Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique
Marrakech

Année universitaire 2013/2014

TD N° 3 Electricité III
SMP S3

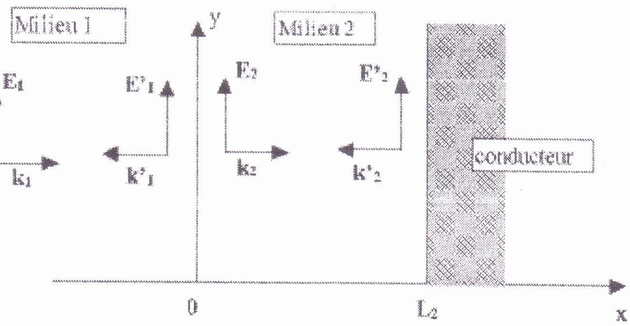
I- Indice complexe d'un milieu:

Une onde électromagnétique de pulsation ω se propage dans un milieu comportant N atomes par unité de volume. L'onde est polarisée rectilignement suivant Ox et se propage suivant Oz. Le but est de déterminer l'expression de l'indice complexe du milieu. Pour déterminer cet indice (grandeur macroscopique) on doit étudier à l'échelle microscopique l'interaction de l'onde avec les charges liées du milieu dans le cadre classique de la charge élastiquement liée au noyau. On notera m la masse de l'électron et q = -e sa charge, κ le coefficient de la force de rappel et on considérera une force frottement fluide de coefficient m/τ.
On utilisera la convention exp-jωt pour les champs. On posera $\omega_o^2 = \kappa/m$ et $\omega_p^2 = Ne^2/m\varepsilon_o$.

1- Peut-on négliger la force magnétique ? De quels phénomènes physiques résulte la force de frottement fluide ?
2- Etablir l'expression complexe du déplacement de l'électron r en régime sinusoïdal établi.
3- Donner l'expression de la susceptibilité électrique complexe χ_e.
4- Déterminer la relation de dispersion du milieu et en déduire l'expression de l'indice complexe n du milieu en fonction de la pulsation ω.
5- Dans le cas d'un milieu dilué ($1 \gg \chi_e$), écrire n se forme n'+j n'' en séparant la partie réelle n' et la partie imaginaire n''de l'indice complexe, et décrire le type de propagation de l'onde dans ce milieu.

II- Propagation-Réflexion-Transmission :

Une onde électromagnétique plane, sinusoïdale de pulsation ω, polarisée suivant la direction Oy, se propage suivant la direction Ox dans un milieu 1, diélectrique parfait d'indice n_1. Elle arrive sous incidence normale sur un milieu 2, diélectrique parfait d'indice n_2 et d'épaisseur L_2 déposé sur un conducteur supposé parfait (figure).On notera c la vitesse de la lumière dans le vide, v_1 et v_2 les vitesses de propagation respectives dans chacun des deux milieux. Les vecteurs correspondants seront notés respectivement k_1 et k_2.



1. Écrire les expressions des champs électriques $\vec{E}_1, \vec{E}_1, \vec{E}_2$ et $\vec{E}_2$ en notant leurs amplitudes respectives A_1, A'_1, A_2 et A'_2.
2. Écrire les expressions des champs électriques résultants $\vec{\xi}_1$ et $\vec{\xi}_2$ dans les milieux 1 et 2.
3. En déduire les expressions des excitations magnétiques résultantes $\vec{H}_{r1}$ et $\vec{H}_{r2}$ dans les milieux1 et 2.
4. Écrire les relations de continuité pour le champ électrique en x = 0.
5. En déduire le coefficient de réflexion A_1/A_1 . En donner le module et la phase.
6. Déterminer la densité surfacique de courants réels $\vec{J}_s$ en $x = L_2$ (interface milieu 2/conducteur).
7. Mesure de l'indice n_2 :
(a) Quelle est la condition pour que, dans le milieu 2, le champ électrique possède un nœud en x = 0 et un seul ventre ?
(b) Sachant que le premier nœud du champ électrique dans le milieu 1 se situe en $x = -L_1$, calculer l'indice n_2 en fonction de n_1, L_1 et L_2.
(c) L'expérience est réalisée, dans les conditions ci-dessus, avec de l'air comme milieu1 ($n_1 = 1$) et du méthanol comme milieu 2. On mesure L_1 = 15mm et L_2 = 11.3 mm. Quel est l'indice de réfraction du méthanol

