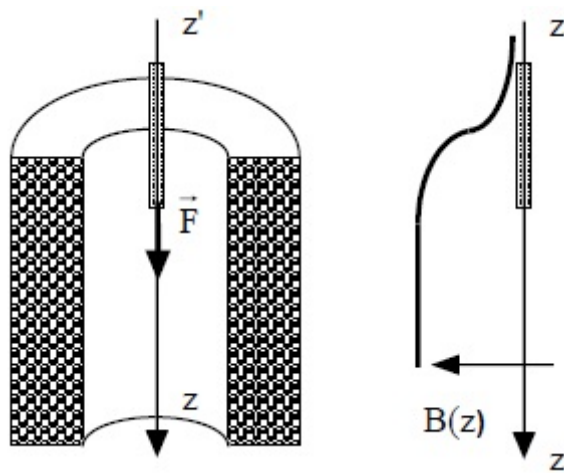


UNIVERSITÉ CHOUAÏB DOUKKALI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE



TRAVAUX DIRIGÉS D'ÉLECTRICITÉ 3
SMP4 - 2014/2015

1. MILIEUX DIÉLECTRIQUES

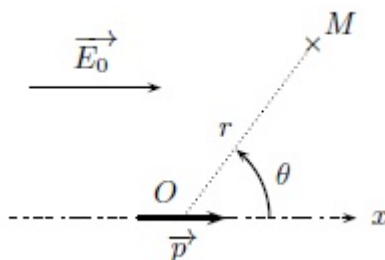
2. MILIEUX AIMANTÉS

3. CIRCUITS MAGNÉTIQUES

4. EQUATIONS DE MAXWELL

Milieux diélectriques
Série N°1

Exercice 1 : Une molécule polaire de moment dipolaire \vec{p} est placée à l'origine O d'un axe (Ox), son moment dipolaire étant orienté suivant l'axe Ox. On applique un champ électrostatique uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$. On repère la position d'un point M par ses coordonnées polaires (r, θ) .



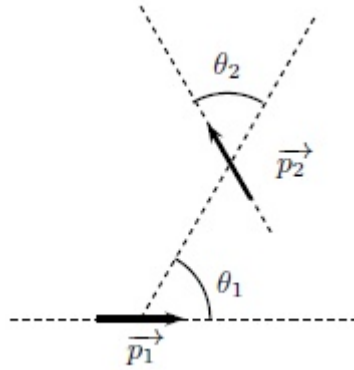
1. Déterminer l'expression du potentiel électrostatique $V_0(M)$ associé au champ électrostatique \vec{E}_0 au point M. On prendra comme origine du potentiel V_0 le point O.
2. En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$ créé en M par la molécule et le champ électrostatique \vec{E}_0 , en se plaçant dans l'approximation dipolaire.
3. Quelle est la nature de l'équipotentielle $V = 0$?
4. Montrer qu'il existe deux points de champ nul, en précisant leur position.

Exercice 2 : On place au point O de l'axe (Ox) un dipôle dont le moment dipolaire \vec{p} est orienté selon \vec{e}_x . A une distance x sur l'axe (Ox), on place un cation de charge Q . On suppose que le dipôle est suffisamment loin du cation, i.e., x est grand devant la longueur du dipôle.



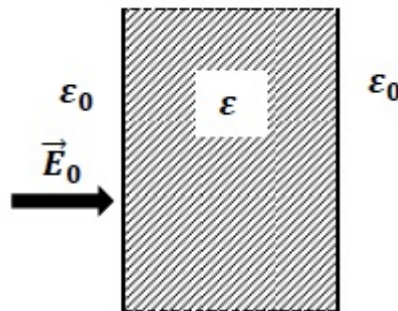
1. Exprimer le champ électrostatique \vec{E} créé par le dipôle au niveau du cation.
2. Quelle est la force \vec{F} exercée par le dipôle sur le cation ? L'interaction est-elle attractive ou répulsive ? En déduire l'énergie potentielle W du cation dans le champ du dipôle.
3. Donner le champ électrique \vec{E}' créé par le cation au centre du dipôle. En déduire l'énergie potentielle W' du dipôle dans le champ du cation.
4. Comparer W' et W . Conclusion.

Exercice 3 : Deux dipôles de moment \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont placés dans la configuration indiquée sur la figure, à une distance r l'un de l'autre.



1. Exprimer l'énergie potentielle W_2 du dipôle de moment \vec{p}_2 placé dans le champ du dipôle de moment \vec{p}_1 .
2. En déduire la relation entre les angles θ_1 et θ_2 lorsque le dipôle de moment \vec{p}_2 est dans une position d'équilibre.

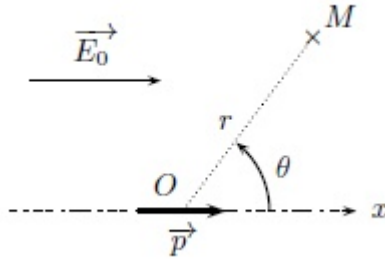
Exercice 4 : Considérons une lame diélectrique (l.h.i.) de permittivité relative ϵ_r , placée dans un champ électrique uniforme \vec{E}_0 (voir figure). Les faces de la lame sont considérées comme des plans infinis.



- 1) Déterminer le champ électrique \vec{E} à l'intérieur de la lame en fonction de \vec{E}_0 et ϵ_r . En déduire la polarisation \vec{P} à l'intérieur du diélectrique. Préciser le sens de \vec{P} .
- 2) Déterminer le champ électrique dépolarisant \vec{E}_p créé à l'intérieur du diélectrique. Quel est le sens de \vec{E}_p ?
- 3) Calculer les densités de charges fictives de polarisation.
- 4) Retrouver le champ électrique dépolarisant \vec{E}_p à partir des charges de polarisation.

CORRIGÉ

Exercice 1 : Une molécule polaire de moment dipolaire \vec{p} est placée à l'origine O d'un plan (Oxy), son moment dipolaire étant orienté suivant l'axe Ox. On applique un champ électrostatique uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$. On repère la position d'un point M par ses coordonnées polaires (r, θ) .



1. Le potentiel électrostatique

$$V_0 = - \int \vec{E}_0 \cdot d\vec{OM} = - \int E_0 dx = -E_0 x + \text{cte}$$

On prendra comme origine du potentiel V_0 le point O, d'où :

$$V_0 = -E_0 x = -E_0 r \cos \theta$$

2. Le potentiel électrostatique $V(M)$ créé en M par le champ électrostatique \vec{E}_0 et la molécule (dipôle \vec{p}), en se plaçant dans l'approximation dipolaire (détails de calcul dans le cours) s'écrit :

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \cos \theta = \cos \theta \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \right)$$

3.

$$V = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \pm\pi/2 \quad \text{ou} \quad r^3 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0}$$

L'équipotentielle $V = 0$ est le plan (Oyz) ($\theta = \pm\pi/2$) et la sphère de centre O et de rayon

$$r = \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{1/3}$$

4. Le champ électrique est

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= -\vec{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \\ &= \cos \theta \left(\frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} + E_0 \right) \vec{e}_r + \sin \theta \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} - E_0 \right) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Il existe deux points de champ nul :

$$\left[r = \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{1/3}, \quad \theta = \pi/2 \right] \quad \text{et} \quad \left[r = \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{1/3}, \quad \theta = -\pi/2 \right]$$

Exercice 2 : On place au point O de l'axe (Ox) un dipôle dont le moment dipolaire \vec{p} est orienté selon \vec{e}_x . A une distance x sur l'axe (Ox), on place un cation de charge Q . On suppose que le dipôle est suffisamment loin du cation, i.e., x est grand devant la longueur du dipôle.



1. Le champ électrostatique créé par le dipôle au niveau du cation est

$$\vec{E} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 x^3} \vec{e}_x$$

2. La force exercée sur le cation par le dipôle est

$$\vec{F} = Q\vec{E} = \frac{pQ}{2\pi\epsilon_0 x^3} \vec{e}_x$$

L'interaction est répulsive (déplacement vers les x croissants).

L'énergie potentielle W du cation dans le champ du dipôle peut être calculée à partir de la relation :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}W = -\frac{\partial W}{\partial x} \vec{e}_x$$

soit :

$$W = -\frac{pQ}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{x^3} = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 x^2} + \text{cte}$$

$W \rightarrow 0$ si $x \rightarrow \infty \Rightarrow \text{cte} = 0$, d'où :

$$W = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

3. Le champ électrique créé par le cation au centre du dipôle est

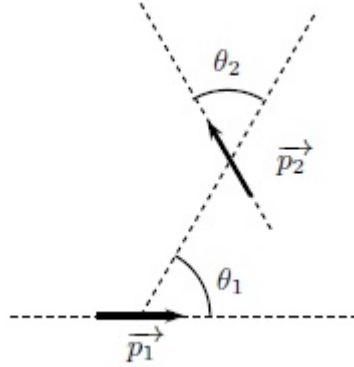
$$\vec{E}' = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{e}_x$$

L'énergie potentielle W' du dipôle dans le champ du cation est

$$W' = -\vec{p} \cdot \vec{E}' = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

4. $W' = W$. Le cation subit la même force qu'il exerce sur le dipôle (principe d'action et de réaction).

Exercice 3 : Deux dipôles de moment \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont placés dans la configuration indiquée sur la figure, à une distance r l'un de l'autre.



1. L'énergie potentielle W_2 du dipôle de moment \vec{p}_2 placé dans le champ du dipôle de moment \vec{p}_1 est

$$\begin{aligned} W_2 &= -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = -p_2(\cos \theta_2 \vec{e}_r + \sin \theta_2 \vec{e}_\theta) \cdot \left[\frac{2p_1 \cos \theta_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p_1 \sin \theta_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta \right] \\ &= -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2] \end{aligned}$$

2. Le dipôle de moment \vec{p}_2 est dans une position d'équilibre (r, θ_2) si $\frac{\partial W_2}{\partial \theta_1} = 0$, soit :

$$-2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 = 0$$

d'où :

$$\tan \theta_1 = \frac{1}{2} \tan \theta_2$$

Exercice 4 :

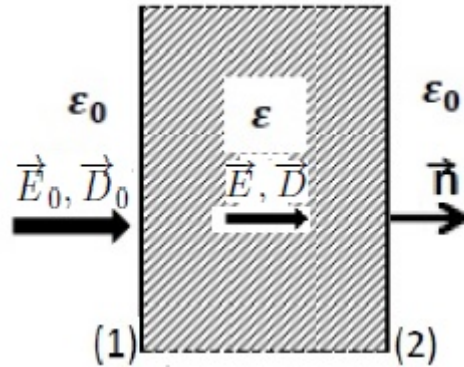
1. On a : $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ et $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$.

La relation de passage sur la face (1) de la lame diélectrique, non chargée ($\sigma = 0$), s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) &= \sigma = 0 \\ \Leftrightarrow \epsilon E - \epsilon_0 E_0 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} = \frac{E_0}{\epsilon_r} \vec{n}$$



et la polarisation :

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \vec{E}_0$$

$\varepsilon_r > 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\varepsilon_r} > 0 \Rightarrow \vec{P}$ est de même sens que \vec{E}_0 .

2. Le champ électrique dépolarisant :

$$\vec{E}_p = \vec{E} - \vec{E}_0 = \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \vec{E}_0$$

$\frac{1}{\varepsilon_r} - 1 < 0 \Rightarrow \vec{E}_p$ est de sens opposé à \vec{E}_0 .

