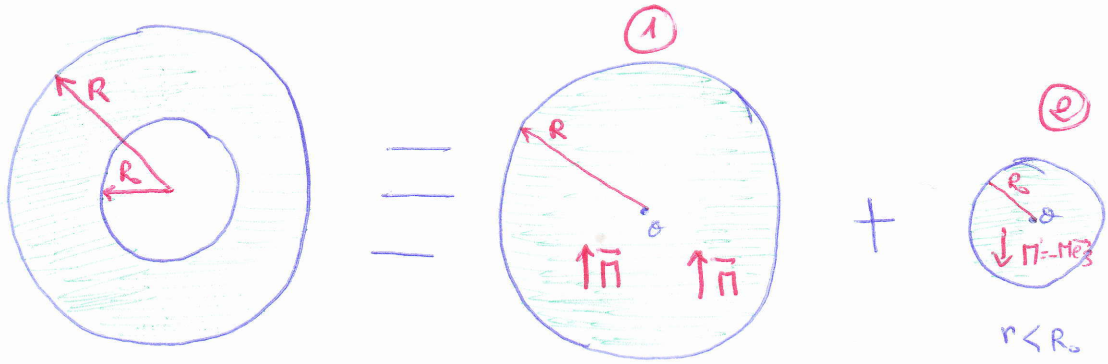


Sphère pleine de rayon R_0

Aimanté $\vec{M} = -M\, e_z$

$\vec{J}_{as} = -M e_z \wedge \vec{e_r}$

$\vec{J}_{as} = -M\sin\theta\, \vec{e_\varphi}$



$r < R$

$\Rightarrow B_1 = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}$

$r < R_0$

$\Rightarrow B_2 = -\frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}$

Par superposition

En tout point P on a superposition de deux champ

- Si $r < R_0$

  . a l'interieur de ①
  . a l'interieur de ②

  $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2} = \vec{0}$

- Si $R_0 < r < R$

  on est a l'interieur de ①
  et a l'exterieur de ②

  $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$

- Si $r > R$

  On a l'exterieur de ① et ② $\Rightarrow$