Ondes électromagnétiques dans la matière (Révision):

A-Propagation des ondes électromagnétiques dans l'ionosphère:

L'ionosphère, qui est l'ensemble des couches atmosphériques situées au-delà de 60 Km, peut être assimilée à un plasma neutre, constitué de N électrons libres par unité de volume de masse m et de charge –e et de N ions positifs par unité de volume, pratiquement immobiles. On néglige les interactions entre les particules, l'agitation thermique et on considère le plasma comme un milieu transparent ayant la permittivité ε_o et la perméabilité μ_o du vide.

Une onde électromagnétique plane, de pulsation ω_p, polarisée rectilignement, se propage progressivement dans ce milieu suivant Oz et représentée par les champs: $\vec{E} = E_o \exp j(\omega t - kz)\vec{e}_x$ et $\vec{B} = B_o \exp j(\omega t - kz)\vec{e}_y$.

1- Ecrire l'équation différentielle de $\vec{v}_e$ vitesse prise par l'électron libre en négligeant la force magnétique et en déduire l'expression de $\vec{v}_e$ en fonction du champ électrique $\vec{E}$.

2- Quelle est la densité de courant de conduction $\vec{J}_c$ qui en résulte, ainsi que celle de courant de déplacement $\vec{J}_d$ en fonction de $\vec{E}$ et calculer le rapport J_c/J_d. On posera $\omega_p^2 = Ne^2/m\varepsilon_o$ où ω_p pulsation plasma.

3- Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère peut s'écrire: $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \dfrac{\varepsilon_r}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ où c la célérité de la lumière dans le vide, en introduisant la permittivité relative ε_r, dont on donnera l'expression en fonction de ω et ω_p.

4- Déterminer la relation de dispersion (k en fonction de ω). Montrer qu'il n'existe d'onde progressive que si la fréquence f de l'onde est supérieure à une fréquence de coupure f_c que l'on précisera. Commenter les cas suivants: $f \succ f_c, f \gg f_c, f = f_c$ et $f \prec f_c$. Décrire dans ce dernier cas, le comportement de l'onde au cours du temps.

5- Dans le cas où il y a propagation, déterminer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g.

B-Traversée de l'interface atmosphère-ionosphère:

On se propose d'étudier les phénomènes de réflexion et de transmission des ondes électromagnétiques à travers l'interface atmosphère-ionosphère. Cette interface supposée plane, sera représenté par le plan xOy, l'ionosphère dans la région z>0 et l'atmosphère dans z<0.

Soient $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_t$ les champs électriques incident, réfléchi et transmis au niveau de cet interface et $\vec{B}_i, \vec{B}_r$ et $\vec{B}_t$ les champs magnétiques correspondants. On définit l'indice de réfraction de l'ionosphère comme étant $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ où ε_r est la permittivité relative déterminée dans la première partie.

1- a) Quelles sont les relations entre $\vec{B}_i et \vec{E}_i, \vec{B}_r et \vec{E}_r, \vec{B}_t et \vec{E}_t$ en fonction de c, n et ω.

b) Exprimer les relations de passage des champs électrique et magnétique à travers l'interface z=0.

2- a) En déduire l'expression des coefficients de réflexion r en amplitude et R en intensité en fonction de ε_r.

b) Quelle est la valeur de R pour à quoi peut-on assimiler l'interface atmosphère-ionosphère.