3. Charges de polarisation :

$$\sigma_{p1} = \vec{P} \cdot \underbrace{\vec{n}_1}_{-\vec{n}} = -\varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) E_0 < 0$$

$$\sigma_{p2} = \vec{P} \cdot \underbrace{\vec{n}_2}_{\vec{n}} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) E_0 > 0$$

$$\rho_p = -\text{div} \vec{P} = 0 \quad (\vec{P} \text{ uniforme}).$$

4. Sachant que le champ créé par une face de la lame (considérée comme un plan infini), portant la charge surfacique σ_p est de $\frac{\sigma_p}{2\varepsilon_0}$; pour un point M à l'intérieur de la lame (entre ses deux faces), on a :

$$\vec{E}_p = \frac{\sigma_{p1}}{2\varepsilon_0} \vec{n} + \frac{\sigma_{p2}}{2\varepsilon_0} (-\vec{n}) = \frac{\sigma_{p1} - \sigma_{p2}}{2\varepsilon_0} \vec{n} = \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \vec{E}_0$$

Milieux diélectriques
Série N°2

Exercice 1 : On considère un milieu diélectrique parfait (l.h.i) de permittivité électrique ε , de surface sphérique de centre O et de rayon R_2 . On creuse dans ce milieu une cavité vide (ε_0) de forme sphérique, de même centre O et de rayon R_1 ($R_1 < R_2$). On place au centre O une charge q ($q < 0$).

1) Calculer $\text{div} \frac{\vec{r}}{r^3}$.

2) Déterminer le vecteur déplacement électrique \vec{D} en tout point de l'espace. En déduire le vecteur champ électrique \vec{E}_0 et le vecteur polarisation \vec{P}_0 dans la cavité ($0 < r < R_1$) ensuite \vec{E} et \vec{P} dans le diélectrique ($R_1 < r < R_2$).

3) Calculer les densités de charges de polarisation volumique ρ_p et surfaciques σ_{p1} et σ_{p2} .

4) Calculer le champ dépolarisant \vec{E}_p à l'intérieur du diélectrique et indiquer son sens.

5) Montrer que

$$\vec{n} \cdot (\vec{E} - \vec{E}_0)_{r=R_1} = \frac{\sigma_{p1}}{\varepsilon_0}$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface, dirigé de la cavité vers le diélectrique.

6) Quelle est la charge totale Q_T à l'intérieur de la sphère de rayon R_2 . En déduire le champ \vec{E} pour $r > R_2$.

7) Calculer la force par unité de volume \vec{f} , qui s'exerce en un point M du diélectrique. En déduire la force \vec{F} , qui s'exerce sur tout le diélectrique. Quelle est sa nature ?

Exercice 2 : Une sphère de centre O, de rayon R , constituée d'un matériau diélectrique parfait, de permittivité absolue ε , est chargée avec une densité volumique uniforme $\rho > 0$. La sphère est placée dans le vide. Le potentiel électrique créé par cette sphère en un point M de l'espace tel que $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{n}$ est donné par :

$$\begin{cases} V(r) = \frac{kq}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) & \text{pour } 0 < r < R \\ V(r) = \frac{kq}{r} & \text{pour } r > R \end{cases}$$

k et q sont des constantes positives.

1) En utilisant l'équation de Poisson, calculer la densité volumique de charges ρ en fonction de k , ε , q et R .

2) On admettra que $\vec{D} = D(r)\vec{n}$ et on prend $r^2 D(r) = 0$ pour $r = 0$. A partir de l'équation locale du théorème de Gauss, Déterminer le vecteur champ déplacement électrique en tout point de l'espace et déduire l'expression du champ électrique. On note (\vec{E}, \vec{D}) dans le diélectrique et (\vec{E}_0, \vec{D}_0) dans le vide.

3) Exprimer le vecteur polarisation \vec{P} dans la sphère diélectrique.

- 4) Calculer les densités de charges fictives de polarisations surfaciques σ_p et volumiques ρ_p . En déduire la charge totale de polarisation Q_{pT} .
- 5) Retrouver l'expression de ρ_p à partir de l'équation locale de Gauss dans un milieu diélectrique parfait (l.h.i).
- 6) La loi de continuité du champ \vec{E} est-elle respectée ? justifier votre réponse.

On donne en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div}(A(r)\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A(r)) \quad \text{et} \quad \Delta f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r}\right).$$

Exercice 3 : Soit un volume diélectrique (l.h.i) de permittivité relative ϵ_r , de forme sphérique de rayon R , placé dans un champ extérieur uniforme \vec{E}_0 . On admettra que la polarisation \vec{P} est uniforme à l'intérieur de ce volume et orientée dans le sens de \vec{E}_0 .

1. Calculer les densités de charge superficielle σ_P et volumique ρ_P en un point M de la sphère.
2. Montrer que le champ dépolarisant \vec{E}_p créé par les charges de polarisation au centre de la sphère est égal à

$$\vec{E}_p = \frac{1 - \epsilon_r}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_0$$

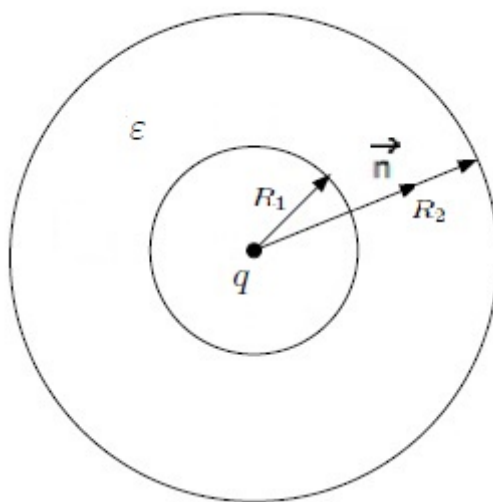
3. Etudier les cas $\epsilon_r = 1$ et $\epsilon_r = \infty$ et interpréter ces résultats.
4. Calculer le champ total \vec{E} à l'intérieur du diélectrique en fonction de ϵ_r et \vec{E}_0 . En déduire, en tout point de la sphère, les vecteurs déplacement électrique \vec{D} et polarisation \vec{P} .
5. Déterminer l'énergie électrostatique W de cette sphère diélectrique.
6. En admettant que le champ extérieur créé par les charges de polarisation est équivalent à celui d'un dipôle électrique de moment $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$.
 - a. Donner les composantes du champ électrique \vec{E}_p créé par ce dipôle en un point extérieur $M(r, \theta)$ avec $r \gg R$.
 - b. En déduire alors le champ extérieur total \vec{E}_e en M.
 - c. Déterminer les vecteurs \vec{D}_e et \vec{P}_e à l'extérieur du diélectrique.
 - d. Les lois de continuité des champs \vec{E} et \vec{D} sont-elles respectées ? Justifier votre réponse.

CORRIGÉ

Exercice 1 :

$$1. \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \underbrace{\operatorname{div} \vec{r}}_3 + \underbrace{\vec{r} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r^3}}_{-3 \frac{\vec{r}}{r^5}} = \frac{3}{r^3} - 3 \frac{r^2}{r^5} = 0$$

2. Calcul de $\vec{D} = D(r) \vec{n}$:



· $0 < r < R_1$ (à l'intérieur de la cavité sphérique) :

$$\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D(r) = q$$

$$\Leftrightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{n}$$

· $R_1 < r < R_2$ (à l'intérieur du diélectrique) :

$$\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D(r) = q$$

$$\Leftrightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{n}$$

· $r > R_2$ (à l'extérieur de la sphère) :

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{n}$$

Dans la cavité ($0 < r < R_1$) :

$$\vec{E}_0 = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{n}$$

et

$$\vec{P}_0 = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \vec{0}$$

Dans le diélectrique ($R_1 < r < R_2$) :

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \vec{n}$$

et

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \vec{n}$$

3. Charges de polarisation :

$$\rho_p = -\text{div} \vec{P} = -\frac{q}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \text{div} \frac{\vec{n}}{r^2} = -\frac{q}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$\sigma_{p1} = \vec{P}(R_1) \cdot \underbrace{\vec{n}_1}_{-\vec{n}} = -\frac{q}{4\pi R_1^2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) > 0$$

$$\sigma_{p2} = \vec{P}(R_2) \cdot \underbrace{\vec{n}_2}_{\vec{n}} = \frac{q}{4\pi R_2^2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) < 0$$

4. Champ dépolarisant :

$$\vec{E}_p = \vec{E} - \underbrace{\vec{E}_0}_{\substack{\text{en absence du} \\ \text{diélectrique}(\varepsilon_0)}} = \frac{q}{4\pi r^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) \vec{n} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \vec{n}$$

5. Relation de passage :

$$\vec{n} \cdot (\vec{E} - \vec{E}_0)_{r=R_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon R_1^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) = \frac{\sigma_{p1}}{\varepsilon_0}$$

6. Charge totale :

$$Q_t = q + \sigma_{p1} 4\pi R_1^2 + \sigma_{p2} 4\pi R_2^2 = q - q \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) + q \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = q$$

D'où le champ \vec{E} pour $r > R_2$ (dans le vide) :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{n}$$

7. La force par unité de volume \vec{f} , qui s'exerce en un point M du diélectrique est

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{2} \vec{\nabla} E^2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 \varepsilon_r^2 r^4} \right] \vec{n} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)q^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r^2} \frac{\vec{n}}{r^5}$$

d'où la force \vec{F} , qui s'exerce sur tout le diélectrique :

$$\vec{F} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)q^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^5} \underbrace{4\pi r^2 dr}_{d\tau} \vec{n} = \underbrace{\frac{(\varepsilon_r - 1)q^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r^2} \left[\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right]}_{<0} \vec{n}$$

\vec{F} est une force normale dirigée vers le centre de la sphère.

Exercice 2 :

1) A l'intérieur du diélectrique ($0 < r < R$), le potentiel est

$$V(r) = \frac{k}{2} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{q}{R}$$

L'équation de Poisson :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

donne :

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V(r)}{\partial r} \right) = \frac{k}{2} \frac{q}{R} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)}{\partial r} \right) = -\frac{3kq}{R^3} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \rho = 3\varepsilon k \frac{q}{R^3}$$

2) $\vec{D} = D(r) \vec{n}$, l'équation locale du théorème de Gauss à l'intérieur de la sphère s'écrit :

$$\text{div} \vec{D} = \text{div}(D(r) \vec{n}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D(r)) = \rho = \frac{3\varepsilon k q}{R^3}$$

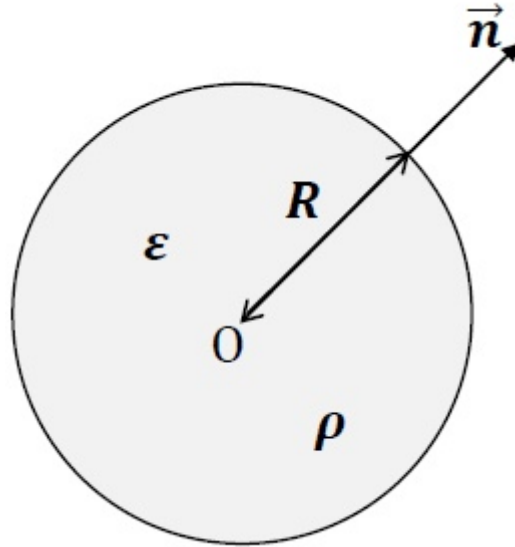
$$\Leftrightarrow r^2 D(r) = \int \frac{3\varepsilon k q r^2 dr}{R^3} = \frac{\varepsilon k q r^3}{R^3} + A$$

$r^2 D(r) = 0$ pour $r = 0 \Rightarrow A = 0$.

$$\Leftrightarrow \vec{D} = \varepsilon k \frac{qr}{R^3} \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = k \frac{qr}{R^3} \vec{n}$$

L'équation locale du théorème de Gauss à l'extérieur de la sphère s'écrit :

$$\text{div} \vec{D}_0 = \text{div}(D_0(r) \vec{n}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_0(r)) = 0$$



$$\Leftrightarrow r^2 D_0(r) = B \quad \Leftrightarrow \quad \vec{D}_0 = \frac{B}{r^2} \vec{n}$$

La surface qui sépare la sphère et le vide n'est pas chargée ($\sigma = 0$) d'où la continuité de $\vec{D} = D(r) \vec{n}$ à la traversée de cette surface, soit :

$$D_0(R) = D(R) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B}{R^2} = \frac{\varepsilon k q}{R^2} \quad \Rightarrow \quad B = \varepsilon k q$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{D}_0 = \varepsilon k \frac{q}{r^2} \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{E}_0 = \frac{\vec{D}_0}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r k \frac{q}{r^2} \vec{n}$$

3) Polarisation :

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) k \frac{q r}{R^3} \vec{n}$$

4) Charges de polarisation :

$$\sigma_p = \vec{P}(R) \cdot \vec{n} = (\varepsilon - \varepsilon_0) k \frac{q}{R^2}$$

$$\rho_p = -\text{div} \vec{P}(r) = -(\varepsilon - \varepsilon_0) k \frac{q}{R^3} \underbrace{\text{div} \vec{r}}_3 = -3(\varepsilon - \varepsilon_0) k \frac{q}{R^3}$$

$$Q_{pT} = \sigma_p 4\pi R^2 + \rho_p \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi(\varepsilon - \varepsilon_0) k q - 4\pi(\varepsilon - \varepsilon_0) k q = 0$$

5) L'équation locale de Gauss :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0}$$

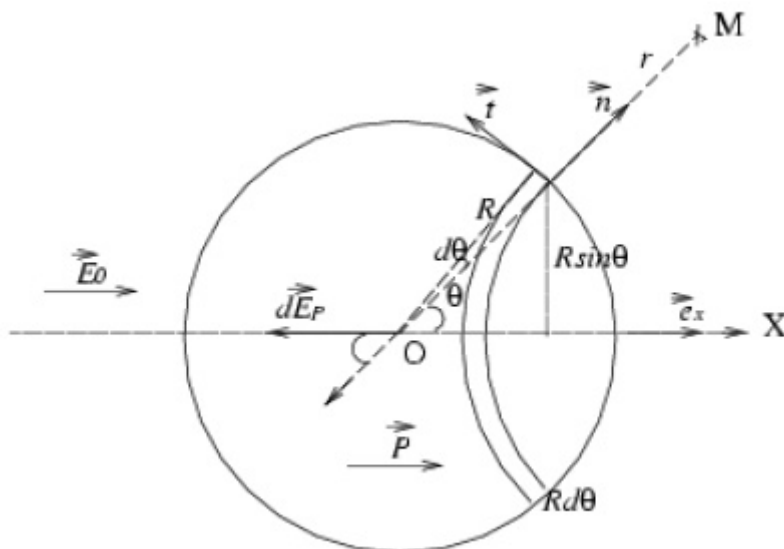
$$\Rightarrow \rho_p = \rho \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1 \right) = -\rho \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} = -3(\varepsilon - \varepsilon_0)k \frac{q}{R^3}$$

6) Relation de passage :

$$\vec{n}(\vec{E}_0 - \vec{E})_{r=R} = \varepsilon_r k \frac{q}{R^2} - k \frac{q}{R^2} = (\varepsilon_r - 1)k \frac{q}{R^2} = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}$$

La loi de continuité est bien vérifiée.

Exercice 3 : Soit un volume diélectrique (l.h.i) de permittivité relative ε_r , de forme sphérique de rayon R , placé dans un champ extérieur uniforme \vec{E}_0 . On admettra que la polarisation \vec{P} est uniforme à l'intérieur de ce volume.



1. Tous les dipôles de la matière diélectrique s'orientent dans le sens du champ électrique \vec{E}_0 , d'où : $\vec{P} = P \vec{e}_x$. Et puisque \vec{E}_0 est uniforme, la polarisation \vec{P} sera aussi uniforme. La densité superficielle de charges de polarisation est

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \vec{e}_x \cdot \vec{n} = P \cos \theta$$

et la densité volumique de charges de polarisation est

$$\rho_p = -\text{div} \vec{P} = 0$$

2. Par raison de symétrie, le champ dépolarisant élémentaire au centre de la sphère, créé par l'anneau d'épaisseur $R d\theta$ et de rayon $R \sin \theta$ est

$$d\vec{E}_p(O) = \frac{\sigma_p dS}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cos \theta (-\vec{e}_x) = -\frac{P \cos \theta 2\pi R \sin \theta R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cos \theta \vec{e}_x$$

$$= -\frac{\vec{P}}{2\varepsilon_0} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

d'où le champ dépolarisant au centre de la sphère :

$$\vec{E}_p(\text{O}) = -\frac{\vec{P}}{2\varepsilon_0} \underbrace{\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta}_{-\frac{\cos^3 \theta}{3}} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

Dans le diélectrique l.h.i :

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{E}_p = \vec{E} - \vec{E}_0 = \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)} - \vec{E}_0 = -\frac{3\vec{E}_p}{(\varepsilon_r - 1)} - \vec{E}_0$$

d'où :

$$\vec{E}_p = \frac{1 - \varepsilon_r}{2 + \varepsilon_r} \vec{E}_0$$

3.

- $\varepsilon_r = 1$ (cas du vide) : $\vec{E}_p = \vec{0} \rightarrow$ pas de champ dépolarisant.
- $\varepsilon_r = \infty$: $\vec{E}_p = -\vec{E}_0$ et $\vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_0 = \vec{0} \rightarrow$ cas d'un conducteur.

4. Le champ total à l'intérieur du diélectrique est

$$\vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_0 = \left(\frac{1 - \varepsilon_r}{2 + \varepsilon_r} + 1\right) \vec{E}_0 = \frac{3}{2 + \varepsilon_r} \vec{E}_0$$

La polarisation est

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = 3\varepsilon_0 \frac{(\varepsilon_r - 1)}{2 + \varepsilon_r} \vec{E}_0$$

et le déplacement électrique est

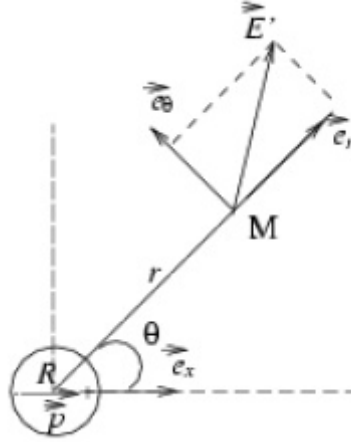
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r}{2 + \varepsilon_r} \vec{E}_0$$

5. L'énergie électrostatique W de la sphère diélectrique est

$$W = \int \frac{1}{2} \varepsilon E^2 d\tau = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{9}{(2 + \varepsilon_r)^2} E_0^2 \underbrace{\frac{4}{3} \pi R^3}_\tau = 6\pi \varepsilon_0 R^3 \frac{\varepsilon_r}{(2 + \varepsilon_r)^2} E_0^2$$

6. En admettant que le champ extérieur créé par les charges de polarisation est équivalent à celui d'un dipôle électrique de moment $\vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{P}$.

La sphère se comporte donc comme un dipôle électrique pour les grandes distances ($r \gg R$).



a. Le champ dépolarisant créé par le dipôle $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$ au point M est

$$\begin{aligned} \vec{E}_p(M) &= \frac{2p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta = \frac{2P \cos \theta}{3\epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \vec{e}_r + \frac{P \sin \theta}{3\epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \vec{e}_\theta \\ &= \frac{\epsilon_r - 1}{2 + \epsilon_r} \left(\frac{R}{r}\right)^3 E_0 (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \end{aligned}$$

b. Le champ électrique total au point M est

$$\begin{aligned} \vec{E}_e(M) &= E_0 \vec{e}_x + \vec{E}_p(M) \\ &= E_0 \cos \theta \left[2 \frac{\epsilon_r - 1}{2 + \epsilon_r} \left(\frac{R}{r}\right)^3 + 1 \right] \vec{e}_r + E_0 \sin \theta \left[\frac{\epsilon_r - 1}{2 + \epsilon_r} \left(\frac{R}{r}\right)^3 - 1 \right] \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

c. A l'extérieur du diélectrique, le déplacement électrique est

$$\vec{D}_e(M) = \epsilon_0 \vec{E}_e(M) = \epsilon_0 E_0 \cos \theta \left[2 \frac{\epsilon_r - 1}{2 + \epsilon_r} \left(\frac{R}{r}\right)^3 + 1 \right] \vec{e}_r + \epsilon_0 E_0 \sin \theta \left[\frac{\epsilon_r - 1}{2 + \epsilon_r} \left(\frac{R}{r}\right)^3 - 1 \right] \vec{e}_\theta$$

et la polarisation est

$$\vec{P}_e(M) = \vec{D}_e(M) - \epsilon_0 \vec{E}_e(M) = \vec{0}$$

d. Sur la surface de séparation (surface de la sphère), on a : $r = R$, le vecteur normal à la surface ($= \vec{e}_r$) et le vecteur tangent ($= \vec{e}_\theta$), d'où :

- à l'intérieur du diélectrique :

$$\vec{E} = \frac{3}{2 + \epsilon_r} E_0 [\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta]$$

$$\vec{D} = \frac{3\epsilon_0\epsilon_r}{2 + \epsilon_r} E_0 [\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta]$$

- à l'extérieur du diélectrique :

$$\vec{E}_e = E_0 \cos \theta \left[2 \frac{\epsilon_r - 1}{2 + \epsilon_r} + 1 \right] \vec{e}_r + E_0 \sin \theta \left[\frac{\epsilon_r - 1}{2 + \epsilon_r} - 1 \right] \vec{e}_\theta$$

$$= \frac{3}{2 + \varepsilon_r} E_0 [\varepsilon_r \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta]$$

$$\vec{D}_e = \frac{3\varepsilon_0}{2 + \varepsilon_r} E_0 [\varepsilon_r \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta]$$

Ces relations montrent que

$$(D_e)_n = (D)_n \quad \text{et} \quad (E_e)_t = (E)_t$$

Les lois de continuité des champs \vec{E} et \vec{D} sont alors vérifiées.

Milieux aimantés

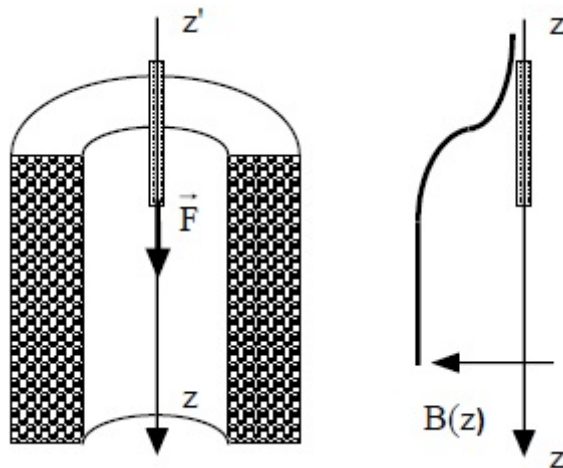
Série N°3

Exercice 1 : Cette expérience vous a été décrite en cours en introduction à l'étude des milieux magnétiques. Si l'on place un élément de matière sur l'axe Oz d'une bobine produisant un champ magnétique intense (de l'ordre de quelques Teslas), il est possible de détecter l'existence d'une force s'exerçant sur cet élément. Cette force est proportionnelle au gradient de champ magnétique existant sur l'axe. Elle présente la particularité étonnante d'être très variable en sens et en intensité selon les matériaux.

Sachant que la résultante des forces de Laplace subies par une boucle élémentaire de courant, de moment magnétique \vec{m} et placée dans un champ magnétique inhomogène \vec{B} s'écrit :

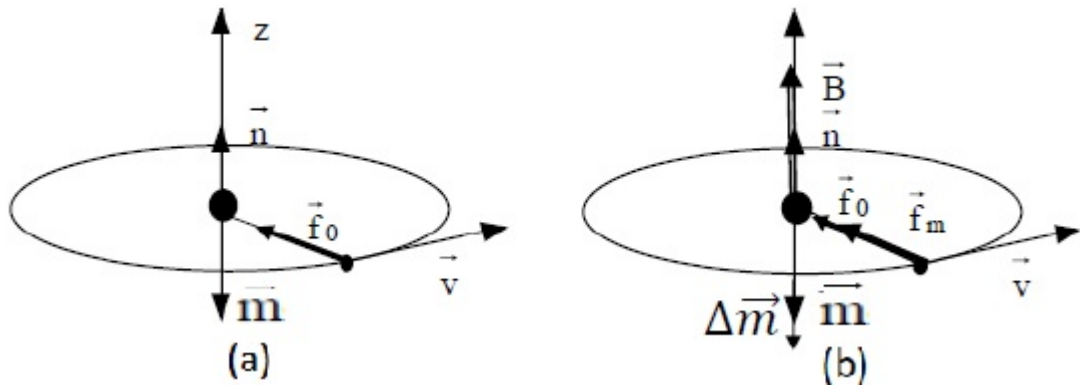
$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{m} \cdot \vec{B}),$$

donner la force par unité de volume \vec{f} s'exerçant sur un élément de volume $d\tau$ d'un matériau magnétique d'aimantation \vec{M} et expliquer le comportement différent des milieux diamagnétiques, paramagnétiques et ferromagnétiques.