3- Déterminer l'expression de R pour $\omega > \omega_p$, en déduire la fréquence f_c' de coupure en dessous de laquelle il n'existe pas d'onde transmise dans l'ionosphère.

C- Propagation des ondes entre la terre et l'ionosphère:

On s'intéresse maintenant à la propagation des ondes électromagnétiques dans la région comprise entre la surface de la terre et l'ionosphère dans une direction suivant la courbure de la terre. Pour simplifier on assimile la terre et l'ionosphère à des plans conducteurs parfaits, infinis et parallèles au plan xOy, situés en z=0 et z=a. Entre les plans il y a de l'air, de permittivité ε_o et de perméabilité μ_o. On considère une onde électromagnétique se propageant dans la direction Oy, et dont le champ magnétique est de la forme: $\vec{B} = B_o \cos(zk_z)\exp j(\omega t - yk_y)\vec{e}_x$ où k_y et k_z sont les inconnues du problème.

1- Rappeler les équations locales vérifiées par le champ magnétique dans l'espace entre les 2 plans.

2- Etablir l'expression du champ électrique $\vec{E}$, ce champ est-il transverse?

3- Quelles sont les conditions que doivent vérifier les composantes du champ électrique obtenu sur les plans z=0 et z=a? En déduire que k_z ne peut prendre que des valeurs discrètes, dépendant de a.
Pour la suite on choisira la plus petite valeur de k_z.

4- Déterminer la relation de dispersion $k_y(\omega)$ en fonction de a et c.

5- Montrer que seules des ondes ayant une fréquence supérieure à une fréquence critique f_c'' peuvent se propager suivant la direction Oy. On donnera l'expression de f_c'' en fonction de a et c. Que se passe-t-il pour $f \gg f_c$''?

6- Donner la vitesse de phase v_φ lorsque $f > f_c$'', déterminer la vitesse de groupe v_g et calculer $v_g v_\varphi$.

7- Déterminer l'expression de la valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting $\langle \vec{R} \rangle$.

8- En déduire le flux moyen d'énergie $\langle \Phi \rangle$ qui traverse par seconde une surface $S = a.L$ appartenant à un plan parallèle à xOz.

9- En calculant l'énergie électromagnétique moyenne dans le temps, emmagasinée dans un volume $d\tau = a.L\,v_g dt$, retrouver l'expression de la vitesse de groupe v_g.

TD 3 : Electricité III

Exercice 1

Onde plan $\rightarrow$ se polarise dans un milieux (LHI) N aton/m^3

onde polarisé suivant $\vec{e_x}$ $\vec{E} = E_x \vec{e_x}$

et se propage suivant $\vec{e_z}$ $\vec{K} = K\vec{e_z}$

ici on a propagation dans un milieux LHI

les charge (les e-) sont fortement lié au Noyeau $\Rightarrow$ Dielectrique (Isolant)

En utilise la convention $e^{-j\omega t}$

$$\vec{E} = E_0 e^{-j(\omega t - Kz)} \vec{e_x}$$

$$\nabla = +j\vec{K}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -j\omega$$

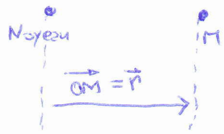
Inventaire des forces appliqués a l'electrone (charge $q = -e$)

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E}$$

$$\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$ $\vec{v}$: vettesse de deplacement de l'e-

$$\vec{F}_{Rappel} = ~~-K\vec{r}~~ -K\vec{r}$$ $\vec{r} = \vec{OM}$

$$\vec{F}_{Fortement} = -\frac{m}{\tau}\vec{v} = -\frac{m}{\tau}\frac{d\vec{r}}{dt}$$



1/ $$\frac{\vec{F}_{el}}{\vec{F}_{mag}} = \frac{q\vec{E}}{q\vec{v}\wedge\vec{B}} = \frac{\vec{E}}{\vec{v}\wedge\vec{B}}$$

$$\Rightarrow \frac{|F_{el}|}{|F_{mag}|} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{v}||\vec{B}|\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{v}||\vec{B}|} = \frac{V_\varphi}{v} \ggg 1$$