Exercice 2 - Théorie simplifiée du diamagnétisme

Selon le modèle atomique de Bohr, l'électron décrit des orbites circulaires



quantifiées. Considérons donc un électron de masse m_e tournant avec une vitesse angulaire ω_0 sur une orbite circulaire de rayon r (figure (a)).

1) Donner l'expression de la force \vec{f}_0 à laquelle est soumis cet électron, ainsi que celle de l'intensité du courant transportée par un électron en mouvement autour du noyau. En déduire le moment magnétique orbital en fonction de la charge e , r , ω_0 et \vec{n} , normale unitaire au plan de la trajectoire.

2) On applique un champ extérieur \vec{B} , tel que $\vec{B} = B\vec{n}$. On suppose que l'orbite de l'électron garde le même rayon r (figure (b)). Montrer que dans ce cas la vitesse angulaire de l'électron doit changer et prendre une valeur ω . On pose $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ et l'on suppose $\Delta\omega \ll \omega_0$. Montrer que $\Delta\omega = \frac{eB}{2m_e}$.

3) Montrer alors que le moment magnétique orbital de l'électron subit une modification $\Delta\vec{m}$ que l'on exprimera en fonction de e , r , m_e et B .

4) Pour une substance contenant n atomes par unité de volume (ayant Z électrons en mouvement autour du noyau), déduire l'aimantation \vec{M} .

5) Comment expliquer alors le diamagnétisme des substances ?

Exercice 3 : Un long cylindre d'axe Oz, de vecteurs de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et de rayon R porte une aimantation de la forme :

$$\vec{M} = k \frac{r^2}{R^2} \vec{e}_\theta,$$

r est la distance d'un point P du cylindre par rapport à l'axe Oz et k est une constante positive.

1) Quelle est la dimension de k ?

2) Calculer les densités de courants d'aimantation surfacique \vec{k}_a et volumique \vec{j}_a . En déduire le courant total d'aimantation I_a .

3) Calculer le champ magnétique \vec{B}_m dû à l'aimantation en tout point de l'espace.

4) Vérifier la relation de passage à travers la surface du cylindre magnétique. On donne en coordonnées cylindriques : $\vec{rot}(A(r)\vec{u}_\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA(r))\vec{u}_z$.

Exercice 4 :

On considère une plaque paramagnétique (l.h.i) de susceptibilité magnétique $\chi_m > 0$, d'épaisseur d dans la direction Ox et infinie dans les deux autres directions de l'espace.

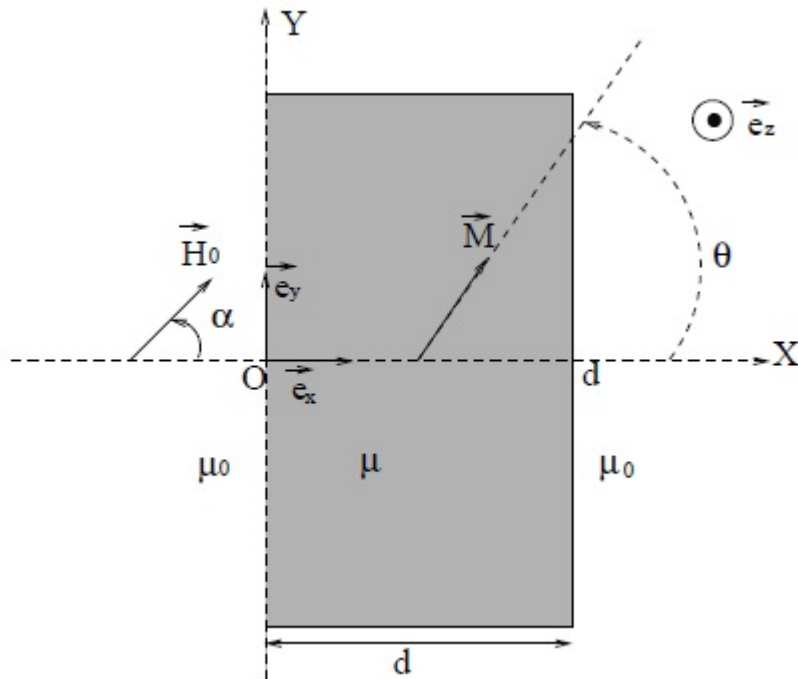
On introduit cette plaque dans une région où règne une excitation

$$\vec{H}_0 = H_0 \cos \alpha \vec{e}_x + H_0 \sin \alpha \vec{e}_y,$$

uniforme et faisant un angle α avec l'axe Ox d'un repère orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

La plaque est supposée uniformément aimantée d'aimantation \vec{M} .

1) Exprimer les vecteurs excitation magnétique \vec{H} et champ magnétique \vec{B} à l'intérieur de la plaque en fonction de χ_m , α , H_0 et des vecteurs de base



adéquats (μ_0 est la perméabilité du vide).

2) En déduire le champ démagnétisant \vec{B}_m à l'intérieur de la plaque.

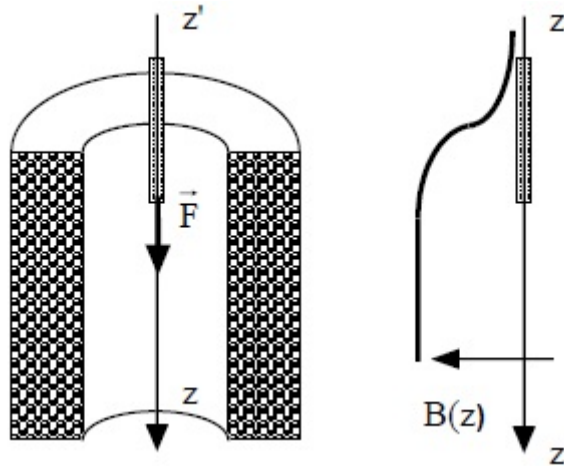
3) Exprimer le vecteur aimantation \vec{M} à l'intérieur de la plaque en fonction de χ_m , α , H_0 et des vecteurs de base adéquats.

4) Calculer les densités de courants d'aimantation surfaciques \vec{k}_{a1} sur le plan d'abscisse $x = 0$ et \vec{k}_{a2} sur le plan d'abscisse $x = d$.

5) Le vecteur aimantation \vec{M} fait un angle θ avec Ox (voir figure ci-dessus). Trouver une relation entre les angles α et θ . Quel phénomène concernant la direction des lignes de champ, observe-t-on à la traversée des deux plans ?

CORRIGÉ

Exercice 1 : La force élémentaire s'exerçant sur un élément de volume $d\tau$

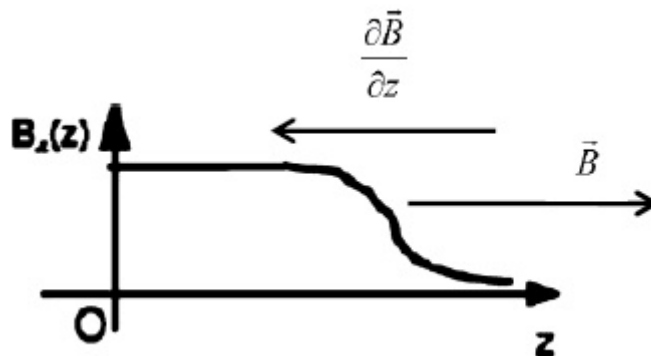


d'un matériau magnétique d'aimantation \vec{M} s'écrit :

$$d\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(d\vec{m} \cdot \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M} \cdot \vec{B})d\tau$$

$$\vec{B}(z) \Rightarrow \vec{f} = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M} \cdot \vec{B}) = (\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}) \vec{e}_z = f_z \vec{e}_z$$

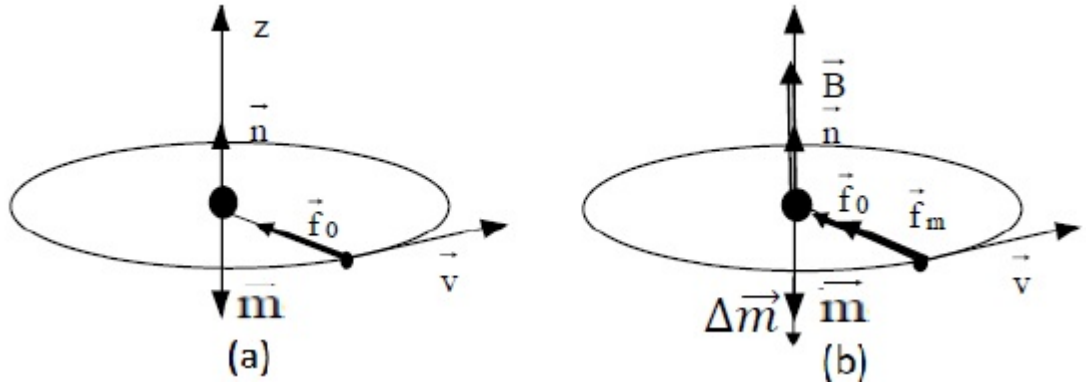
Pour un matériau diamagnétique, l'aimantation \vec{M} est opposée à \vec{B} . Elle est dans le même sens que le gradient de \vec{B} ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$) (voir courbe de $B(z)$ ci-dessous); $f_z > 0 \Rightarrow \vec{f}$ est donc dirigée suivant les z positifs. Les diamagnétiques sont repoussés par les régions de champ intense.



Pour un matériau paramagnétique (ou ferromagnétique), l'aimantation \vec{M} est du même sens que \vec{B} . Elle est de sens opposé au gradient de \vec{B} ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$); \vec{f} est donc dirigée suivant les z négatifs. Les paramagnétiques (ferromagnétiques) sont attirés par les régions de champ intense.

Exercice 2 - Théorie simplifiée du diamagnétisme

Selon le modèle atomique de Bohr, l'électron décrit des orbites circulaires quantifiées. Considérons donc un électron de masse m_e tournant avec une vitesse angulaire ω_0 sur une orbite circulaire de rayon r (figure (a)).



1) La force à laquelle est soumis l'électron est

$$\vec{f}_0 = -m_e \frac{v^2}{r} \vec{e}_r = -m_e r \omega_0^2 \vec{e}_r.$$

L'intensité du courant transportée par un électron en mouvement autour du noyau est

$$I = \frac{e}{T} = e \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

D'où le moment magnétique orbital (règle du tire-bouchon) :

$$\vec{m} = -IS\vec{n} = -e \frac{\omega_0}{2} r^2 \vec{n}.$$

2) On applique un champ extérieur \vec{B} , tel que $\vec{B} = B\vec{n}$

On suppose que l'orbite de l'électron garde le même rayon r (figure (b)).

La force résultante à laquelle est soumis l'électron est

$$-m_e r \omega^2 \vec{e}_r = \vec{f}_0 - e \vec{v} \wedge \vec{B} = -m_e r \omega_0^2 \vec{e}_r - e r \omega_0 \vec{e}_\theta \wedge B \vec{n} = -(m_e r \omega_0^2 + e r \omega_0 B) \vec{e}_r.$$

D'où :

$$m_e \omega^2 + e \omega_0 B = m_e \omega^2 \approx m_e \omega_0^2 + 2m_e \omega_0 \Delta\omega \quad (\Delta\omega \ll \omega_0)$$

Soit :

$$\Delta\omega = \frac{eB}{2m_e}$$

3) Le moment magnétique orbital de l'électron subit alors une modification

$$\Delta \vec{m} = -e \frac{\Delta \omega}{2} r^2 \vec{n} = -\frac{e^2 r^2}{4m_e} B \vec{n}.$$

4) Pour une substance contenant n atomes par unité de volume (ayant Z électrons en mouvement autour du noyau) :

$$\Delta \vec{m} = -\frac{Z e^2 r^2}{4m_e} \vec{B}.$$

D'où l'aimantation :

$$\vec{M} = n \Delta \vec{m} = -\frac{Z n e^2 r^2}{4m_e} \vec{B}.$$

5) Le diamagnétisme des substances est une aimantation électronique. En effet, la présence d'un champ magnétique extérieur modifie la vitesse des électrons autour du noyau, ce qui entraîne la création d'un moment magnétique local (et donc une aimantation $\vec{M} = -\frac{Z n e^2 r^2}{4m_e} \vec{B}$) qui s'oppose au champ extérieur.