V_φ : vettesse de l'onde ; v : vettesse de l'e-

$\vec{F}_{magnét}$ est negligeable devant $\vec{F}_{electri}$

Onde plans
- Dans le vide $|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$
- Dans la matiere $|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{v}$

v : vettesse de l'onde dans la matiere (vetesse de phase $v = v_\varphi$)

Forces de frotement est dû aux collisons entre particules

- Interaction avec les particules de la matière.

A.

2°/ Equation du mouvement de l'e⁻

on utilise le P.F.D $\longrightarrow$ $\sum \vec{F}_{Appliqué} = m\vec{\gamma} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$$\vec{F}_{el} + \cancel{\vec{F}_{mg}} + \vec{F}_{R>p} + \vec{F}_{Frot} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$-e\vec{E} \quad -K\vec{r} - \frac{m}{\tau}\frac{d\vec{r}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{m}{\tau}\frac{d\vec{r}}{dt} + K\vec{r} = -eE$$

Si $\vec{E}$ est de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\omega t}$

$\Rightarrow$ $\vec{r}$ sera de la forme $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-j\omega t}$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} = -j\omega \\ \dfrac{d^2}{dt^2} = (-j\omega)(-j\omega) = -\omega^2 \end{cases}$$

$$m(-\omega^2\vec{r}) + \frac{m}{\tau}(-j\omega\vec{r}) + K\vec{r} = -e\vec{E}$$

$$-m\omega^2\vec{r} - j\frac{m}{\tau}\omega\vec{r} + K\vec{r} = -e\vec{E}$$

$$m\omega^2\vec{r} + j\frac{m}{\tau}\omega\vec{r} - K\vec{r} = e\vec{E}$$

$$\vec{r}\left[(m\omega^2 - K) + j\frac{m}{\tau}\omega\right] = e\vec{E}$$

$$\vec{r} = \frac{e\vec{E}}{(m\omega^2 - K) + j\frac{m}{\tau}\omega}$$

$$= \frac{e\vec{E}}{m\left(\omega^2 - \frac{K}{m} + j\frac{\omega}{\tau}\right)}$$

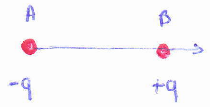
$$\boxed{\vec{r} = \frac{e\vec{E}}{m\left[(\omega^2 - \omega_0^2) + j\frac{\omega}{\tau}\right]}}$$

3°/ Le champ $\vec{E}$ polarise le milieu $\longrightarrow \vec{P}$

milieux LHI $\longrightarrow$ $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$

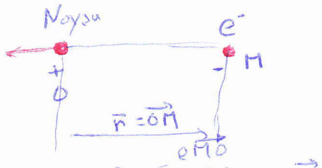
sous l'action de $\vec{E}$ $\longrightarrow$ chaque atome engendre un dipole electrique.

$$\vec{p} = -e\vec{r}$$



$\vec{p} = q\,\vec{AB}$

on a N atom$/m^3$ $\longrightarrow$ $\vec{P} = N\vec{p} = -Ne\vec{r}$



$\vec{p} = -e\,\vec{OM} = -e\vec{r}$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \cancel{\vec{E}} = -Ne\vec{r} = \frac{-Ne^2}{m\left[(\omega^2-\omega_0^2)+j\frac{\omega}{\tau}\right]}\cancel{\vec{E}}$$

$$\chi_e = \frac{-Ne^2/m\varepsilon_0}{\left[(\omega^2-\omega_0^2)+j\frac{\omega}{\tau}\right]} = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2-\omega^2)-j\frac{\omega}{\tau}} \quad \text{car} \quad \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} = \omega_p^2$$

$$\boxed{\chi_e = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2-\omega^2)-j\frac{\omega}{\tau}}}$$