Exercice 3 : Un long cylindre d'axe Oz, de vecteurs de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ et de rayon R porte en un point P une aimantation de la forme :

$$\vec{M}(P) = k \frac{r^2}{R^2} \vec{u}_\theta,$$

1) $[k] = [M] = \text{A/m}$ (c'est aussi la dimension de courant surfacique).

2) La densité de courant d'aimantation surfacique est

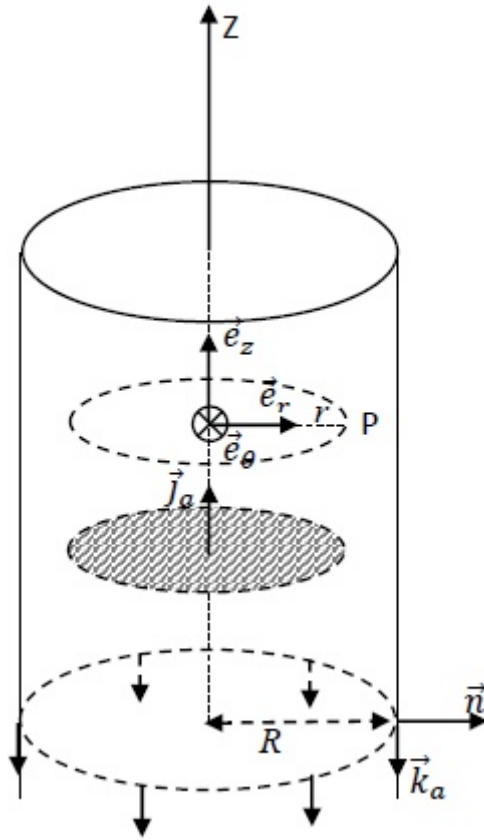
$$\vec{k}_a = \vec{M}(R) \wedge \vec{n} = k \frac{R^2}{R^2} \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = -k \vec{e}_z$$

et la densité de courant d'aimantation volumique est

$$\vec{j}_a = \text{rot} \vec{M} = \text{rot}(M(r) \vec{e}_\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M(r)) \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (k \frac{r^3}{R^2}) \vec{e}_z = 3k \frac{r}{R^2} \vec{e}_z.$$

Le courant total d'aimantation est

$$\begin{aligned} I_a &= \int_0^{2\pi} \vec{k}_a \cdot \underbrace{d\ell}_{R d\varphi} \vec{e}_z + \int_0^R \vec{j}_a \cdot \underbrace{dS}_{2\pi r dr} \vec{e}_z = -k 2\pi R + 3k \frac{2\pi}{R^2} \int_0^R r^2 dr \\ &= -k 2\pi R + 3k \frac{2\pi}{R^2} \frac{R^3}{3} = 0. \end{aligned}$$



3) Pour calculer le champ magnétique \vec{B}_m dû à l'aimantation en tout point de l'espace, nous appliquons le théorème d'ampère sur un contour circulaire (C) de rayon r et d'axe Oz :

$$\oint_{(C)} \vec{B}_m \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (\sum I_a)_{\text{int}}.$$

Pour un point à l'intérieur du matériau magnétique ($r < R$), on a :

$$B_m 2\pi r = \mu_0 \int_0^r \vec{J}_a \cdot \underbrace{dS}_{2\pi r dr} \vec{e}_z = 3\mu_0 k \frac{2\pi r^3}{R^2} \frac{1}{3} = \mu_0 2\pi k \frac{r^3}{R^2}$$

d'où :

$$\vec{B}_m = \mu_0 k \frac{r^2}{R^2} \vec{e}_\theta = \mu_0 \vec{M}.$$

Pour un point à l'extérieur ($r > R$), on a :

$$B_m 2\pi r = \mu_0 I_a = 0$$

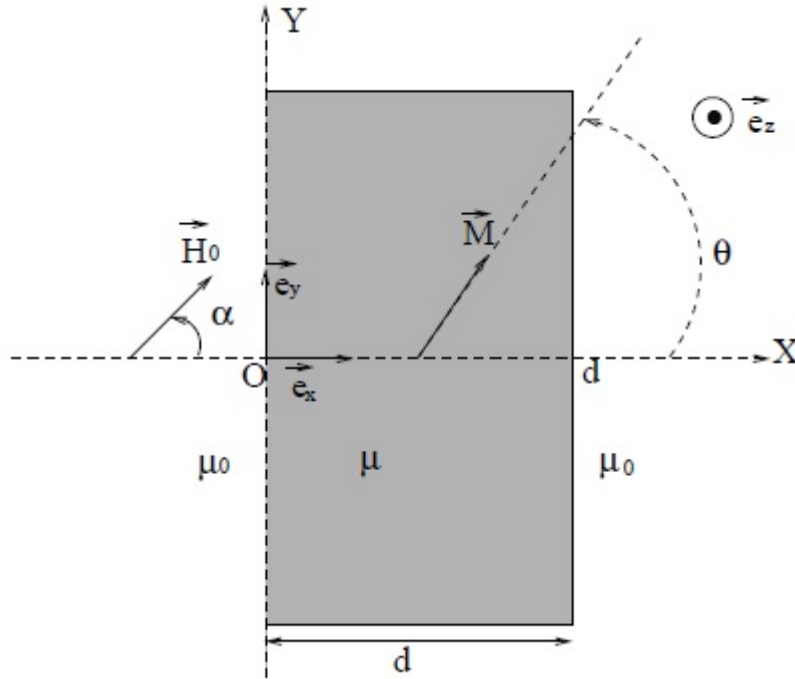
d'où :

$$\vec{B}_m = \vec{0}.$$

4) La relation de passage à travers la surface du cylindre magnétique s'écrit :

$$\vec{n} \wedge (\vec{B}_{\text{ext}} - \vec{B}_{\text{int}})_{r=R} = \vec{e}_r \wedge (\vec{0} - \mu_0 k \frac{R^2}{R^2} \vec{e}_\theta) = -\mu_0 k \vec{e}_z = \mu_0 \vec{k}_a.$$

Exercice 4 :



1) Les relations de passage entre le vide et le milieu magnétique à la traversée de la 1^{ère} face (le vecteur normal $\vec{n} = \vec{e}_x$ et le vecteur tangent $\vec{t} = \vec{e}_y$) sont

$$H_t = H_{t0} = H_0 \sin \alpha \quad (\text{la surface de séparation n'est parcourue par aucun courant réel})$$

$$B_n = B_{n0} \Rightarrow \mu_0(1 + \chi_m)H_n = \mu_0 H_{n0} = \mu_0 H_0 \cos \alpha \Rightarrow H_n = \frac{H_0}{1 + \chi_m} \cos \alpha$$

D'où

$$\vec{H} = \frac{1}{1 + \chi_m} H_0 \cos \alpha \vec{e}_x + H_0 \sin \alpha \vec{e}_y$$

et

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0 H_0 \cos \alpha \vec{e}_x + \mu_0(1 + \chi_m)H_0 \sin \alpha \vec{e}_y$$

2) Le champ démagnétisant \vec{B}_m s'obtient à partir du champ magnétique total \vec{B} par la relation :

$$\vec{B}_m = \vec{B} - \vec{B}_0,$$

d'où :

$$\vec{B}_m = \vec{B} - \mu_0 \vec{H}_0 = \mu_0 \chi_m H_0 \sin \alpha \vec{e}_y$$

3) Le vecteur aimantation est

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} H_0 \cos \alpha \vec{e}_x + \chi_m H_0 \sin \alpha \vec{e}_y$$

4) Les densités superficielles de courant d'aimantation sont

$$\vec{k}_{a1} = \vec{M} \wedge \vec{n}_1 = \vec{M} \wedge (-\vec{e}_x) = \chi_m H_0 \sin \alpha \vec{e}_z$$

$$\vec{k}_{a2} = \vec{M} \wedge \vec{n}_2 = \vec{M} \wedge \vec{e}_x = -\chi_m H_0 \sin \alpha \vec{e}_z$$

5) Le vecteur aimantation \vec{M} fait un angle θ avec Ox, d'où :

$$\vec{M} = M \cos \theta \vec{e}_x + M \sin \theta \vec{e}_y = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} H_0 \cos \alpha \vec{e}_x + \chi_m H_0 \sin \alpha \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow M \cos \theta = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} H_0 \cos \alpha \quad \text{et} \quad M \sin \theta = \chi_m H_0 \sin \alpha$$

soit :

$$\tan \theta = (1 + \chi_m) \tan \alpha$$

$$\chi_m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \neq \alpha$$

α étant l'angle que fait \vec{H}_0 (et \vec{B}_0) avec l'axe Ox et θ l'angle que fait \vec{M} (et \vec{H} et \vec{B}) avec l'axe Ox, d'où le phénomène de réfraction des lignes de champ à la traversée des deux plans.

Milieux aimantés
Série N°4

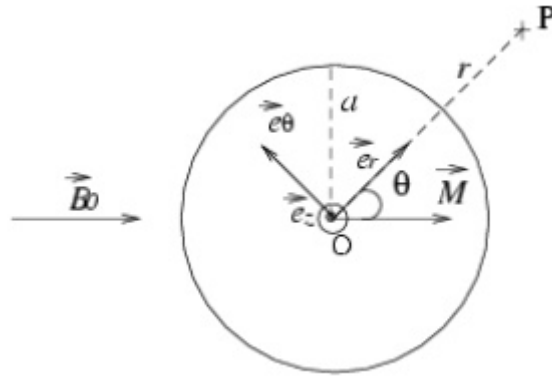
Exercice 1 : Soit un matériau magnétique l.h.i de susceptibilité constante positive χ_m , de forme sphérique de centre O et de rayon a , placé dans un champ magnétique extérieur uniforme

$$\vec{B}_0 = B_0 \cos \theta \vec{e}_r - B_0 \sin \theta \vec{e}_\theta.$$

Le vecteur aimantation \vec{M} est supposé uniforme à l'intérieur de la sphère et orienté dans le sens de \vec{B}_0 :

$$\vec{M} = M \cos \theta \vec{e}_r - M \sin \theta \vec{e}_\theta.$$

Les courants d'aimantation sont uniquement surfaciques. On repérera la position d'un point P de l'espace par $\vec{r} = \vec{OP} = r \vec{e}_r$ et $\theta = (\vec{M}, \vec{e}_r)$ et on utilisera comme vecteurs de base, les vecteurs unitaires $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et \vec{e}_z .



1. Calculer la densité surfacique de courant d'aimantation \vec{k}_a en un point P de la surface de la sphère.
2. Calculer le champ démagnétisant \vec{B}_m créé par les courants d'aimantation au centre O de la sphère.

On rappelle que le champ magnétique créé par une spire circulaire de rayon R , parcourue par un courant I , en un point O de son axe est $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta$ où θ est l'angle sous lequel le rayon de la spire est vu de O.

3. Montrer que le champ démagnétisant \vec{B}_m peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{B}_m = \frac{2\chi_m}{3 + \chi_m} \vec{B}_0$$

4. En déduire le champ magnétique total \vec{B} , l'excitation magnétique \vec{H} et l'aimantation \vec{M} au centre O de la sphère.

5. La petite sphère aimantée est assimilée à un dipôle magnétique de moment $\vec{m} = \frac{4}{3}\pi a^3 \vec{M}$.

a. En utilisant l'expression vectorielle

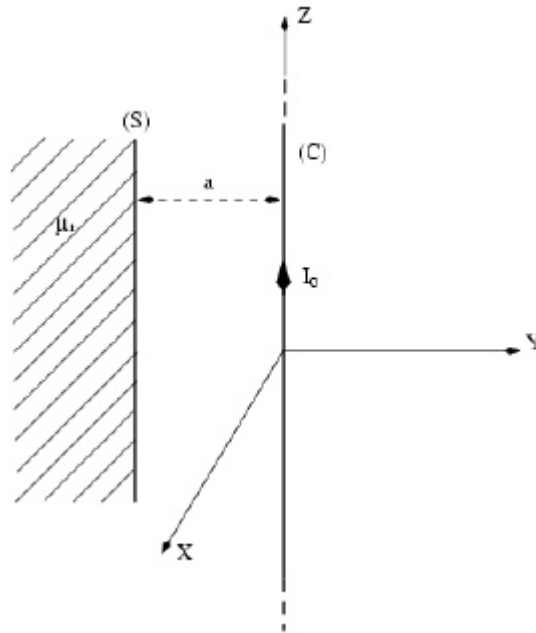
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$$

du champ magnétique créé par un dipôle magnétique en un point extérieur P, donner en fonction de χ_m , r , a , θ et B_0 le champ démagnétisant \vec{B}_m créé par la sphère aimantée en P.

b. En déduire le champ magnétique total \vec{B}_e et l'excitation magnétique \vec{H}_e en P.

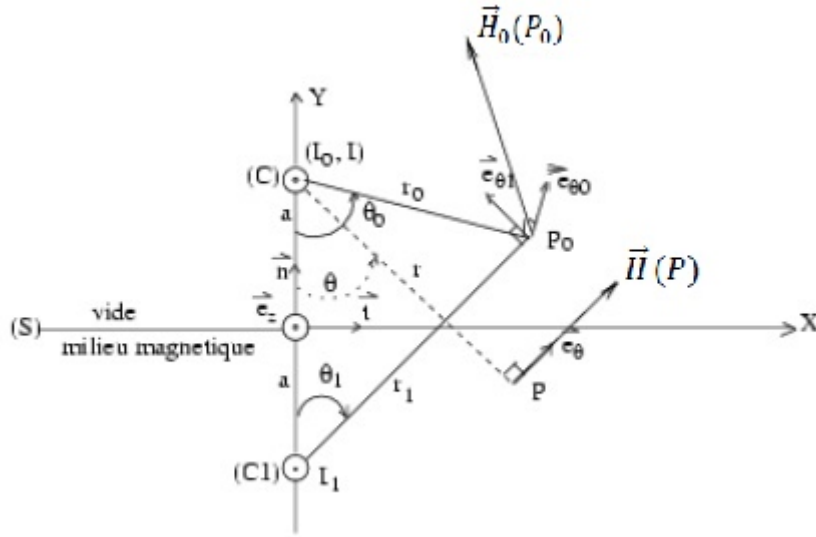
c. Les lois de continuité des champs \vec{B} et \vec{H} sont-elles respectées ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 : Un conducteur (C) rectiligne indéfini parcouru par un courant I_0 est placé dans le vide à la distance a d'un plan (S) séparant le vide d'un milieu magnétique (l.h.i) de susceptibilité constante positive χ_m .



Pour le calcul du champ d'excitation magnétique, on admet la solution suivante :

- Dans le vide, le champ d'excitation magnétique est celui produit simultanément par le conducteur (C) parcouru par un courant I_0 et par le conducteur (C1) symétrique à (C) par rapport à la surface plane (S), parcouru par



le courant I_1 :

$$\vec{H}_0(P_0) = H(I_0)\vec{e}_{\theta_0} + H(I_1)\vec{e}_{\theta_1}$$

- Dans le milieu magnétique, le champ d'excitation magnétique est celui produit par le conducteur (C) parcouru par le courant I :

$$\vec{H}(P) = H(I)\vec{e}_{\theta}$$

1. Donner les expressions de $\vec{H}_0(P_0)$ et $\vec{H}(P)$.

Rappel : le champ d'excitation magnétique \vec{H} créé par un fil infini d'axe Oz , parcouru par le courant I en un point situé à une distance r du fil, s'écrit :

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_{\theta}$$

où \vec{e}_{θ} est le vecteur tangent au cercle de rayon r et d'axe Oz , orienté par la règle du tire bouchon.

2. Montrer que si l'on prend les expressions de l'excitation magnétique $\vec{H}_0(P_0)$ (pour un point P_0 dans le vide) et $\vec{H}(P)$ (pour un point P dans le milieu magnétique), on peut satisfaire à toutes les conditions de continuité imposées à l'excitation \vec{H} et au champ \vec{B} en un point P_S de la surface de séparation, en donnant à I et I_1 des valeurs convenables que l'on déterminera en fonction de χ_m et I_0 .

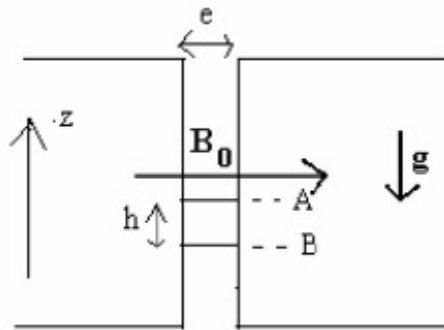
3. Calculer le vecteur aimantation \vec{M} en fonction de χ_m , I_0 et r dans le milieu magnétique.

4. Calculer la densité superficielle de courants fictifs d'aimantation \vec{k}_a en fonction de χ_m , I_0 , a et θ .

5. Calculer le courant fictif I_{as} porté par la surface de séparation (S) en fonction de χ_m et I_0 . Comparer I_{as} et I_1 .

Exercice 3 - Mise en évidence du paramagnétisme de l'oxygène liquide

On considère une petite goutte du dioxygène O_2 liquide en forme de parallélépipède en équilibre dans l'entrefer d'un électroaimant d'épaisseur e entre les niveaux repérés par A et par B, au-dessous de l'axe de l'électroaimant. Cette goutte a une hauteur h , et une largeur ℓ . On note ρ la masse volumique et χ_m la susceptibilité paramagnétique du dioxygène O_2 . Pour comprendre pourquoi la goutte peut rester en équilibre, on s'intéresse à l'action d'un champ magnétique inhomogène sur un matériau d'aimantation \vec{M} . On suppose que le champ extérieur \vec{B}_0 ne dépend que de z .



- 1) Justifier la relation $\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_0$, et en déduire la composante verticale de la force par unité de volume f_z qui s'applique sur le fluide d'aimantation \vec{M} , placé dans le champ extérieur inhomogène \vec{B}_0 . Quel serait le sens de cette force pour un matériau diamagnétique ?
- 2) En déduire la force \vec{F} qui s'exerce suivant l'axe vertical z sur la goutte du fait de l'inhomogénéité du champ.
- 3) Faire un bilan des forces qui exprime l'équilibre de la goutte et en déduire la susceptibilité χ_m de l'oxygène.

On donne la masse volumique de l'oxygène $\rho = 1.14\text{g/cm}^3$, $h = 1\text{mm}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{SI}$. Le champ magnétique B_0 vaut $0,1\text{T}$ dans le plan A et il est négligeable dans le plan B.

L'ordre de grandeur de χ_m vous semble-t-il correct ?

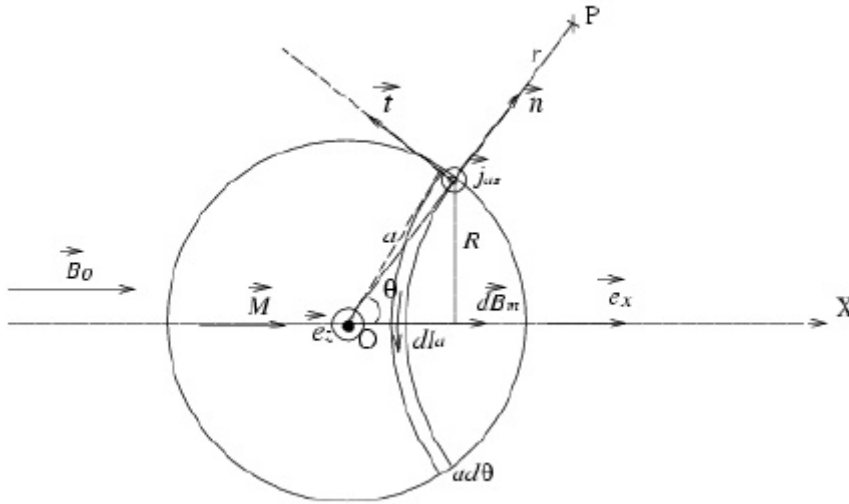
CORRIGÉ

Exercice 1 :

1. La densité surfacique de courant d'aimantation en un point P de la surface de la sphère est

$$\vec{k}_a = \vec{M} \wedge \vec{n} = \vec{M} \wedge \vec{e}_r = M \sin \theta \vec{e}_\theta$$

2. Le champ \vec{B}_m en O, produit par la matière aimantée de forme sphérique, est identique au champ produit par la nappe superficielle de courant qui circule sur la sphère creuse placée dans le vide, avec la densité de module $k_a = M \sin \theta$.



Décomposons la nappe de courant en spires d'axe dirigé suivant \vec{M} , de rayon $R = a \sin \theta$, d'épaisseur $a d\theta$ et parcourues par le courant $dI_a = k_a a d\theta = M a \sin \theta d\theta$.

Chacune de ces spires produit en O le champ magnétique, dirigé suivant \vec{M} :

$$d\vec{B}_m(O) = \frac{\mu_0 dI_a}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_x = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{M} \sin^3 \theta d\theta$$

Le champ démagnétisant en O s'écrit :

$$\vec{B}_m(O) = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{M} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$$

3. Le champ magnétique total s'écrit :

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \frac{1 + \chi_m}{\chi_m} \vec{M} = \frac{3}{2} \frac{1 + \chi_m}{\chi_m} \vec{B}_m = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$$

d'où :

$$\vec{B}_m = \frac{2\chi_m}{3 + \chi_m} \vec{B}_0$$

4. Le champ magnétique total au centre O de la sphère est

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \left(1 + \frac{2\chi_m}{3 + \chi_m}\right) \vec{B}_0 = 3 \frac{1 + \chi_m}{3 + \chi_m} \vec{B}_0$$

L'excitation magnétique au centre O de la sphère est

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0(1 + \chi_m)} \vec{B} = \frac{3}{\mu_0(3 + \chi_m)} \vec{B}_0$$

L'aimantation est

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{3\chi_m}{\mu_0(3 + \chi_m)} \vec{B}_0$$

5. a. La petite sphère aimantée est assimilée à un dipôle magnétique de moment $\vec{m} = \frac{4}{3}\pi a^3 \vec{M}$. Cette sphère crée en un point P extérieur le champ

$$\begin{aligned} \vec{B}_m &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{\mu_0}{3} a^3 \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{\mu_0}{3} M a^3 \vec{\nabla} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \\ &= -\frac{\chi_m}{3 + \chi_m} B_0 a^3 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \vec{e}_\theta \right] \\ &= \frac{\chi_m}{3 + \chi_m} B_0 \left(\frac{a}{r} \right)^3 [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta] \end{aligned}$$

b. Le champ magnétique total en P est

$$\vec{B}_e = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = B_0 \cos \theta \left[1 + 2 \frac{\chi_m}{3 + \chi_m} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \vec{e}_r + B_0 \sin \theta \left[-1 + \frac{\chi_m}{3 + \chi_m} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \vec{e}_\theta$$

L'excitation magnétique en P est

$$\vec{H}_e = \frac{\vec{B}_e}{\mu_0} = \frac{B_0}{\mu_0} \cos \theta \left[1 + 2 \frac{\chi_m}{3 + \chi_m} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \vec{e}_r + \frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta \left[-1 + \frac{\chi_m}{3 + \chi_m} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \vec{e}_\theta$$

c. Sur la surface de la sphère (surface de séparation vide-milieu magnétique) : $r = a$, le vecteur normal à la surface ($= \vec{e}_r$) et le vecteur tangent ($= \vec{e}_\theta$), d'où :

$$\begin{aligned} B_n &= 3 \frac{1 + \chi_m}{3 + \chi_m} B_0 \cos \theta \\ (B_e)_n &= B_0 \cos \theta \left[1 + 2 \frac{\chi_m}{3 + \chi_m} \right] = 3 \frac{1 + \chi_m}{3 + \chi_m} B_0 \cos \theta = B_n \\ H_t &= -\frac{3}{\mu_0(3 + \chi_m)} B_0 \sin \theta \\ (H_e)_t &= \frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta \left[-1 + \frac{\chi_m}{3 + \chi_m} \right] = -\frac{3}{\mu_0(3 + \chi_m)} B_0 \sin \theta = H_t \end{aligned}$$

Ces relations montrent que les lois de continuité des champs \vec{B} et \vec{H} sont vérifiées.