4°/ **Rappel :**

Eq de Maxwell Generalisées dans un milieu quelconque. (utiliser $\vec{D}$ et $\vec{H}$)

$$\boxed{\begin{array}{llll} \bullet\ \operatorname{div}\vec{D} = \rho_{lib} & (1) & \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (3) \\ \bullet\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 & (2) & \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J}_{reel} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (4) \end{array}}$$

milieu LHI :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\ B = \mu\vec{H} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \operatorname{div} E = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} B = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \operatorname{rot} B = \mu\left[J_{ree} + \varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}\right] \end{array}$$

verification pour le vide

si le milieu est le vide

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}$$

$\text{div } E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\quad$ $\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\text{div } B = 0$ $\quad$ $\text{rot } B = \mu_0 \left(j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$

Dielec $\rightarrow \rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$

Application au milieu etudier

milieu LHI $\rightarrow \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \vec{H}$

Diel $\rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = \vec{0} \end{cases}$

(Amagnétique) $\mu_r = 1 \longrightarrow \mu = \mu_0$

les eq de Maxwell deviennent

$\text{div } \vec{E} = 0$ $\quad$ $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\text{div } \vec{B} = 0$ $\quad$ $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Etablire la relation a partir des equation de Maxwell

Equation de propagation pour E

$$\text{rot rot } E = \frac{-\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}$$

$$\vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \frac{-\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

$$-\Delta E = -\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\Delta E = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = j\vec{k} \cdot j\vec{k} = -K^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2$$

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$-K^2 \cancel{\vec{E}} = -\mu_0 \varepsilon \omega^2 \cancel{\vec{E}}$$

$$K^2 = \mu_0 \varepsilon \omega^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r = K_0^2 \varepsilon_r(\omega)$$

$$= K_0^2 \varepsilon_r(\omega) \longrightarrow$$

$$n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

$$\varepsilon_r = \left[1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\frac{\omega}{\tau}}\right]$$

$$n = \varepsilon_r^{1/2} \longrightarrow \boxed{n = \left[1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\frac{\omega}{\tau}}\right]^{1/2}}$$

5°/ $\chi_e \lll 1$

$$(1 + \varepsilon_r)^n \simeq 1 + n\varepsilon$$

$$n = (1 + \chi_e)^{1/2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\chi_e$$

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2) - j\frac{\omega}{\tau}\right]}$$

$$= 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

$$= \underbrace{1 + \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}_{n'} + j \underbrace{\frac{\frac{\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega) + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \times \frac{\omega_p^2}{2}}_{n''}$$

$$n' + j n''$$

$$K = \frac{\omega}{c} n$$

n complex $\longrightarrow$ K est complexe

$$\begin{cases} n = n' + jn'' \\ K = K' + jK'' \end{cases}$$

avec $K' = \frac{\omega}{c} n'$

$K'' = \frac{\omega}{c} n''$

$$\vec{E} = E_0 \, e^{-j(\omega t - Kz)} \, \vec{e_x}$$

$$= E_0 \, e^{-j(\omega t - (K' + jK'')z)} \, \vec{e_x}$$

$$= E_0 \, e^{-j(\omega t - K'z - jK''z)} \, \vec{e_x}$$

$$= E_0 \, e^{-j(\omega t - K'z)} \cdot e^{-K''z} \, \vec{e_x}$$

$$= E_0 \, e^{-K''z} \cdot e^{-j(\omega t - K'z)} \, \vec{e_x}$$

Ampletude

c'est une onde qui se propage suivant z
le vecteur d'onde K' dont l'ampletude
decroit exponnentiellement en fonction de z

En Complexe

K' ⟶ vecteur d'onde

Partie reel

Partie imagi K'' sensigne sur l'absorbtion (l'Attunuation de l'onde)

$$n = n' + jn''$$

n' : indice du milieu utilise en optique

n'' : Coef d'Extinction
d'Attinuation
Absorption