Exercice 2

1. Dans le vide :

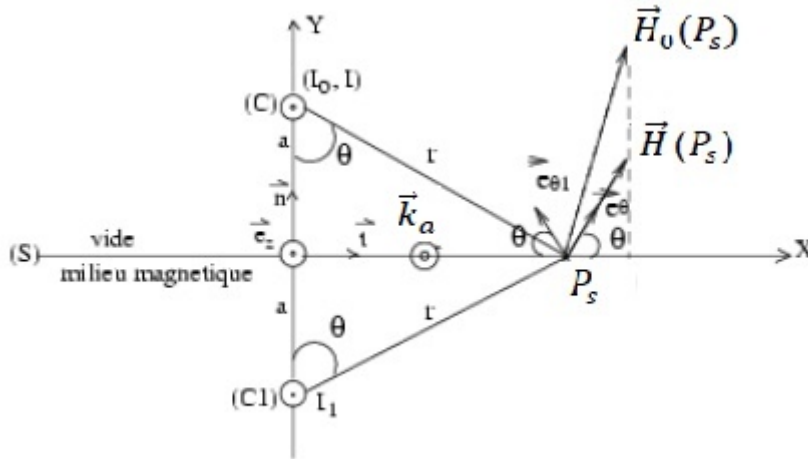
$$\vec{H}_0(P_0) = \frac{1}{2\pi r} [I_0 \vec{e}_{\theta_0} + I_1 \vec{e}_{\theta_1}]$$

Dans le milieu magnétique :

$$\vec{H}(P) = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_{\theta}$$

2. Au point P_S de la surface de séparation (vide - milieu magnétique), on a :

$$r_0 = r_1 = r, \quad \theta_0 = \theta_1 = \theta, \quad \vec{e}_{\theta_0} = \vec{e}_{\theta} = \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{e}_{\theta_1} = -\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_z$$



d'où :

$$\vec{H}_0(P_S) = \frac{1}{2\pi r} [(I_0 - I_1) \cos \theta \vec{e}_r + (I_0 + I_1) \sin \theta \vec{e}_z]$$

$$\vec{H}(P_S) = \frac{I}{2\pi r} [\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_z]$$

$$\vec{B}_0(P_S) = \mu_0 \vec{H}_0(P_S) = \frac{\mu_0}{2\pi r} [(I_0 - I_1) \cos \theta \vec{e}_r + (I_0 + I_1) \sin \theta \vec{e}_z]$$

$$\vec{B}(P_S) = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H}(P_S) = \mu_0(1 + \chi_m) \frac{I}{2\pi r} [\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_z]$$

Appliquons les relations de passage entre le vide et le milieu magnétique à la traversée de la surface (S) :

$$H_t = H_{t0} \quad \Rightarrow \quad I_0 - I_1 = I$$

$$B_n = B_{n0} \quad \Rightarrow \quad I_0 + I_1 = (1 + \chi_m)I$$

d'où :

$$2I_0 = (2 + \chi_m)I$$

soient :

$$I = \frac{2}{2 + \chi_m} I_0$$

et

$$I_1 = I_0 - I = \frac{\chi_m}{2 + \chi_m} I_0$$

3. L'aimantation à l'intérieur du milieu magnétique est

$$\vec{M}(P) = \chi_m \vec{H}(P) = \chi_m \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \frac{\chi_m}{2 + \chi_m} \frac{I_0}{\pi r} \vec{e}_\theta$$

4. La densité superficielle de courants fictifs d'aimantation est

$$\vec{k}_a = \vec{M} \wedge \vec{n} = \frac{\chi_m}{2 + \chi_m} \frac{I_0}{\pi r} (\cos \theta \vec{t} + \sin \theta \vec{n}) \wedge \vec{n} = \frac{\chi_m}{2 + \chi_m} \frac{I_0}{\pi r} \cos \theta \vec{e}_z$$

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{\cos \theta} \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_a = \frac{\chi_m}{2 + \chi_m} \frac{I_0}{\pi a} \cos^2 \theta \vec{e}_z$$

5. Le courant fictif porté par la surface de séparation (S) est

$$I_{as} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{k}_a \cdot dx \vec{e}_z = \frac{\chi_m}{2 + \chi_m} \frac{I_0}{\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 \theta dx$$

$$\tan \theta = \frac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad dx = a d \tan \theta = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \quad I_{as} = \frac{\chi_m}{2 + \chi_m} \frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta = \frac{\chi_m}{2 + \chi_m} I_0 = I_1$$

Il y a donc influence totale. Résultat logique puisque dans la méthode utilisée I_{as} est remplacé par I_1 .

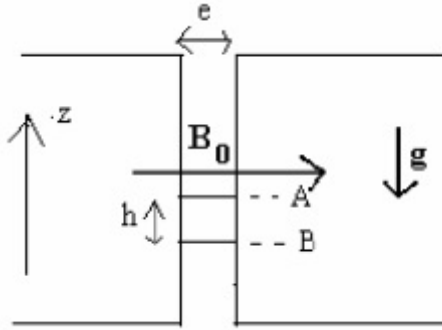
Exercice 3 - Mise en évidence du paramagnétisme de l'oxygène liquide

On considère une petite goutte de dioxygène O_2 liquide en forme de parallélépipède en équilibre dans l'entrefer d'un électroaimant d'épaisseur e entre les niveaux repérés par A et par B, au-dessous de l'axe de l'électroaimant. Cette goutte a une hauteur h , et une largeur ℓ . On note ρ la masse volumique et χ_m la susceptibilité paramagnétique du dioxygène O_2 . Pour comprendre pourquoi la goutte peut rester en équilibre, on s'intéresse à l'action d'un champ magnétique inhomogène sur un matériau d'aimantation \vec{M} .

On suppose que le champ extérieur \vec{B}_0 ne dépend que de z .

1) $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, \vec{H} est tangent à la surface de séparation (vide-goutte), d'où la continuité de \vec{H} à la traversée de cette surface :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \quad \text{et donc} \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \vec{H}_0 = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_0$$



La composante verticale de la force par unité de volume f_z qui s'applique sur le fluide d'aimantation \vec{M} , placé dans le champ extérieur inhomogène \vec{B}_0 est (voir Exercice.1 de la série N°3) :

$$f_z = \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial z} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_0 \cdot \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial z} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \frac{\partial B_0^2}{\partial z}$$

Pour un matériau diamagnétique ($\chi_m < 0$), la force est dirigée vers le bas, d'où l'impossibilité d'équilibre de la goutte.

2) La force \vec{F} qui s'exerce suivant l'axe vertical z sur la goutte du fait de l'inhomogénéité du champ est

$$\vec{F} = \iiint_{\tau} f_z d\tau \vec{e}_z = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \int_{B_B}^{B_A} \frac{\partial B_0^2}{\partial z} \ell e dz \vec{e}_z = \frac{\chi_m}{2\mu_0} (B_A^2 - B_B^2) \ell e \vec{e}_z$$

3) Le bilan des forces qui exprime l'équilibre de la goutte est

$$F = \frac{\chi_m}{2\mu_0} (B_A^2 - B_B^2) \ell e = \underbrace{\rho h \ell e g}_m$$

d'où :

$$\chi_m = 2\mu_0 \frac{\rho h g}{B_A^2 - B_B^2}$$

On donne la masse volumique de l'oxygène $\rho = 1,14 \text{g/cm}^3$, $h = 1 \text{mm}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{SI}$. Le champ magnétique B_0 vaut $0,1 \text{T}$ dans le plan A et il est négligeable dans le plan B :

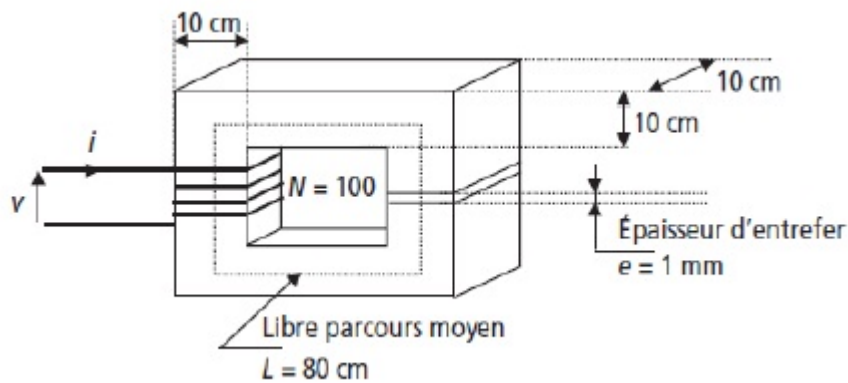
$$\chi_m = 2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{1,14 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{(0,1)^2} = 2,87 \cdot 10^{-3}$$

L'ordre de grandeur de χ_m est correct, puisque la valeur de χ_m donnée dans la littérature pour l'oxygène liquide est de l'ordre de $3 \cdot 10^{-3}$.

Circuits magnétiques
Equations de Maxwell
Série N°5

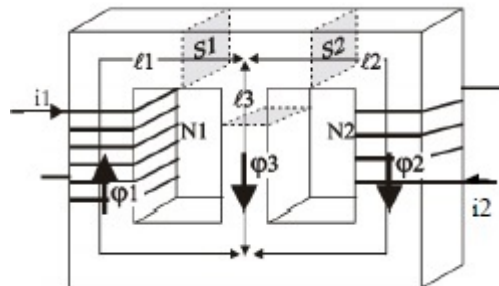
Exercice 1 : On bobine $N = 100$ spires de fil de cuivre sur le circuit magnétique représenté sur la figure ci-dessous. Le matériau utilisé est du fer de perméabilité magnétique relative $\mu_r = 528,6$.

- 1) Calculer la valeur en m^2 de la surface d'une section droite du circuit magnétique au milieu d'un des barreaux horizontaux ou verticaux.
- 2) En considérant cette section constante le long du parcours moyen, calculer la réluctance \mathfrak{R}_f du fer du circuit magnétique.
- 3) Calculer la réluctance \mathfrak{R}_a de la tranche d'air que constitue l'entrefer.



- 4) Calculer alors la réluctance totale \mathfrak{R} que représente le circuit magnétique.
- 5) En déduire la valeur de l'inductance que représentent les 100 spires bobînées sur ce circuit magnétique.
- 6) Calculer la valeur maximale B_{\max} du champ d'induction magnétique produit dans le fer lorsque l'inductance est sous la tension $v(t) = 230\sqrt{2}\sin(2\pi 50t)$. Quelle serait cette valeur si on avait choisi de ne bobiner que 10 spires ? Comment interpréter ce dernier résultat ?

Exercice 2 : Soit un circuit magnétique, représenté sur la figure ci-dessous, sur lequel sont bobinés deux enroulements de nombres de spires N_1 et N_2 et parcourus par des courants i_1 et i_2 dont les sens sont indiqués sur la figure.



$$S_1 = S_2 = \frac{3}{2}S_3 = S, \quad l_1 = l_2 = 3l_3 = l$$

$$\mu_r = 1600, \quad S = 3\text{cm}^2, \quad l = 30\text{cm}, \quad N_1 = 240, \quad N_2 = 50$$

Toutes les lignes d'induction se referment uniquement dans le circuit magnétique (les fuites sont négligées).

1. Pour simplifier l'étude de ce circuit, peut-on utiliser la loi d'Hopkinson ? Justifier votre réponse.
2. Représenter le schéma électrique équivalent avec les flux, les f.m.m et les réluctances.
3. En posant $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}$, exprimer en fonction de \mathfrak{R} , les réluctances \mathfrak{R}_2 et \mathfrak{R}_3 et donner la valeur de \mathfrak{R} .
4. Lorsque $i_2 = 0$ (pas de courant dans le bobinage 2) ;
 - a. Exprimer en fonction de \mathfrak{R} et φ_3 , les flux φ_1 et φ_2 et la f.m.m Θ_1 .
 - b. Calculer i_1 dans les N_1 spires pour avoir $B_3 = 0,8\text{T}$ dans la colonne centrale.
 - c. Déterminer l'inductance propre L_1 de la bobine de N_1 spires.
 - d. Déterminer l'inductance mutuelle M entre les deux bobines.

Exercice 3 : Onde électromagnétique

En régime variable et dans le cas d'une onde plane d'axe de propagation Ox, l'excitation magnétique s'écrit en représentation complexe dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{H}(x, t) = H_0 \exp j\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \vec{e}_y$$

où T est la période temporelle et λ la période spatiale de l'onde à l'intérieur d'une plaque paramagnétique de susceptibilité χ_m , sans charges ($\rho = 0$) ni courants ($\vec{j} = \vec{0}$), et présentant des propriétés diélectriques semblables à celles du vide de permittivité ε_0 .

- 1) Exprimer le champ magnétique $\vec{B}(x, t)$.
- 2) Ecrire les équations de Maxwell relatives à \vec{E} et \vec{B} à l'intérieur de la plaque paramagnétique.
- 3) En déduire le champ électrique $\vec{E}(x, t)$.

Les opérateurs $\vec{\nabla}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ appliqués aux vecteurs champs \vec{E} et \vec{B} peuvent s'écrire :

$$\vec{\nabla} \equiv -j \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv j \frac{2\pi}{T}$$

- 4) En utilisant l'équation : $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, montrer que

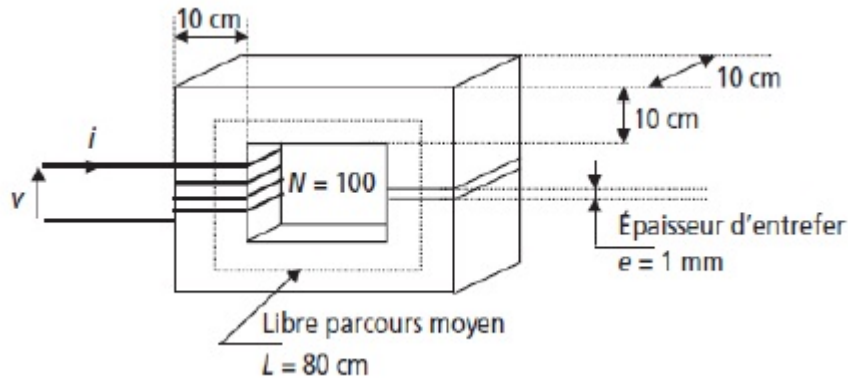
$$\vec{e}_x \wedge \vec{E} = v \vec{B}$$

où v est une constante qu'on déterminera en fonction de T et λ . Que représente v ?

- 5) En utilisant les expressions de $\vec{E}(x, t)$ et $\vec{B}(x, t)$, exprimer v en fonction de μ_0 , ε_0 et χ_m puis en fonction de la vitesse de la lumière dans le vide $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ et χ_m . Comparer v et c et conclure.

CORRIGÉ

Exercice 1 : On bobine $N = 100$ spires de fil de cuivre sur le circuit magnétique représenté sur la figure ci-dessous. Le matériau utilisé est du fer de perméabilité magnétique relative $\mu_r = 528,6$.



1) $S = 10\text{cm} \times 10\text{cm} = 100\text{cm}^2 = 10^{-2}\text{m}^2$.

2) La longueur moyenne du profil en fer est $\ell_f = \ell - e = 79,9\text{cm}$.

On considère que la section du circuit est constante (on néglige les effets de coins) et la perméabilité relative du fer est $\mu_r = 528,6$. On écrit donc la réductance :

$$\mathfrak{R}_f = \frac{\ell_f}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{79,9 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 528,6 \cdot 10^{-2}} = 120284,5 \text{H}^{-1}.$$

3) Dans la couche d'air que forme l'entrefer :

$$\mathfrak{R}_a = \frac{e}{\mu_0 S} = \frac{10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-2}} = 79577,5 \text{H}^{-1}.$$

4) Les deux circuits, fer et air, sont associés en série. La réductance totale du circuit magnétique formé sera donc :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_f + \mathfrak{R}_a = 199862 \text{H}^{-1}.$$

5) L'inductance que représentent les 100 spires du bobinage sur ce circuit est

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} = 50 \text{mH}.$$

6) La valeur maximale du champ d'induction dans le circuit magnétique sera déduite de la formule :

$$v(t) = N \frac{d\Phi}{dt} = NS \frac{dB}{dt} = V\sqrt{2} \sin(2\pi ft)$$

soit :

$$B(t) = \frac{V\sqrt{2}}{NS} \int \sin(2\pi ft) dt = \frac{V\sqrt{2}}{2\pi fNS} \sin(2\pi ft - \pi/2).$$

On en déduit :

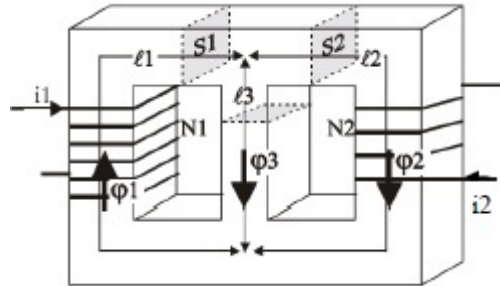
$$B_{\max} = \frac{V\sqrt{2}}{2\pi fNS} = \frac{230.\sqrt{2}}{2\pi.50.100.10^{-2}} = 1,03T.$$

Si on ne décide de bobiner que 10 spires, l'application de la formule donne :

$$B_{\max} = 10,3T.$$

Cette valeur est impossible à obtenir dans du fer et on en conclut que le circuit magnétique saturerait très fortement, ce qui ne correspond plus du tout à la linéarité attendue entre le courant et le flux. Il est donc évident que ce choix de nombre de spires ne permet pas d'aboutir à la réalisation d'une inductance constante.

Exercice 2 : Soit un circuit magnétique, représenté sur la figure ci-dessous, sur lequel sont bobinés deux enroulements de nombres de spires N_1 et N_2 et parcourus par des courants i_1 et i_2 dont les sens sont indiqués sur la figure.



1. La réluctance ne dépend que de la géométrie du circuit magnétique. Elle ne varie pas avec l'intensité du champ magnétique H (μ_r est une constante). La force magnétomotrice représente ainsi l'excitation indépendante de la géométrie du circuit, qui va générer le flux au sein du circuit. D'où l'utilisation de la relation d'Hopkinson : $\Theta = Ni = \mathfrak{R}\Phi$.

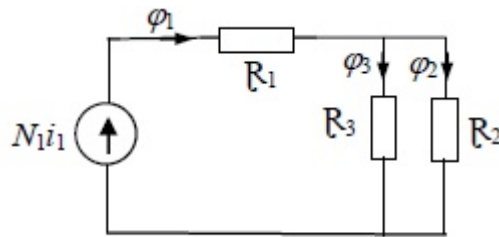
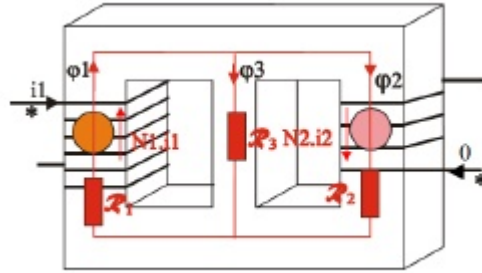
2. La figure ci-dessous représente le schéma électrique équivalent avec les flux, les f.m.m et les réluctances.

3.

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_0\mu_r S_1} = \frac{l}{\mu_0\mu_r S} = \mathfrak{R} = 497359, 2H^{-1}.$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{l_2}{\mu_0\mu_r S_2} = \frac{l}{\mu_0\mu_r S} = \mathfrak{R}.$$

$$\mathfrak{R}_3 = \frac{l_3}{\mu_0\mu_r S_3} = \frac{l/3}{\mu_0\mu_r 2S/3} = \mathfrak{R}/2.$$



4. $i_2 = 0$ (pas de courant dans le bobinage 2) :

a.

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3 \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}_2 \varphi_2 = \mathfrak{R}_3 \varphi_3$$

d'où :

$$\varphi_2 = \frac{\mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_2} \varphi_3 = \frac{\varphi_3}{2} \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3 = 3 \frac{\varphi_3}{2}.$$

$$\Theta_1 = N_1 i_1 = \underbrace{\left[\mathfrak{R}_1 + \frac{\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3} \right]}_{\mathfrak{R}_{eq}} \varphi_1 = 2 \mathfrak{R} \varphi_3.$$

b.

$$N_1 i_1 = 2 \mathfrak{R} B_3 S_3 = 4 \mathfrak{R} B_3 S / 3 = 159,15 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad i_1 = 0,663 \text{ A}.$$

c.

$$L_1 = N_1 \frac{\varphi_1}{i_1} = 3 N_1 \frac{\varphi_3}{2 i_1} = N_1 \frac{B_3 S}{i_1} \approx 87 \text{ mH}.$$

d.

$$M = N_2 \frac{\varphi_2}{i_1} = N_2 \frac{\varphi_3}{2 i_1} = N_2 \frac{B_3 S}{3 i_1} \approx 6 \text{ mH}.$$

Exercice 3 : Onde électromagnétique

En régime variable et dans le cas d'une onde plane d'axe de propagation Ox, l'excitation magnétique s'écrit en représentation complexe dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{H}(x, t) = H_0 \exp j \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \vec{e}_y$$

où T est la période temporelle et λ la période spatiale de l'onde à l'intérieur d'une plaque paramagnétique de susceptibilité χ_m , sans charges ($\rho = 0$) ni courants ($\vec{j} = \vec{0}$), et présentant des propriétés diélectriques semblables à celles du vide de permittivité ε_0 .

1) Le champ magnétique est

$$\vec{B}(x, t) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}(x, t) = \mu_0(1 + \chi_m)H_0 \exp j\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\vec{e}_y$$

2) Les équations de Maxwell sont

$$\text{div}\vec{E} = 0, \quad \text{div}\vec{B} = 0, \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0(1 + \chi_m)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

3)

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -j\frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_x \wedge \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0(1 + \chi_m)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = j\frac{2\pi}{T}\varepsilon_0\mu_0(1 + \chi_m)\vec{E}$$

$$\Rightarrow -j\frac{2\pi}{\lambda}\mu_0(1 + \chi_m)H_0 \exp j\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\vec{e}_z = j\frac{2\pi}{T}\varepsilon_0\mu_0(1 + \chi_m)\vec{E}$$

soit :

$$\vec{E}(x, t) = -\frac{T H_0}{\lambda \varepsilon_0} \exp j\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\vec{e}_z$$

4)

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -j\frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_x \wedge \vec{E} = -j\frac{2\pi}{T}\vec{B}$$

soit :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{E} = \frac{\lambda}{T}\vec{B} = v\vec{B}$$

$v = \lambda/T$ représente la vitesse de l'onde électromagnétique à l'intérieur de la plaque paramagnétique.

5)

$$\vec{e}_x \wedge \vec{E} = \frac{T H_0}{\lambda \varepsilon_0} \exp j\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\vec{e}_y = \frac{1}{v\varepsilon_0\mu_0(1 + \chi_m)}\vec{B} = v\vec{B}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0(1 + \chi_m)} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \chi_m}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_m}}$$

$\chi_m > 0 \Rightarrow v < c$: l'onde se propage à l'intérieur de la plaque avec une vitesse v inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide.