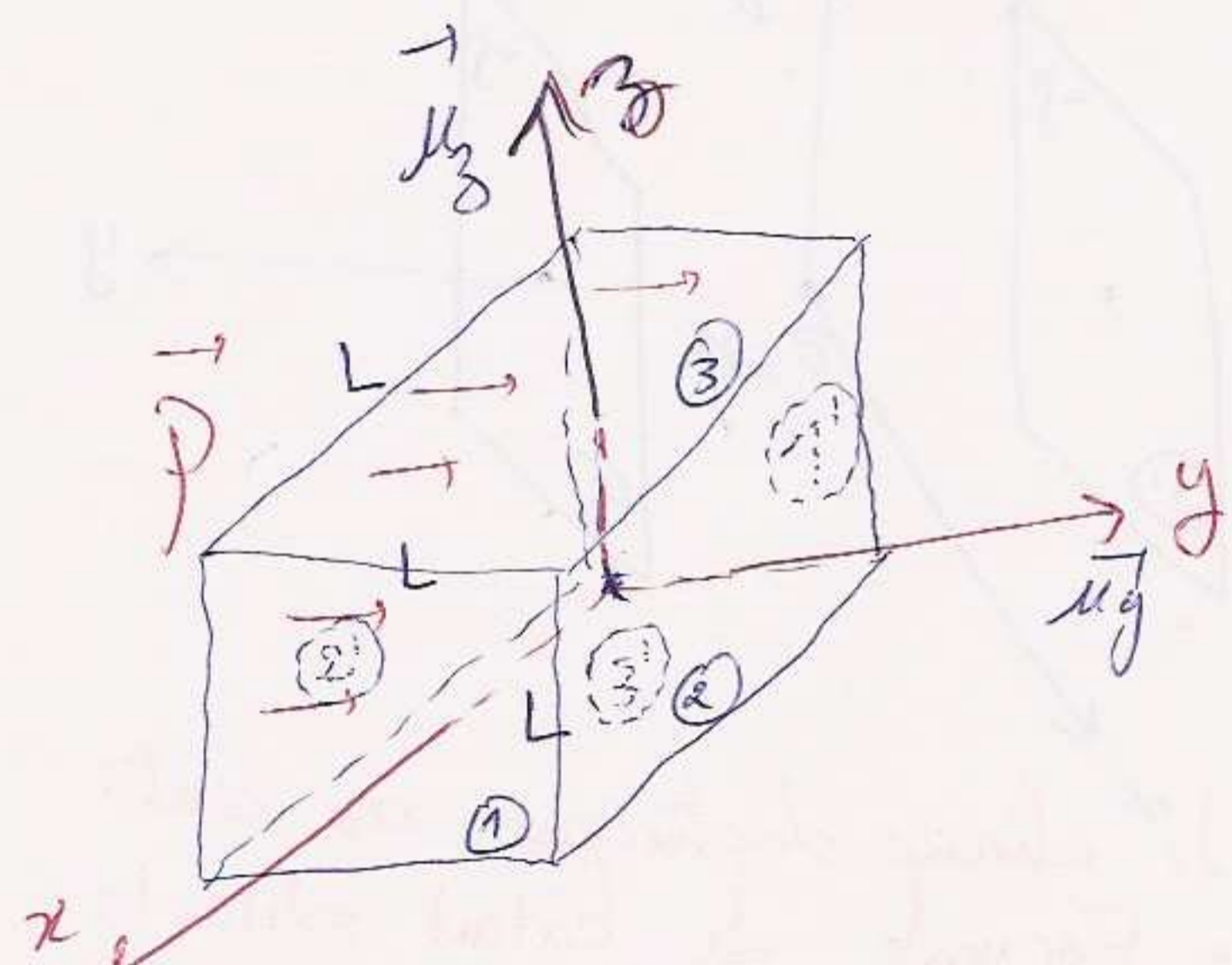
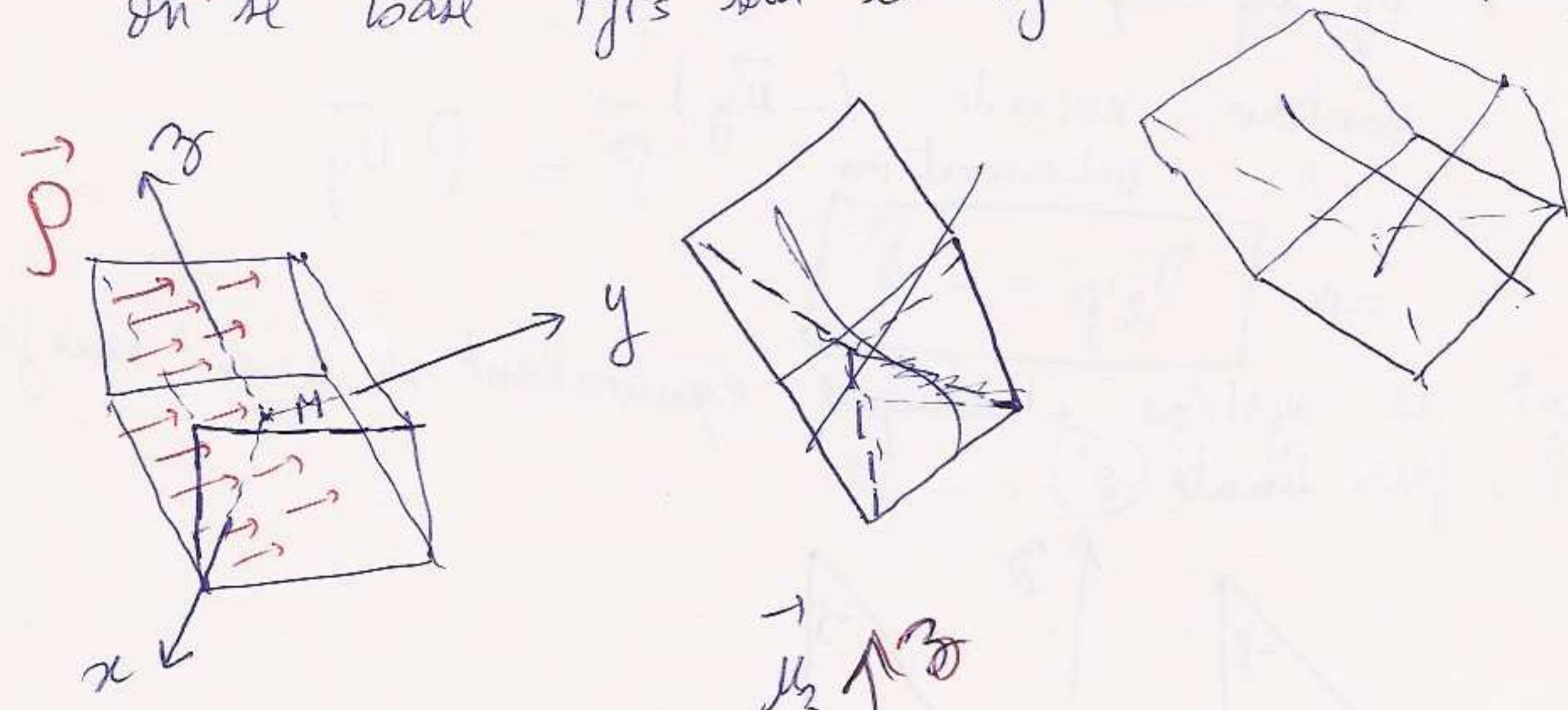


EX 3

un barreau diélectrique de forme cubique possède un vecteur de polarisation uniforme suivant l'11 de ses arêtes.

- ~~Déterminer le champ dû à cette polarisation~~
- 1° Déterminer le système électrique équivalent.
 - 2° En déduire les vecteurs champ électrique au centre du cube.

1^{ère} étape: Choix du repère et dessin:
on se base tjrs sur les symétries du dispositif étudié



2^{ème} étape: formules utilisées (pas de charges réels)
mais un vecteur de polarisation \vec{P} .
Donc les densité de polarisation sont: d'une part surfacique et d'autre part volumique

$$\rho_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P}$$

3^{ème} étape: Application: Le vecteur \vec{P} est uniforme $\Rightarrow \text{div } \vec{P} = 0$
c-a-d: $\rho_p = 0 \Rightarrow$ Le cube est chargé uniquement en surface.

Densités surfaciques de polarisation:

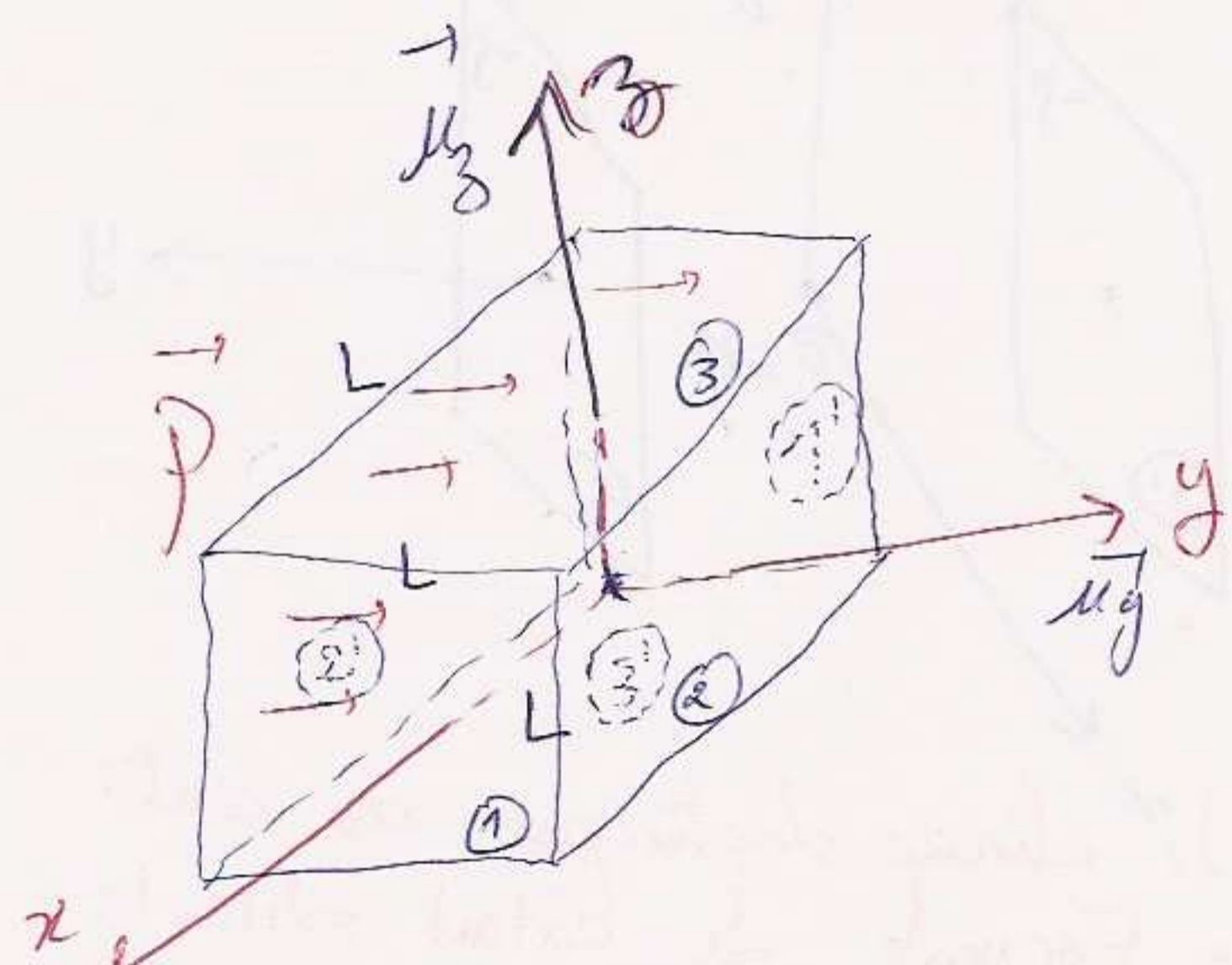
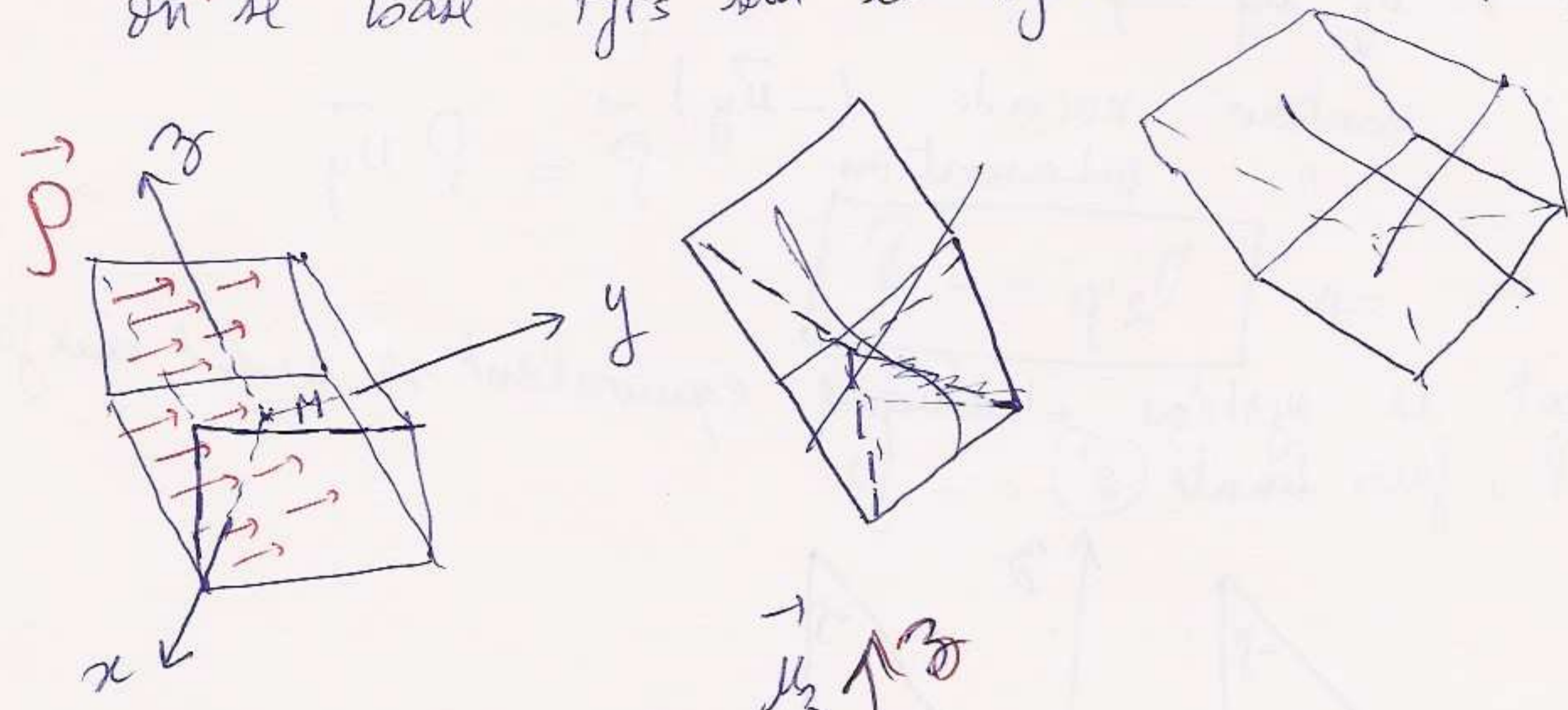
(1) Densité surfacique de polarisation sur les faces du cube autres que (2) et (6):

EX 3

un barreau diélectrique de forme cubique possède un vecteur de polarisation uniforme suivant l'1 de ses arêtes.

- ~~Déterminer le champ dû à cette polarisation~~
- 1° Déterminer le système électrique équivalent.
 - 2° En déduire les vecteurs champ électrique au centre du cube.

1^{ère} étape: Choix du repère et dessin:
on se base tjrs sur les symétries du dispositif étudié



2^{ème} étape: formules utilisées (pas de charges réels)
mais un vecteur de polarisation \vec{P} .
Donc les densité de polarisation sont: d'une part surfacique et d'autre part volumique

$$\rho_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P}$$

3^{ème} étape: Application: Le vecteur \vec{P} est uniforme $\Rightarrow \text{div } \vec{P} = 0$
c-a-d: $\rho_p = 0 \Rightarrow$ Le cube est chargé uniquement en surface.

Densités surfaciques de polarisation:

(1) Densité surfacique de polarisation sur les faces du cube autres que (2) et (6):

\vec{P} et \vec{n} qui est sont \vec{u}_3 et $(-\vec{u}_3)$ pour les faces (3) et (3')

\vec{u}_x et $(-\vec{u}_x)$ pour les faces (1) et (1')

$$\Rightarrow \sigma_{1p} = 0, \sigma_{1p'} = 0, \sigma_{3p} = 0, \sigma_{3p'} = 0$$

* Densités surfaciques de polarisation sur les faces (2) et (2')

face (2): vecteur normale dirigé (vers l'ext. "surface fermée") \vec{u}_y

" polarisation: $\vec{p} = P \cdot \vec{u}_y$

$$\sigma_{2p} = P \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = P$$

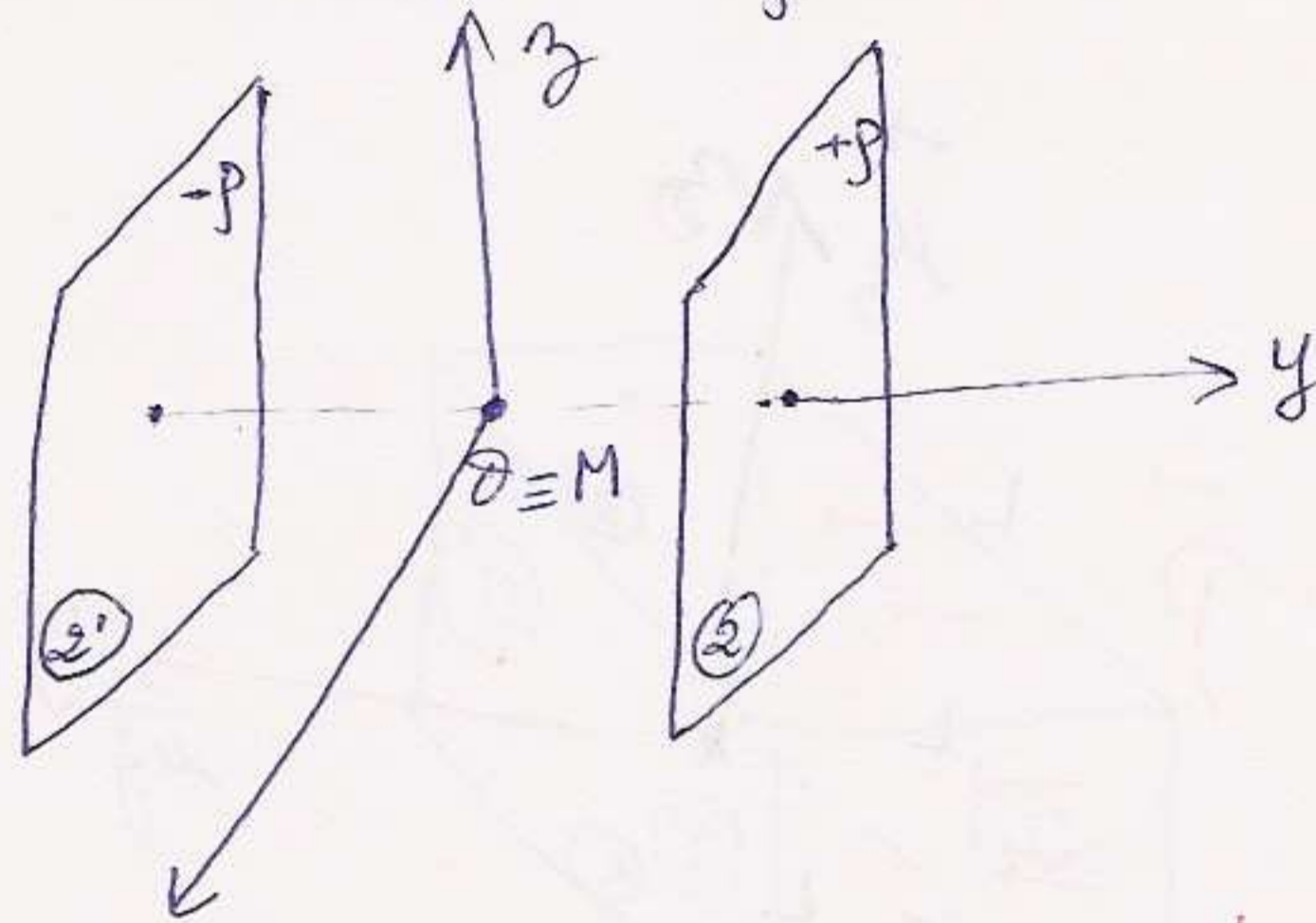
* face (2'): vecteur normale $(-\vec{u}_y)$

" polarisation $\vec{p} = P \vec{u}_y$

$$\Rightarrow \sigma_{2'p} = -P$$

② Finalement le système électrique équivalent se réduit aux faces

de densité $+P$, faces de densité (2') $= -P$



2^{ème} question: Déduire le champ électrique au centre du cube

formules utilisées: Formule de calcul direct:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_p}{NM^2} \vec{u}_{MN}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(S)} \frac{P \cdot dS}{NM^2} \vec{u}_{NM}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{+P}{4\pi\epsilon_0} \int_{(S)} \frac{dS \cdot \vec{u}_{NM}}{NM^2}$$

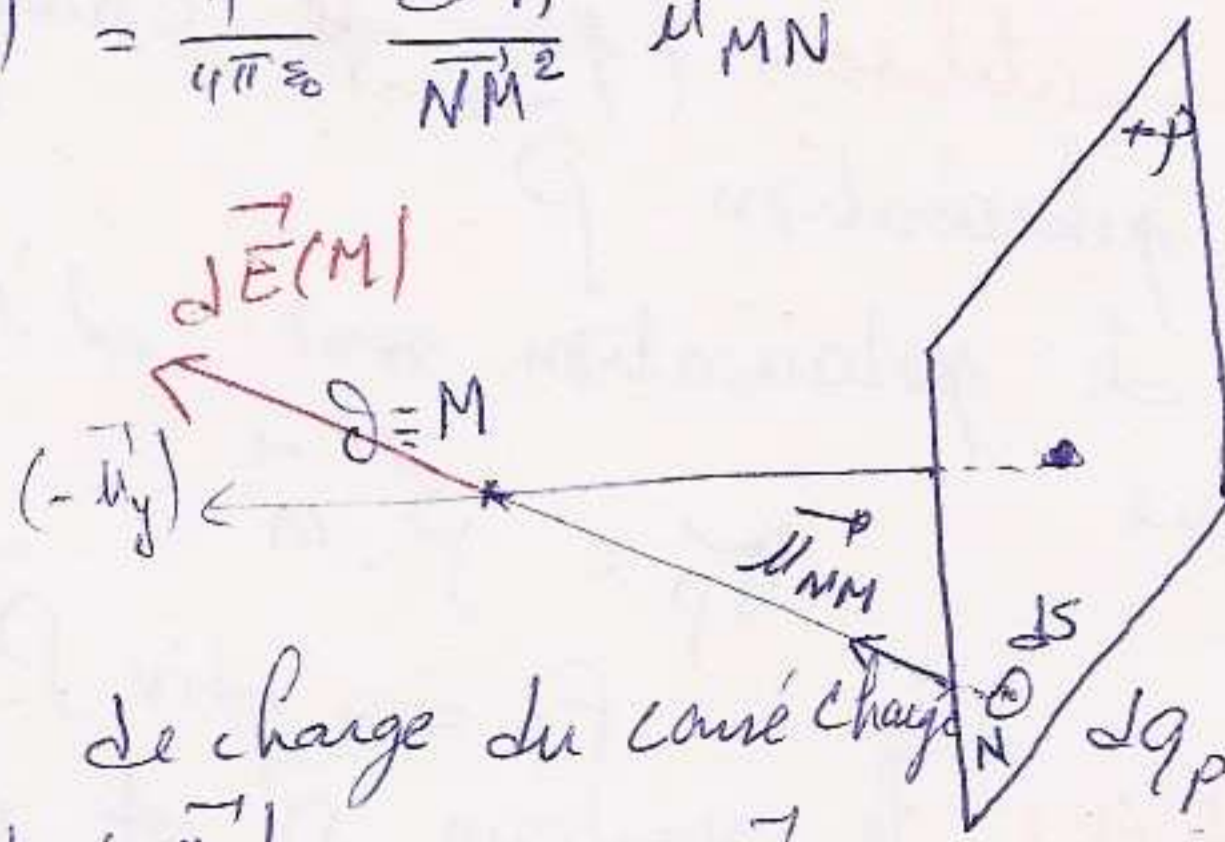
et vu la symétrie de charge du cube charge $dq_p = P \cdot dS$

$$\vec{E}(M) = E(M) (-\vec{u}_y)$$

$$\Rightarrow E(M) (-\vec{u}_y) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_{(S)} \frac{dS \cdot \vec{u}_{NM}}{NM^2}$$

$$E(M) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} (-\vec{u}_y) \int_{(S)} \frac{dS \cdot \vec{u}_{NM}}{NM^2}$$

$$E(M) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_{(S)} \frac{dS \vec{u}_y (-\vec{u}_{NM})}{NM^2}$$



$$E(M) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(S)} \frac{dS \vec{u}_y (-\vec{u}_{MN})}{NM^2} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(S)} \frac{dS (-\vec{u}_{MN})}{NM^2}$$

Or $\iint_{(S)} \frac{dS (-\vec{u}_{MN})}{NM^2} = \Omega$: angle solide sous lequel du $M \in \partial$ on voit la surface du carré.

Pour le cube l'angle solide est celui de l'espace entier donc 4π
 Or une face du cube c'est $\frac{4\pi}{6}$

On en déduit : $E(M) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{6} = \frac{P}{6\epsilon_0}$

Ce qui donne : $\vec{E}_2(M) = \frac{P}{6\epsilon_0} (-\vec{u}_y)$

De manière identique pour la face (2') $\vec{E}_{2'}(M) = \frac{P}{6\epsilon_0} (-\vec{u}_y)$

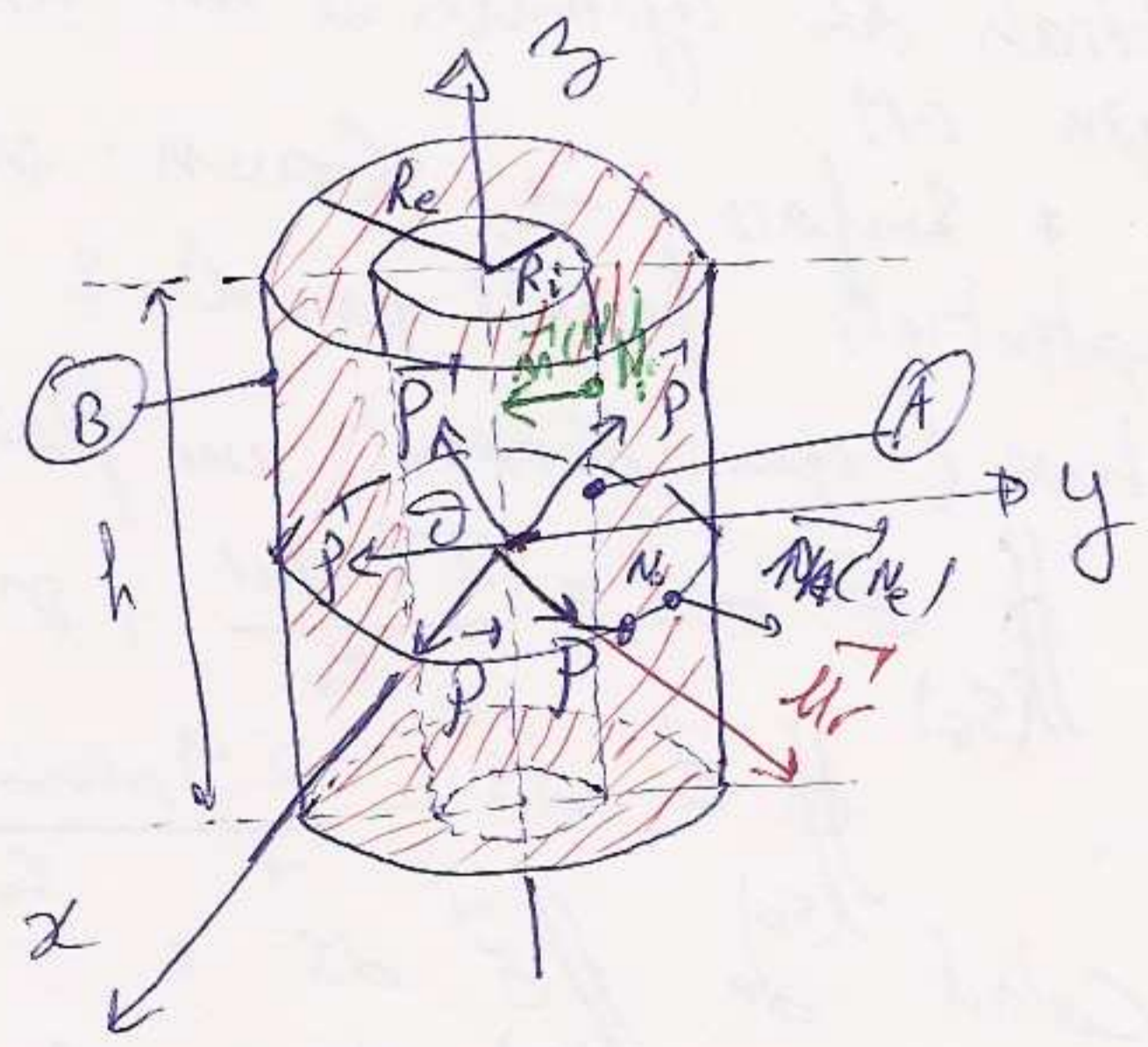
Le champ global est la somme des deux :
 $\vec{E}(M) = \vec{E}_2(M) + \vec{E}_{2'}(M) = -\frac{P}{3\epsilon_0} \vec{u}_y$

$$\vec{E}_T(M) = -\frac{P}{3\epsilon_0} \vec{u}_y$$

EX/4 Un condensateur cylindrique limité par 2 armatures (A) et (B) de rayons R_i et R_e ($R_i < R_e$) et respectivement est rempli d'un milieu diélectrique.

I/ On considère que le diélectrique est neutre et possède une polarisation \vec{P} uniforme et \vec{u}_r vecteur unitaire radial aux cylindres initialement le condensateur est déchargé.

1) Déterminer le modèle électrique équivalent
 1^{ère} étape : dessin et repère.



2^{ème} étape : Formules:
 - Densité volumiques : $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$
 - " surfaciques de polarisation :

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P} = -\text{div}(\vec{P} \cdot \vec{u}_r)$$

$$= -\vec{P} \cdot \text{div } \vec{u}_r$$

en coord. cylindriques : $\text{div } \vec{u}_r = \frac{1}{r}$

ce qui donne : $\rho_p = -\frac{P}{r}$

σ_p ? * face interne : rayon R_i : $\sigma_{p_i} = \vec{P}(N_i) \cdot \vec{n}(N_i)$
 avec $\vec{n}(N_i) = -\vec{u}_r$ $\vec{P}(N_i) = P \cdot \vec{u}_r$
 $\sigma_{p_i} = P \vec{u}_r \cdot (-\vec{u}_r) = -P$

* face externe : rayon R_e :

$$\vec{\sigma}_p = \vec{P}(N_e) \cdot \vec{m}(N_e) \quad \text{avec: } \vec{m}(N_e) = \vec{u}_r ; \vec{P}(N_e) = P \cdot \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow P \quad \boxed{\vec{\sigma}_p = +P}$$

Modèle élect. équivalent: cylindre creux de rayons R_i et R_e , chargé en volume densité: $\rho_p = -\frac{P}{r}$

surface intérieur: $\vec{\sigma}_p = -P$ uniforme
 " ext: $\vec{\sigma}_p = +P$

2^{ème} Em déduire $\vec{E}(M)$ et $\vec{D}(M)$:

1^{ère} méthode: $\vec{D}(M)$ puis $\vec{E}(M)$

Comme il n'y a pas de charge libre $\vec{D} = \vec{0}$ dans tous les cas
 pour $OM < R_i$: $\vec{D} = \vec{0}$; pour $R_i < OM < R_e$: $\vec{D} = \vec{0}$, pour: $OM > R_e$: $\vec{D} = \vec{0}$

Pour \vec{E} : $OM < R_i$: M est dans le vide: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

Pour $R_i < OM < R_e$: M est dans le diélectrique: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$

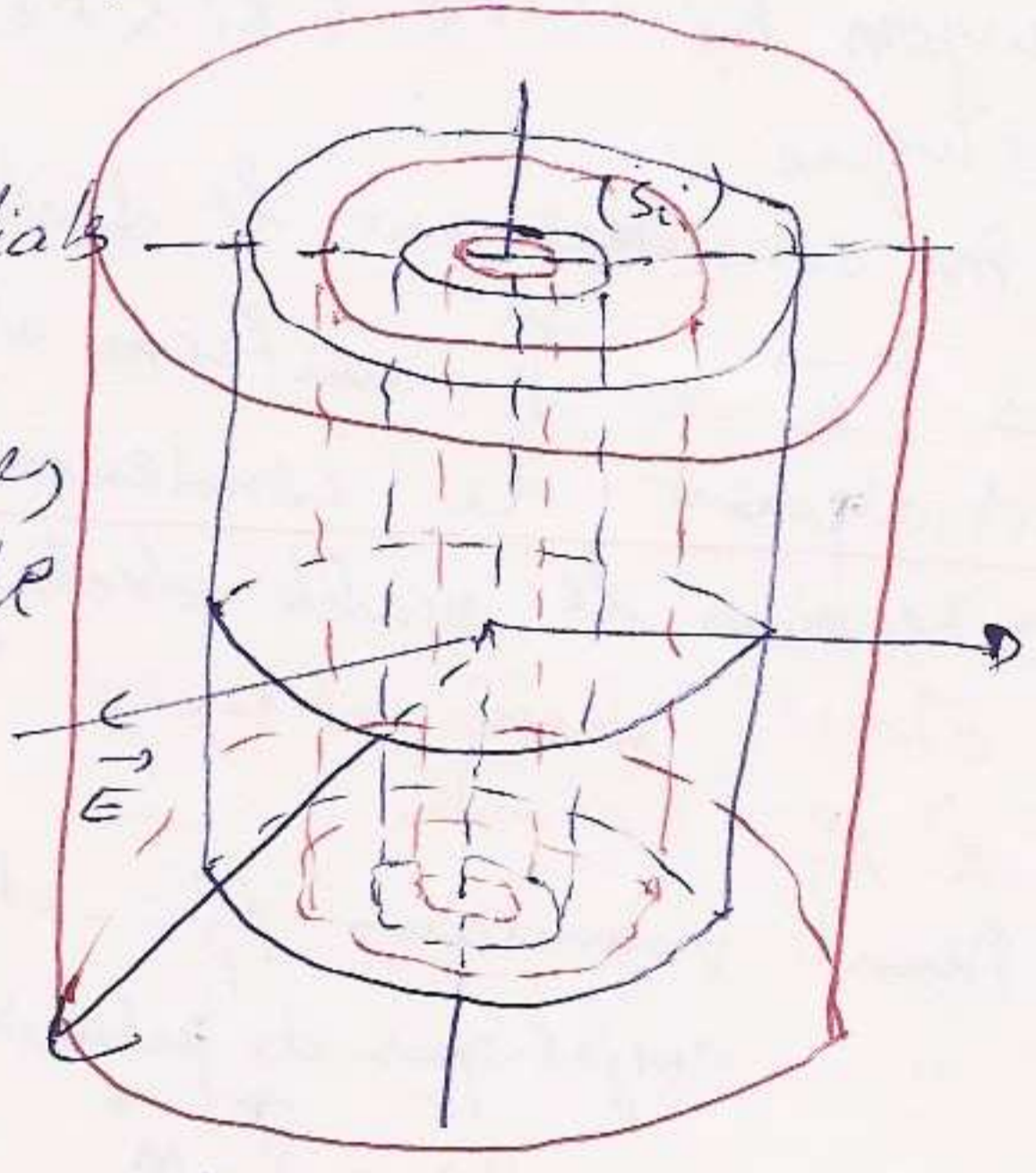
Pour: $OM > R_e$: M dans le vide: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$
 $\vec{D} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

2^{ème} méthode:

* Lignes de champ: les droites radiales au cylindre dans tout plan horizontal

* Surfaces équipotentielle: surfaces latérales des cylindres de même axe et de rayon OM .

* Surface de Gauss: surface équipotentielle fermée par les 2 surfaces de base (qui donnent un flux nul)



$$\oint_{(S_g)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{total}}{\epsilon_0}, \quad \text{or pas de charges libres.}$$

$$\oint_{(S_g)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{polarisation}}{\epsilon_0}$$

* Calcul de $\oint_{(S_g)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$:

$$\begin{aligned} \oint_{(S_g)} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \oint_{S_{B1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_{B2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Or sur la surface éqipt. le champ et la normale $\vec{T} \perp \vec{E} \parallel \vec{n}$ (3) sont colinéaires et $E(M)$ est uniforme:

$$\Rightarrow \iint_{S_L} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_L} E(M) \cdot dS = E(M) \cdot S_L$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_{S_L} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = 2\pi OM \cdot h}$$

* Calcul de $\Sigma q_{\text{polarisation}}$:

1^{er} Cas: $OM < R_i$: $\Sigma q_p = 0$

2^{ème} Cas: $R_i < OM < R_e$: + charge surfacique c-à-d la charge qui se trouve sur la charge interne du rayon R_i .

+ Densité de polarisation: $\sigma_{p_i} = -P$

$$\boxed{q_{p_i} = \iint_{(S_i)} \sigma_{p_i} \cdot dS_i = \iint_{(S_i)} -P \cdot dS_i = -P \iint_{(S_i)} dS_i = -P \cdot 2\pi R_i h}$$

Coord cylin: variables: r, θ, z
 dpts elem: $dr, r d\theta, dz$

$$2\pi \Rightarrow R_i d\theta dz = dS_i$$

$$\iint_{(S_i)} R_i d\theta \cdot dz = R_i \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = S_i = 2\pi R_i h$$

* Charge volumique: c'est la charge dans le volume compris entre R_i et OM .

$dq_{p_v} = \rho_p \cdot dV$ avec $\rho_p = -\frac{P}{r}$

Coord. cyl variables: r, θ, z
 dpt. elem: $dr, r d\theta, dz$

$$q_{p_v} = \iiint -\frac{P}{r} r dr d\theta dz = -P \iiint dr d\theta dz = -P \int_{R_i}^{OM} dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz$$

$$\Rightarrow \boxed{q_{p_v} = -P(OM - R_i) 2\pi h}$$

* Charge totale: $q_{p_t} = q_{p_v} + q_{p_s} = q_{p_v} + q_{p_i} = -P(OM - R_i) 2\pi h - P R_i 2\pi h$

$$\boxed{q_{p_t} = -P OM 2\pi h}$$

3^{ème} Cas: $OM > R_e$

* charge surf. sur S_i : $q_{p_i} = -P 2\pi R_i h$

* " " " " S_e : $q_{p_e} = +P 2\pi R_e h$

* " volumique: $OM = R_e$

$$\Rightarrow q_{p_v} = -P 2\pi h (R_e - R_i)$$

* charge totale: $q_{p_t} = q_{p_i} + q_{p_e} + q_{p_v}$
 $= -P 2\pi h (R_e - R_i) + P 2\pi R_e h - P 2\pi R_i h$

$$\boxed{q_{p_t} = 0}$$

Resumé : * $OM < R_i : \sum q_{PT} = 0$

* $R_i < OM < R_e : \sum q_{PT} = -P_{OM} \cdot 2\pi h$

$OM > R_e : \sum q_{PT} = 0$

Appl. du th. de Gauss :

1^{er} Cas : $OM < R_i : E(M) \cdot 2\pi OM \cdot h = 0 \Rightarrow \underline{\vec{E}(M) = \vec{0}}$

$R_i < OM < R_e : E(M) \cdot 2\pi \cdot OM \cdot h = -P \cdot OM \cdot 2\pi h \Rightarrow E(M) = -\frac{P}{\epsilon_0}$

$\vec{E}(M) = -\frac{P}{\epsilon_0} \vec{u}_r = -\frac{P}{\epsilon_0} \vec{e}_r$; \vec{u}_r : vecteur unitaire radial

$\vec{u}_r = \frac{OM}{r}$

$OM > R_e : E(M) \cdot 2\pi \cdot OM \cdot h = 0 \Rightarrow \underline{\vec{E}(M) = \vec{0}}$

* Détermination de \vec{D} :

1^{er} Cas : $OM < R_i$: vide $\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ $\vec{E} = \vec{0}$ donc $\boxed{\vec{D} = \vec{0}}$

2^{em} Cas : $R_i < OM < R_e$: Dans le diélectrique

on a : $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = -\frac{P}{\epsilon_0} \epsilon_0 + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \vec{0}}$

3^{em} Cas : $OM > R_e$: Le vide $\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ donc $\boxed{\vec{D} = \vec{0}}$ car $\vec{E} = \vec{0}$

3^o En déduire les potentielles : sachant que : $V(M_e) = 0$ appoixit $M_e(S_e)$
 $\vec{E} = -\text{grad } V$; Symétrie cylindrique : $\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r \Rightarrow V(r) = -\int E(r) dr$

1^{er} Cas : $OM > R_e : E(r) = 0 \Rightarrow \boxed{V = C_1^{te}}$

2^{em} Cas : $R_i \leq OM \leq R_e : \Rightarrow \boxed{V(r) = +\frac{P}{\epsilon_0} r + C_2^{te}}$

3^{em} Cas : $OM \leq R_i : \Rightarrow E(r) = 0 \Rightarrow \boxed{V = C_3^{te}}$

Calcul des C_i :

* $V(M_e) = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$ $V(r) = 0$

* Continuité du potentiel pour $OM = R_e$ donc : $V(R_e) = \left[0 = \frac{P}{\epsilon_0} r + C_2 \right]_{r=R_e}$

$\Rightarrow C_2 = -\frac{P}{\epsilon_0} R_e \Rightarrow R_i \leq OM \leq R_e : \boxed{V(M) = \frac{P}{\epsilon_0} (r - R_e)}$

* Continuité du potentiel pour $OM = R_i$:

$\left[\frac{P}{\epsilon_0} (r - R_e) = C_3 \right]_{r=R_i} \Rightarrow C_3 = \frac{P}{\epsilon_0} (R_i - R_e)$

$\Rightarrow OM < R_i : \boxed{V(r) = \frac{P}{\epsilon_0} (R_i - R_e)}$

II/ Nous supposons maintenant que l'armature interne porte la charge $+Q$ uniformément répartie et que le diélectrique est M.L.H.I de permittivité ϵ .

1° Calculer les densités de charges libres sur les armatures internes et externes.

TDE III (6)

$$dq = \sigma \cdot ds \Rightarrow q = \int \sigma \cdot ds = \sigma \int ds$$

↓
uniforme

$$q = \sigma \cdot S \Rightarrow \sigma = \frac{q}{S}$$

* Pour (S_i) : $\sigma_i = \frac{+Q}{S_i} = \frac{Q}{2\pi R_i h} \Rightarrow \boxed{\sigma_i = \frac{Q}{2\pi R_i h}}$

* Pour (S_e) : $\sigma_e = -\frac{Q}{S_e} \Rightarrow \boxed{\sigma_e = -\frac{Q}{2\pi R_e h}}$

$$\sigma_e = -\frac{Q}{2\pi R_e h} \cdot \frac{R_i}{R_e} = -\sigma_i \frac{R_i}{R_e} \Rightarrow \boxed{\sigma_e = -\sigma_i \frac{R_i}{R_e}}$$

2° Déterminer le vecteur déplacement électrique et le champ électrique en fct. de σ_i , R_i et R_e .

a- Détermination \vec{D} : 3 cas :

* $OM < R_i$: $\sum q_{\text{reels}} = 0$

* $R_i < OM < R_e$: $\sum q_{\text{reels}} = +Q$

* $OM > R_e$: $\sum q_{\text{reels}} = +Q - Q = 0$

L'autre part : $\phi(\vec{D}) = D(M) \cdot 2\pi \cdot OM \cdot h$

Donc : $OM < R_i$ $\boxed{\vec{D}(M) = \vec{0}}$

Autre Groupe

Polarisations des diélectriques

EX 1 un cube diélectrique de côté "L" possède une polarisation radiale s'exprimant par $\vec{P} = A \vec{r}$; $A = \text{cte}$ et $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

1° Calculer toutes les densités de charges de polarisation.

1^{er} étape: Choix du repère et dessin:
(Voir figure)

⚠ On prend en considération en fait que le cube est symétrique par rapport au centre.

2^{ème} étape: Formules utilisées:

on sait que les charges de polarisation sont de deux types:

* Volumiques: $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$

* Surfiques: $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$

Systèmes de coordonnées: Cartésien.

3^{ème} étape: Application:

* Densité volumique de polarisation: $\rho_p = -\text{div}(A(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}))$

$$\Rightarrow \rho_p = -A \text{div}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\text{div } \vec{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = A \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) = 3A$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_p = -3A}$$

* Densités surfiques de polarisation: Comme le cube possède 6 faces on doit considérer 6 points.

$$M_1\left(\frac{L}{2}, y, z\right), M_1'\left(-\frac{L}{2}, y, z\right)$$

$$M_2\left(x, \frac{L}{2}, z\right), M_2'\left(x, -\frac{L}{2}, z\right)$$

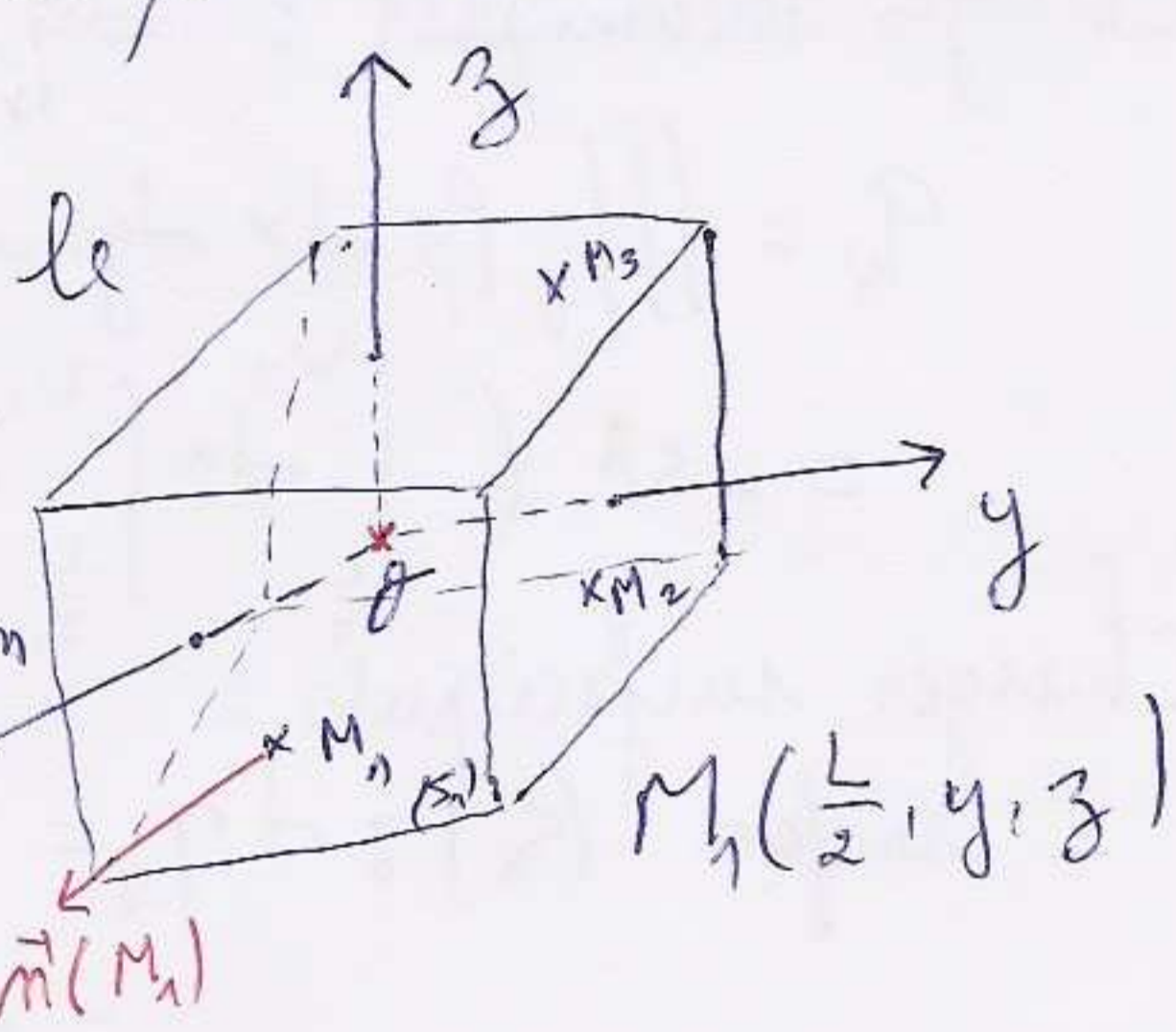
$$M_3\left(x, y, \frac{L}{2}\right), M_3'\left(x, y, -\frac{L}{2}\right)$$

$$\vec{n}(M_1) = \vec{i}; \vec{n}(M_1') = -\vec{i}; \vec{n}(M_2) = \vec{j}, \vec{n}(M_2') = -\vec{j}$$

$$\vec{n}(M_3) = \vec{k}; \vec{n}(M_3') = -\vec{k}$$

$$\sigma_{p_i} = \vec{P}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i); \forall M_i \in \{S_i\}$$

Il faut calculer \vec{P} et \vec{n} en chaque point.



$$\sigma_p(M_1) = A \left(\frac{L}{2} \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \right) \cdot \vec{i} = \frac{AL}{2}$$

$$\sigma_p(M_1') = \vec{P}(M_1') \cdot \vec{m}(M_1') = A \left(-\frac{L}{2} \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \right) \cdot (-\vec{i}) = \frac{AL}{2}$$

$$\sigma_p(M_2) = A \left(x \vec{i} + \frac{L}{2} \vec{j} + z \vec{k} \right) \cdot \vec{j} = \frac{AL}{2}$$

$$\sigma_p(M_2') = \frac{AL}{2}; \quad \sigma_p(M_3) = \frac{AL}{2}, \quad \sigma_p(M_3') = \frac{AL}{2}$$

2° Montrer explicitement que la somme des charges est nulle?

* Charges volumiques: $dq_v = \rho_p \cdot dV = \rho_p \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

$$q_v = \iiint_V \rho_p \cdot dx \cdot dy \cdot dz = -3A \iiint_{x,y,z} dx \cdot dy \cdot dz$$

$$= -3A \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \right) = -3AL^3$$

$$\boxed{q_v = -3AL^3}$$

* Charges surfaciques:

- surface (S_1) : $dq_{S_1} = \sigma_p(M_1) \cdot dS_1 = \sigma_p(M_1) \cdot dy \cdot dz$

$$= A \cdot \frac{L}{2} \cdot dy \cdot dz$$

$$\boxed{q_{S_1} = \frac{AL}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz = \frac{AL^3}{2}}$$

- surface (S_1') : $dq_{S_1'} = \sigma_p(M_1') \cdot dS_1' = \sigma_p(M_1') \cdot dy \cdot dz$

$$= \frac{AL}{2} \cdot dy \cdot dz \Rightarrow \boxed{q_{S_1'} = \frac{AL^3}{2}}$$

Pour le couple de surface symétrique (S_1) et (S_1')

$$\boxed{q_{S_1} = q_{S_1'} = \frac{AL^3}{2}}$$

La même chose pour q_2 et q_3 on aura: $q_2 = AL^3 = q_3$

* Charge surfacique de polarisation totale: $\boxed{q_s = 3AL^3}$

⇒ Charge totale de polarisation:

$$q_T = q_v + q_s = -3AL^3 + 3AL^3 = 0$$

$$\boxed{q_T = 0}$$

EX 2

La surface de séparation entre le vide et un diélectrique a pour équation $3x + 2y + z = 12$. La permittivité relative $\epsilon_r = 3$

Le diélectrique est de côté contenant l'origine du repère.

Le champ électrique dans le diélectrique est: $E_d(2, 0, 5)$, il n'y a pas de charge libres sur la surface de séparation.

Déterminer le champ d'extérieurs du diélectrique?

T.D.E.III(2)

1^{er} Etape: choix du repère et dessin:
 Etant donnée que l'équ. de la surface de séparation est en coord. cart., on choisit le syst. de coord. cart.

Tracé de la surface:

Donc: $3x + 2y + 3z = 12$

* Pour $z = 0 \Rightarrow 3x + 2y = 12 \Rightarrow y = 6 - \frac{3}{2}x$

* Pour $x = 0 \Rightarrow y = 6$

* Pour $y = 0 \Rightarrow x = 4$

* Pour $x = 0 \Rightarrow 2y + 3z = 12 \Rightarrow z = 12 - 2y$

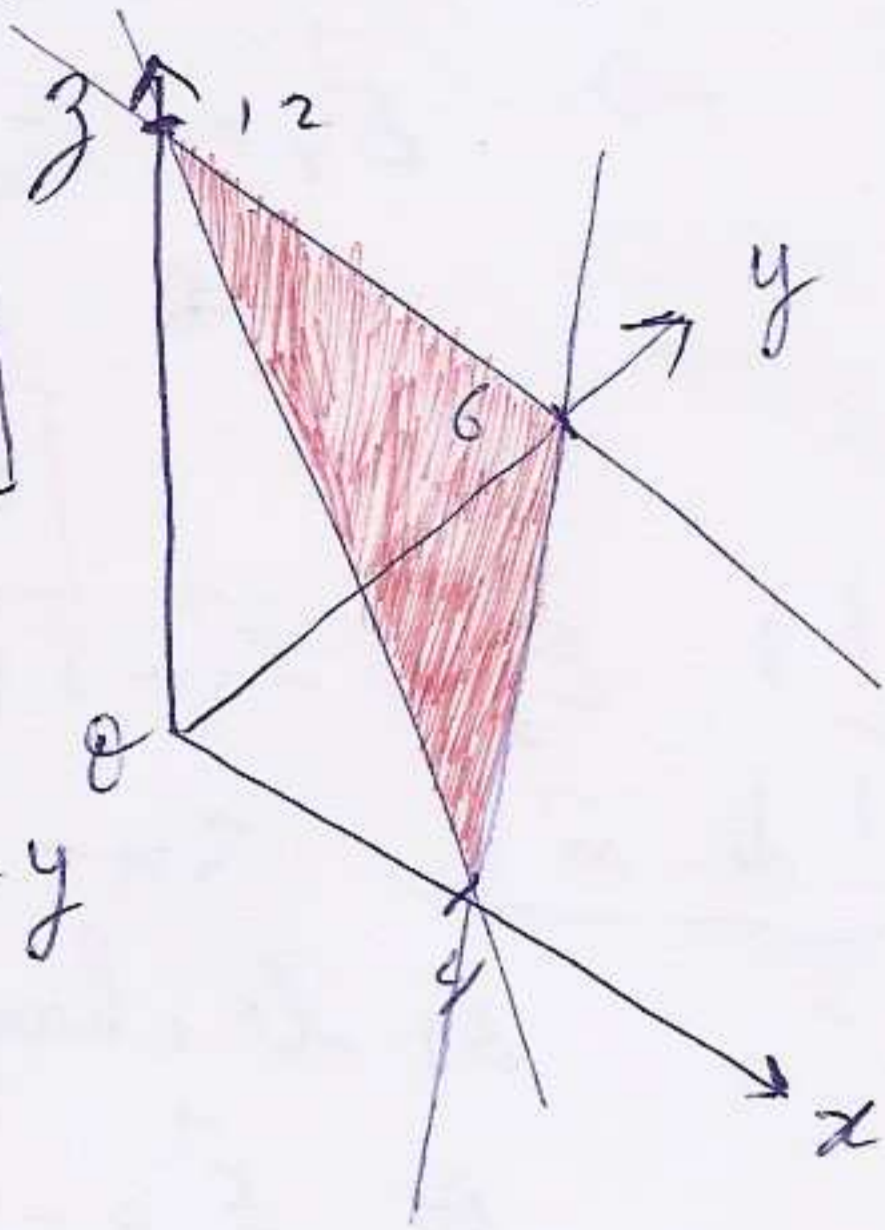
* Pour $y = 0 \Rightarrow z = 12$

* Pour $z = 0 \Rightarrow y = 6$

* Pour $y = 0 \Rightarrow 3x + 3z = 12 \Rightarrow z = 12 - 3x$

* Pour $x = 0 \Rightarrow z = 12$

* Pour $z = 0 \Rightarrow x = 4$



(Il faut savoir tracé sphère, surface, cylindre...)

2^{ème} étape: Formules utilisés: on utilise les formules de passage à travers la surface de séparation.
 1- Discontinuité de la composante normale de \vec{D} :

$$(\vec{D}_v - \vec{D}_d) \cdot \vec{n} = \sigma_{\text{Libre}} \quad (1)$$

2- Continuité de la composante tangentielle du champ \vec{E} .

$$(\vec{E}_v - \vec{E}_d) \cdot \vec{t} = 0 \quad (2)$$

Et on sait que $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$ ($\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$)

Dans notre cas il n'y a pas des charges libres

$$\Rightarrow (\vec{D}_v - \vec{D}_d) \cdot \vec{n} = 0 \quad (1)$$

et $(\vec{E}_v - \vec{E}_d) \cdot \vec{t} = 0 \quad (2)$

ou bien: $D_{vn} = D_{dn}$ d'après (1)

et: $E_{vt} = E_{dt}$ d'après (2)

or $\vec{E}_d = E_{dt} \cdot \vec{t} + E_{dn} \cdot \vec{n}$ et

$$\vec{E}_v = E_{vt} \cdot \vec{t} + E_{vn} \cdot \vec{n}$$

? ce qu'on cherche

$$\vec{E}_V = \vec{E}_{dC} \cdot \vec{C}$$

$$\text{on a : } D_V = \epsilon_0 \vec{E}_V \Leftrightarrow D_{Vn} = \epsilon_0 E_{Vn}$$

$$\text{et : } D_d = \epsilon \cdot \vec{E}_d \Leftrightarrow D_{dn} = \epsilon E_{dn} \left. \vphantom{D_d} \right\} E_{Vn} = \epsilon_r E_{dn}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_V = \vec{E}_{dC} \cdot \vec{C} + \epsilon_r E_{dn} \cdot \vec{n} \quad \text{or} \quad \vec{E}_{dC} \cdot \vec{C} = E_{dn} \cdot \vec{n}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_V = \vec{E}_d - E_{dn} \cdot \vec{n} + \epsilon_r E_{dn} \cdot \vec{n}$$

$$\boxed{\vec{E}_V = \vec{E}_d + (\epsilon_r - 1) E_{dn} \cdot \vec{n}}$$

Calcul : $\vec{E}_d = 2\vec{i} + 1\vec{k}$ et $\epsilon_r = 3$

Calcul de \vec{n} : $3x + 2y + z = 12 = \text{cte} = VC$ est une surface équipotentielle
 or le champ est \perp à la surface équipotentielle

$$\text{or } \vec{E} = -\text{grad } V$$

Donc $\text{grad } V$ est \perp à la surface.

Donc $\text{grad } V$ et \vec{n} sont colinéaires : $\text{grad } V = (\text{grad } V) \cdot \vec{n}$

$$\vec{n} = \frac{\text{grad } V}{|\text{grad } V|} \quad \text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

$$= 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$|\text{grad } V| = \sqrt{3^2 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

$$\boxed{\vec{n} = \frac{3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{14}}}$$

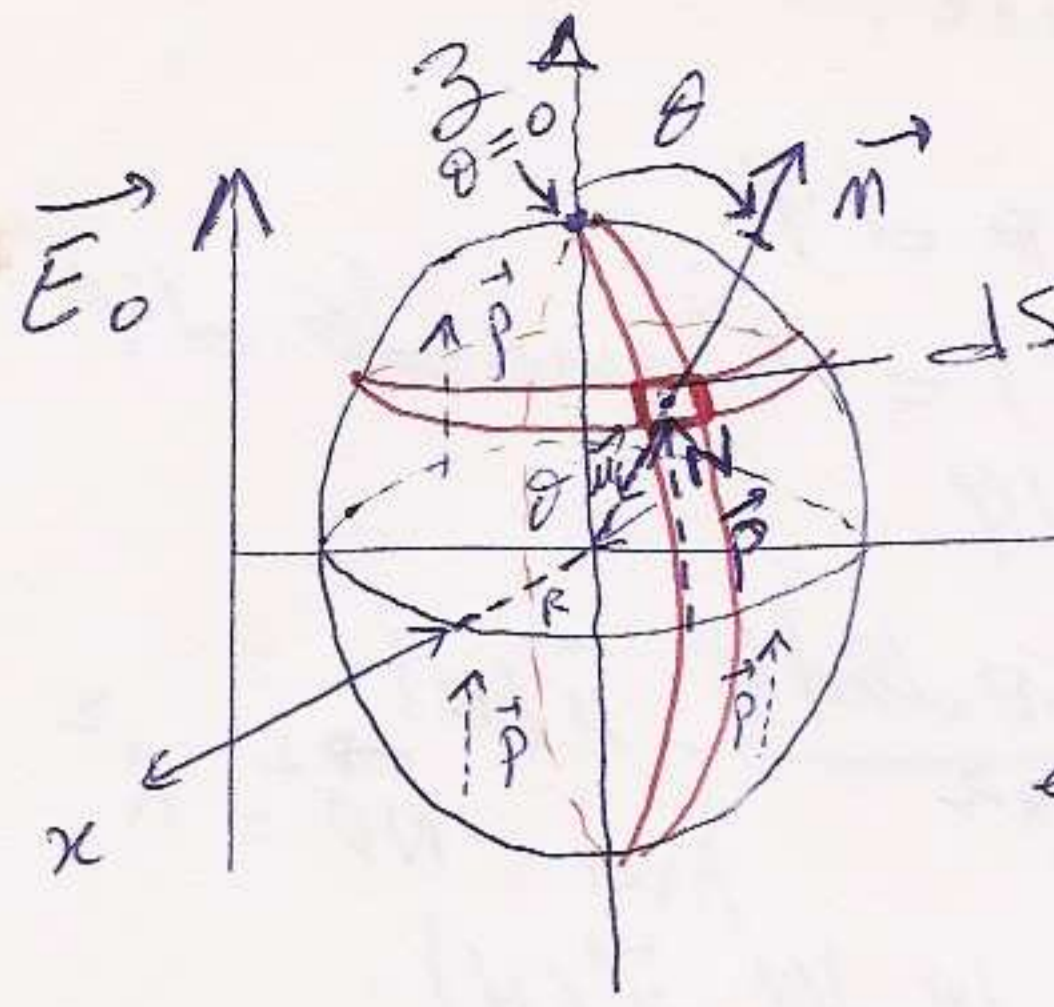
D'autre part : $E_{dn} = \vec{E}_d \cdot \vec{n} = (2\vec{i} + 1\vec{k}) \cdot \frac{3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{14}}$
 (fait le calcul) ...

~~$$\vec{E}_V = + \frac{19}{7} \vec{i} + \frac{22}{7} \vec{j} + \frac{24}{7} \vec{k}$$~~

EX/4

une sphère (SI) de rayon R , constituée d'un diélectrique linéaire, homogène et isotrope (M.L.H.I) de susceptibilité χ et placée dans un champ extérieur \vec{E}_0 uniforme le vecteur polarisation qui en résulte est également supposé uniforme.

1^{ère} Question : 1 - Déterminer le modèle électrique équivalent



1^{ère} étape: Choix du repère et dessin

En fct de symétrie de la disposition étudié (voir figure)
 2^{ème} étape: Formule utilisée: (pas de densité rls).

Pour les densités de polarisation: →

* Densité volumique: $\rho_p = - \text{div } \vec{P}$

* " surfacique: $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$

3^{ème} étape: App.

* Densité volumique: Le vecteur polarisation \vec{P} est uniforme, donc $\rho_p = 0$

* Densité surfacique: $\sigma_p(N) = \vec{P}(N) \cdot \vec{n}(N)$

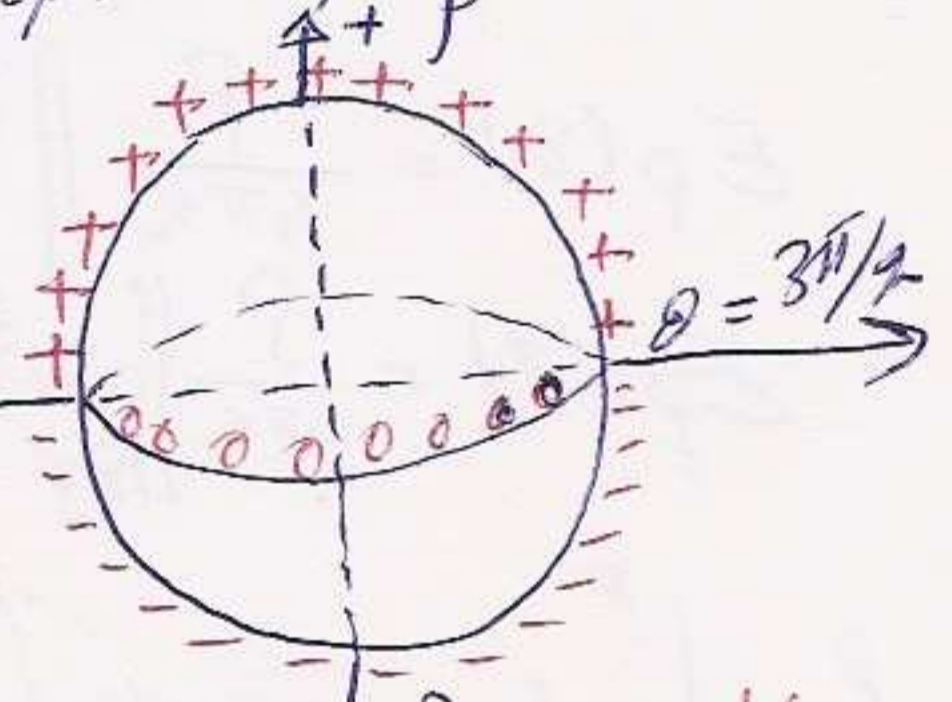
$\Rightarrow \sigma_p(N) = P \cdot \vec{u}_z \cdot \vec{n}(N) = P \cos \theta$

qqs points de répartition de la charge:

$\theta = 0 \Rightarrow \sigma_p = +P$ (pôle Nord) | $\theta = \pi \Rightarrow \sigma_p = -P$ (pôle sud)
 $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma_p = 0$ (equateur) | $\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sigma_p = 0$ (equateur)

Modèle électrique équivalent:

Sphère creuse de centre O et de rayon R densité surfacique de polarisation $\sigma_p = P \cos \theta$



2^{ème} déterminer le champ de la polarisation \vec{E}_p (ou \vec{E}_d) au centre de la sphère (M ≡ O)

Donc on cherche $\vec{E}_p(\theta)$?

* Formule utilisée: Méthode calcul direct.

$$d\vec{E}_p(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_p}{NM^2} \cdot \vec{u}(N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_p}{NR^2} \cdot \vec{u}(N), \vec{u}(N) = \frac{\vec{NM}}{|\vec{NM}|}$$

Avec: $dq_p = \sigma_p \cdot dS = P \cos \theta dS$

Calcul dS: Coord. sph. Variables: r, θ, φ
 déplacements élémentaire: $dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi$

Or la sphere est creuse $\Rightarrow r = R$ fixe.

\Rightarrow Variables: θ et φ

\Rightarrow def. elem.: $R d\theta, R \sin\theta d\varphi$

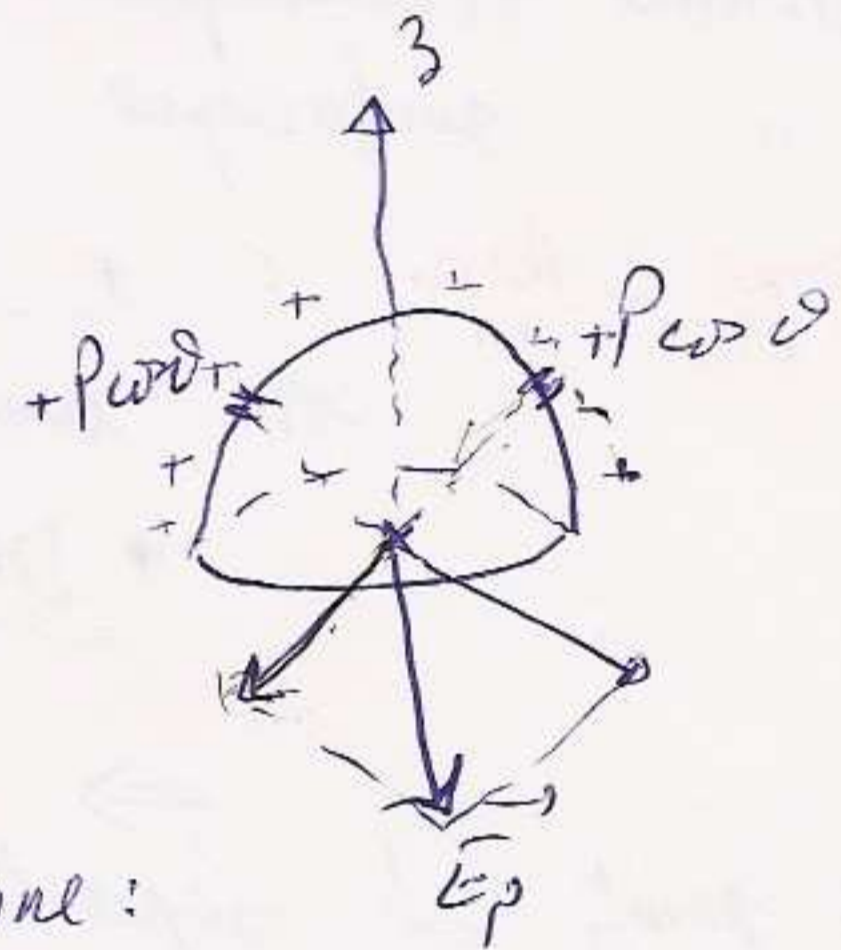
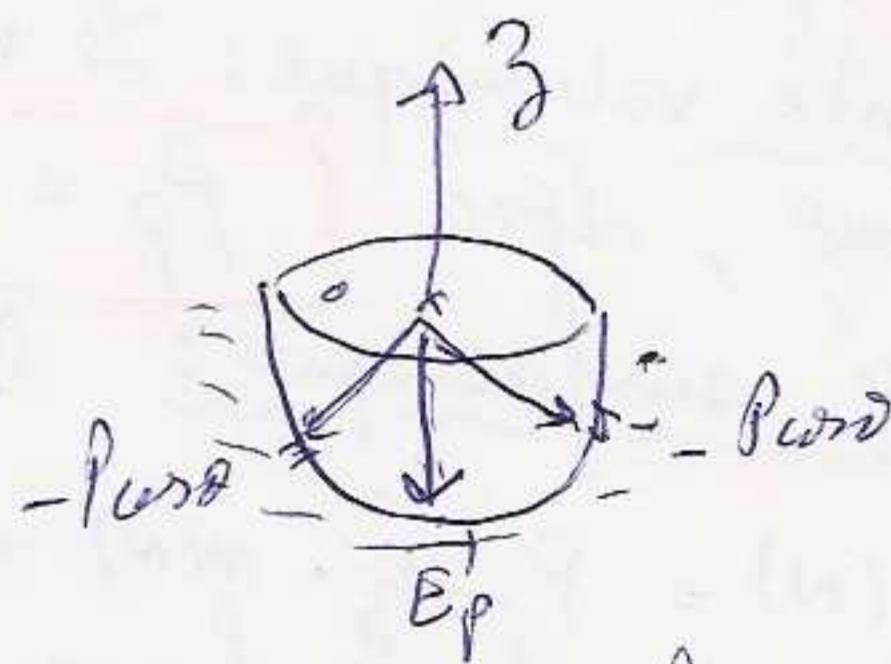
$$\Rightarrow dS = R d\theta (R \sin\theta d\varphi) = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dq_p = \rho R^2 \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi$$

d'où: $d\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho R^2 \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \cdot \vec{u}(N)}{ND^2}$ Avec: $ND = R^2$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}(N)$$

$$\vec{E}_p(\theta) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\theta, \varphi} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \cdot \vec{u}(N)$$



Or la symétrie de la charge donne:

$$\vec{E}_p(\theta) = E_p(\theta) \cdot (-\vec{u}_z)$$

ce qui donne: $E_p(\theta) \cdot (-\vec{u}_z) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iint \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}(N)$

$$E_p(\theta) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iint \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \underbrace{\vec{u}(N) \cdot (-\vec{u}_z)}_{\cos\theta}$$

$$E_p(\theta) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\theta, \varphi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi$$

$\theta \in [0, \pi]$
 $\varphi \in [0, 2\pi]$ // En coord. sphériques.

$$\Rightarrow E_p(\theta) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{2\rho\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2\theta d(-\cos\theta) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_1^{-1} \omega^2 d\omega$$

$$= -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[\frac{\omega^3}{3} \right]_1^{-1} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p(\theta) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}}$$

3°) Déterminer le champ macroscopique et en déduire le vecteur de polarisation.

Champ macroscopique : $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$
 (champ total)

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad \text{avec : } \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\chi}{3} \vec{E} \Rightarrow \vec{E} \left(1 + \frac{\chi}{3}\right) = \vec{E}_0$$

$$\vec{E} = \frac{3}{3+\chi} \vec{E}_0 = \text{cte } \vec{E}_0$$

ce qui donne : $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = \frac{3\chi}{3+\chi} \epsilon_0 \vec{E}_0$

$$\vec{P} = \frac{3\epsilon_0 \chi}{3+\chi} \vec{E}_0$$

2^{ème} Question : 1^{er} RAPPEL de cours : Ecrire en un point M qq'a l'intérieur, ou a l'extérieur de la sphère, l'expression du potentiel due a la polarisation $V_p(M)$:
 milieu diélectrique

potentiel élémentaire : pour un volume dV entourant un point P vect. polarisation $\vec{P}(P)$

$$dV_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{y}(P) \cdot \vec{u}(P)}{PM^2}$$

Avec : $d\vec{y} = \vec{P}(P) \cdot dV$

$$\Rightarrow V_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\vec{P}(P) \cdot \vec{u}(P)}{PM^2} dV$$



2^{ème} En déduire que le calcul de $V_p(M)$ revient à calculer un champ noté $\vec{E}'(M)$ à déterminer?

on sait que \vec{P} est uniforme pour la sphère donc :

$$V_p(M) = \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\vec{u}(P)}{PM^2} dV$$

si on prend une densité volumique $\rho' = 1$, nous aurons :
 distribution volumique de densité ρ' : $\vec{E}'(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho' \cdot dV \cdot \vec{u}(P)}{PM^2}$

$$\Rightarrow V_p(M) = \vec{P} \cdot \vec{E}'(M)$$

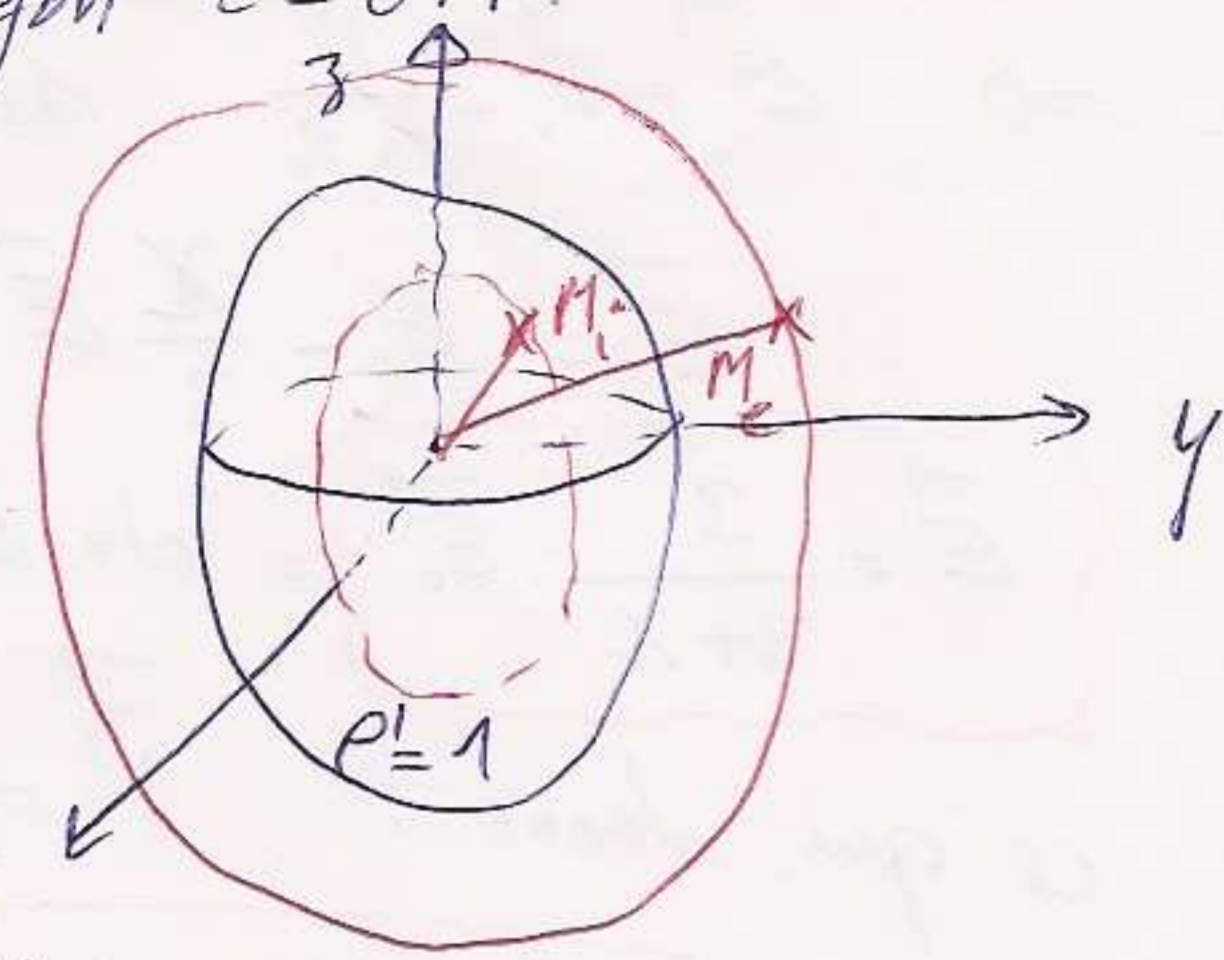
3^{ème} Déterminer $\vec{E}'(M)$ pour un point intérieur M_i et pour un point extérieur M_e
 on cherche : $\vec{E}'(M_i)$ et $\vec{E}'(M_e)$?

on utilise le th. de Gauss!
 => champ radial a la sphere et surfaces equipotentielle:
 spheres de centre O et de rayon $r = OM$.

on sait que $\vec{E} = -\text{grad } \phi$

$$\phi(\vec{E}) = \oint_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{total}}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{\sum q_{polarisation}}{\epsilon_0}$$



Nous aurons deux cas:

* M à l'intérieur: $OM < R$: $M \equiv M_i$

variables: r, θ, φ
 déplacements elem.: $dr, r d\theta, r \sin\theta d\varphi$

$$\Rightarrow dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$dq_p = \rho dV = dV \Rightarrow q_p = \iiint_{r, \theta, \varphi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow q_p = \int_0^{OM} r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

* M à l'extérieur: l'intégrale sur r est entre 0 et R

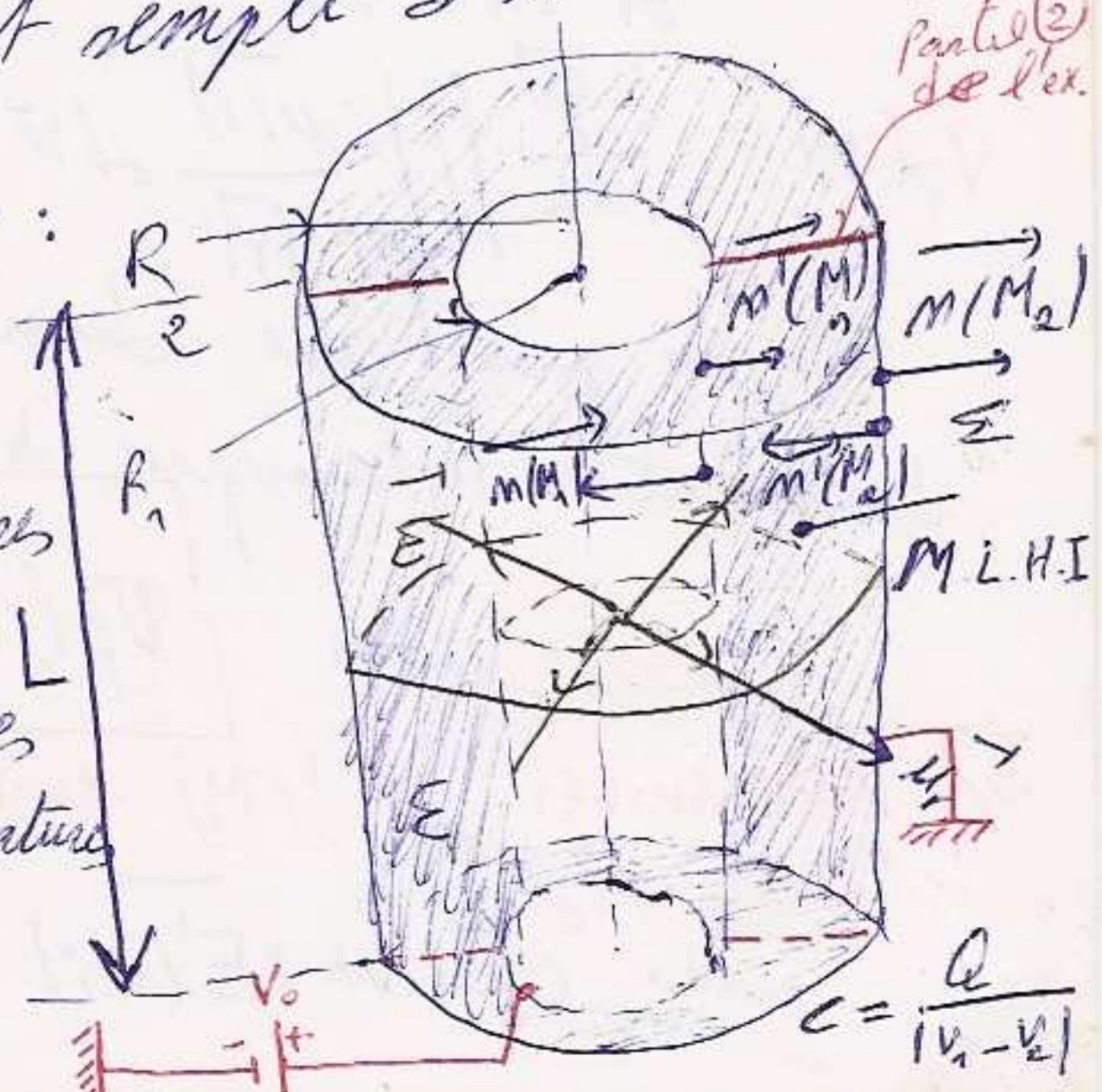
$$q_p = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Exercice: un cable coaxial est constitué de deux armatures conductrices cylindriques de longueur L (très grande). Le conducteur interne a un rayon R_1 et maintenu au potentiel V_0 . Le conducteur externe a un rayon R_2 maintenu au potentiel zéro. L'espace inter-conducteur est rempli d'un diélectrique de permittivité ϵ .

M.L.H.I. de permittivité ϵ .
 1^{ère} question: Déterminer la capacité des conducteurs:

methode: 1^{ère} Détermination de \vec{D} et \vec{E} :

on applique le th. de Gauss à D.
 * les lignes de champ sont radiales aux cylindres (armatures) dans un plan donné
 * les surfaces equipotentielles sont les surfaces latérales des cylindres coaxiaux avec les armatures et de rayon $r = OM$



$$C = \frac{Q}{|V_1 - V_2|}$$

* La surface de Gauss est constituée d'une surface équipotentielle et de 2 surfaces de base S_{B1} et S_{B2} qui la ferment.

b) flux: $\Phi(\vec{D}) = \oint_{S_G} \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot 2\pi r h$

c) $\Sigma q_{int} = Q$: charge libre.

d) Application du th. de Gauss: $D \cdot 2\pi r h = Q$

donc: $D = \frac{Q}{2\pi r h} \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{2\pi r h} \vec{u}_r$

$\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{|\vec{OM}|} = \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{2\pi h} \frac{\vec{r}}{r^2}$

or: M.L.H.I. $\Rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi \epsilon h} \frac{\vec{r}}{r^2}$

Remarque: M.L.H.I. $\Rightarrow \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$

$\vec{P} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{2\pi h} \frac{\vec{r}}{r^2}$

2) Détermination de la capacité:

on sait que: $C = \frac{Q}{|V_1 - V_2|}$ avec $V_1 = V_0$ et $V_2 = 0$

or: $-dV = \vec{E} \cdot d\vec{M}$ (or symétrie cylindrique $\Rightarrow d\vec{M} = dr \vec{u}_r$)

$= \vec{E} \cdot d\vec{r}$

$= \frac{Q}{2\pi \epsilon h} \frac{\vec{u}_r}{r} \cdot dr \vec{u}_r = \frac{Q}{2\pi \epsilon h} \frac{dr}{r}$

$\Rightarrow \int_1^2 -dV = \int_1^2 \frac{Q}{2\pi \epsilon h} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi \epsilon h} (\log r) \Big|_{R_1}^{R_2}$

$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi \epsilon h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

$\Rightarrow C = \frac{2\pi \epsilon h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

Capacité par unité de longueur: $C_L = \frac{C}{h} = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(R_2/R_1)}$

2^{ème} question) En déduire la capacité pour que: $R_2 - R_1 = e$
 $e \ll R_1$ et R_2

$C = \frac{2\pi \epsilon h}{\ln\left(\frac{R_1 + e}{R_1}\right)} = \frac{2\pi \epsilon h}{\ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right)}$

or $\ln(1+x) \approx x$ $\Rightarrow C \approx \frac{2\pi \epsilon h}{e/R_1} = \frac{2\pi \epsilon R_1 h}{e} = \frac{\epsilon S_1}{e}$

3^{ème} question: Déterminer la densité du système électrique équivalent

19 Densité de polarisation

a- densité volumique:

$$P_p = -\text{div } \vec{P}$$

$$\vec{P} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{Q}{2\pi h} \frac{\vec{ur}}{r} \Rightarrow P_p = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{Q}{2\pi h} \text{div} \left(\frac{\vec{ur}}{r} \right)$$

or en coord. cylindriques $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

symétrie cylindrique: $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r}$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{P} = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{Q}{2\pi h} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{1}{r} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_p = 0}$$

b- densité surfaciques: $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{m}$
 surface interne: $\sigma_{p_1} = \vec{P}(M_1) \cdot \vec{m}(M_1)$
 $M_1 \in S_1$

$$\boxed{\sigma_{p_1} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{2\pi h} \cdot \frac{1}{R_1} (-\vec{ur}) = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{2\pi h} \cdot \frac{1}{R_1}}$$

surface externe S_2 : $\sigma_{p_2} = \vec{P}(M_2) \cdot \vec{m}(M_2) = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{2\pi h} \cdot \frac{1}{R_2} \vec{ur} \cdot \vec{ur}$
 $M_2 \in (S_2)$

$$\boxed{\sigma_{p_2} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{2\pi h} \cdot \frac{1}{R_2}}$$

c) densité charges libres:

on sait que: $\sigma = \vec{D} \cdot \vec{m}$

\vec{m} : normale allant du conducteur en équilibre électrostatique vers le diélectrique.

or: $\vec{D} = \frac{Q}{2\pi h} \frac{\vec{ur}}{r}$

* Surface interne:

$$\sigma_{L_1} = \vec{D}(M_1) \cdot \vec{m}(M_1) = \frac{Q}{2\pi h} \frac{1}{R_1} \vec{ur} \cdot \vec{ur} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma_{L_1} = \frac{Q}{2\pi h R_1}}$$

* Surface externe:

$$\sigma_{L_2} = \vec{D}(M_2) \cdot \vec{m}(M_2)$$

$$\boxed{\sigma_{L_2} = \frac{Q}{2\pi h} \cdot \frac{1}{R_2} \vec{ur} \cdot (-\vec{ur}) = -\frac{Q}{2\pi h R_2}}$$

d- Densité volumique des charges libres

on sait que:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \text{div } \vec{D} = \epsilon_0 \text{div } \vec{E} + \text{div } \vec{P}$$

$$\Rightarrow \rho_L = \epsilon_0 \text{div } \vec{E} - P_p \quad (\text{car } \text{div } \vec{D} = \rho_L \quad \text{et } P_p = -\text{div } \vec{P})$$

pour 1. M.L.H.I. $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \text{div } \vec{D} = \epsilon \text{div } \vec{E} \Rightarrow \rho_L = \epsilon \text{div } \vec{E}$

$$\Rightarrow \rho_L = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \cdot \rho_L - P_p \Rightarrow P_p = \rho_L \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1 \right)$$

$$\boxed{\rho_L = \frac{\epsilon}{\epsilon_0 - \epsilon} \cdot P_p = 0}$$

4^{ème} question: Calculer l'énergie emmagasinée dans le diélectrique (dans le condensateur).

on sait que :

$$W = \iiint_{(V)} \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} dV$$

M.L.H.I.

$$= \iiint_{(V)} \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 dV$$

variables: r, θ, z

Coord. cylindriques: $dr, r d\theta, dz$

$$\Rightarrow dV = dr r d\theta dz = r dr d\theta dz$$

$$\Rightarrow W = \frac{\epsilon}{2} \iiint_{(V)} \vec{E}^2 r dr d\theta dz$$

$$\text{on a: } \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon h} \cdot \frac{\vec{u}_r}{r} \Rightarrow \vec{E}^2 = \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon h}\right)^2 \frac{1}{r^2}$$

$$W = \frac{\epsilon}{2} \iiint_{(V)} \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon h}\right)^2 r dr d\theta dz = \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon h}\right)^2 \int_0^{R_2} \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz$$



Partie 2: L'espace entre les armatures est constitué de 2 diélectr. de permittivités ϵ_1 et ϵ_2 occupant chacun la moitié du volume (Voir figure).

Refaire les m questions que la partie 1.

1- Le but est de calculer la capacité:

1^{ère} Question: 1°) Déterminer \vec{D} , \vec{E} et \vec{P}

a- Surface de Gauss:

* Lignes de champ: La symétrie cylindrique \Rightarrow radiales suivant les rayons des cylindres.

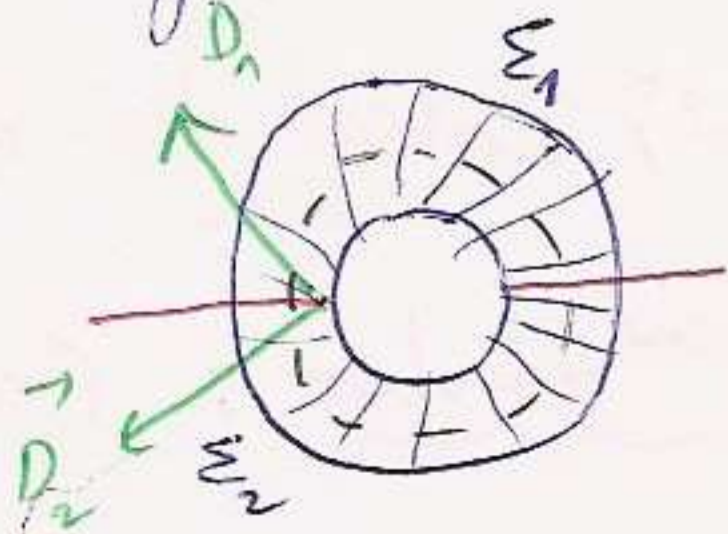
* Surfaces équipotentielles: surfaces latérales des cylindres coaxiaux aux cylindres chargés et de rayon $r = OM$.

* Surfaces de Gauss: Surface latérale d'un cylindre de rayon r , de hauteur h , fermé par ses 2 surfaces de base.

2°) Calcul de flux:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{D}) &= \oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{S}_2 \\ &= \oint_{(S)} (\vec{D}_1 + \vec{D}_2) \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

$$\phi(\vec{D}) = (D_1 + D_2) S_L = (D_1 + D_2) 2\pi r h$$



or on sait que M.L.H.I : $\vec{D}_1 = \epsilon_0 \vec{E}_1$ et $\vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2$

$\Rightarrow (\epsilon_1 E_1 + \epsilon_2 E_2) \cdot 2\pi r h = \phi$

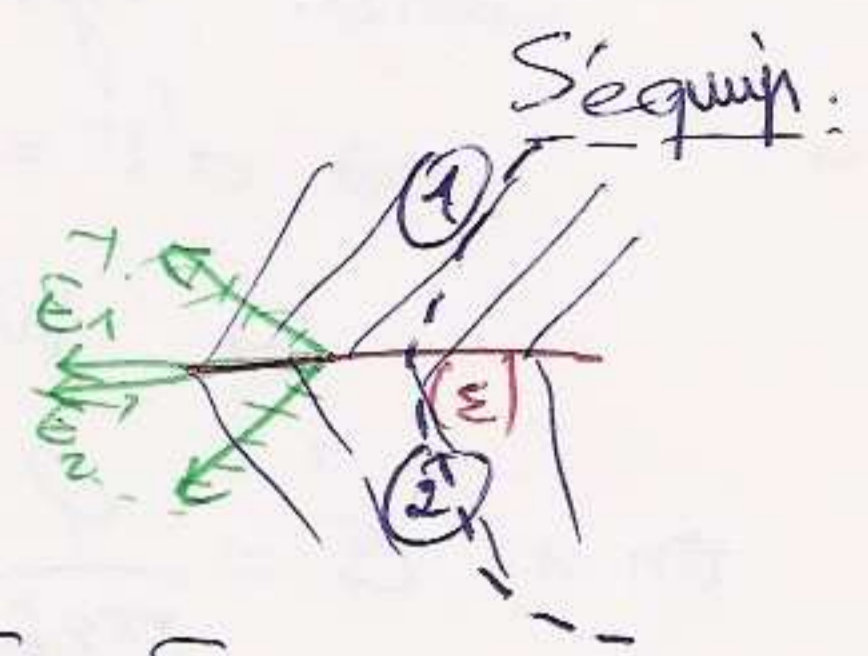
3- Calcul de Σq_{int} : +Q

4- Application du Th de Gauss d \vec{D} : $(\epsilon_1 E_1 + \epsilon_2 E_2) 2\pi r h = +Q$

D'autre part la composante tangentielle du champ est continue $E_{1t} = E_{2t}$

$\Rightarrow E_1 = E_2$

Composante normale a la surface de separation est nulle.



$\Rightarrow (\epsilon_1 E_1 + \epsilon_2 E_2) 2\pi r h = +Q$ et $E_1 = E_2$

$\Rightarrow (\epsilon_1 + \epsilon_2) E_1 \cdot 2\pi r h = +Q \Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)h} \cdot \frac{1}{r}$

$\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)h} \cdot \frac{\vec{u}_r}{r}$

on en deduit \vec{D}_1 et \vec{D}_2 : $\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{Q}{2\pi h} \cdot \frac{\vec{u}_r}{r}$

$\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{Q}{2\pi h} \cdot \frac{\vec{u}_r}{r}$

Remarque :

$\vec{P}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{Q}{2\pi h} \cdot \frac{\vec{u}_r}{r}$

$\vec{P}_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{E}_2 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{Q}{2\pi h} \cdot \frac{\vec{u}_r}{r}$

Calcul de la capacite : ($V_1 = V_0$ et $V_2 = 0$)

$\int_{V_1}^{V_2} -dV = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)h} \cdot \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)h} \ln \frac{R_2}{R_1}$

$(V_1 - V_2) = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)h} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$

$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$

2° Calcul des densites :

$\vec{\sigma}_p = \vec{P}(M_1) \cdot \vec{n}(M_1)$; $\vec{\sigma}_p = \vec{P}(M_2) \cdot \vec{n}(M_2)$

$\vec{\sigma}_L = \vec{D}(M_1) \cdot \vec{n}(M_1)$; $\vec{\sigma}_L = \vec{D}(M_2) \cdot \vec{n}(M_2)$

3^{eme} Question : Calcul d'energie emmagasinee :

$W = W_1 + W_2$; $W_1 = \int \frac{\epsilon_1}{2} \vec{E}_1^2 dV$; $W_2 = \int \frac{\epsilon_2}{2} \vec{E}_2^2 dV$
 $dV = dr (r d\theta) dz$

$r \in [R_1, R_2]; \theta \in [0, 2\pi]; z \in [0, h]$

EXI

considérons un condensateur plan dont les armatures (A) et (B) ont pour surface (S). On néglige les effets des bords, et on applique une d.d.p. V_0 entre (A) et (B) (B étant la terre). On suppose que le contact entre le diélectrique et les armatures n'est pas parfait (direct) et qu'il existe une mince couche d'air. (Voir correction)

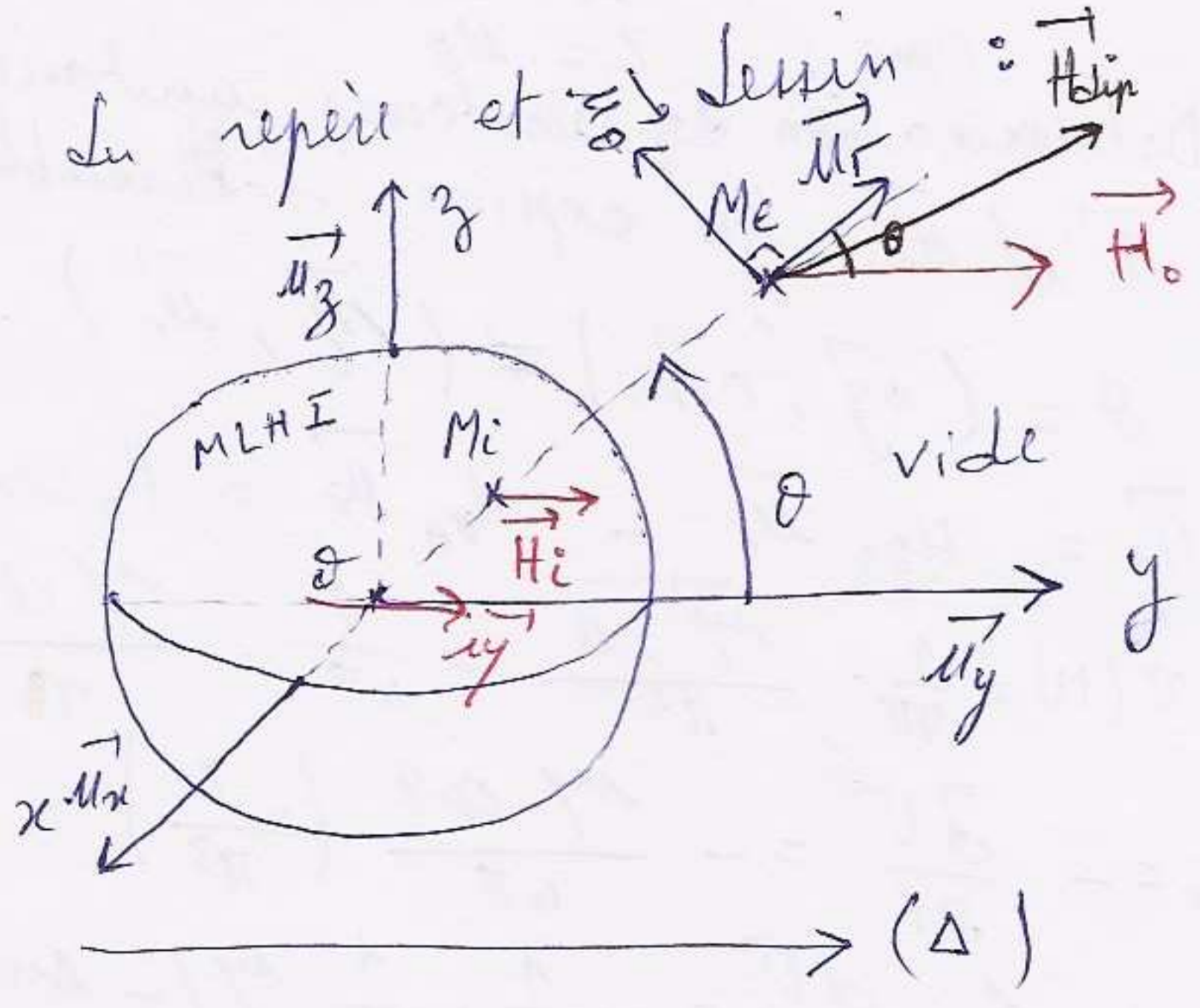
EXII

considérons une sphère de centre O et de rayon R . Constituée d'un milieu aimanté M.L.H.I. de susceptibilité magnétique χ_m . Cette sphère est soumise à la distribution d'un champ magnétique suivant :
 a) l'extérieur de la sphère : champ $H_e(M)$
 ce champ résulte de la superposition d'un champ uniforme H_0 produit par un dipôle magnétique situé au centre de la sphère et de moment magnétique $\vec{m} \parallel \vec{a}(\Delta)$ et m sens que H_0 mais $|m|$ est inconnue.

A l'intérieur de la sphère : champ $H_i(M)$.
 Ce champ est colinéaire à H_0 de m sens et uniforme.
1^{ère} question: Calculer les composantes radiales et orthoradiales de l'induction et du champ en tout point M de l'espace!

Corrigé:

1^{ère} étape: Choix du repère et $\vec{m} \parallel \vec{a}(\Delta)$ sens \vec{H}_{dip}
 (Voir figure)



2^{ème} étape: formules utilisées

A l'extérieur: $OM_e > R$
 superposition de 2 champs: H_0 et H_{dip}
 $H_{ext} = H_0 + H_{dip}$; H_0 donné

H_{dip} : on sait que: $V(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{M \cdot \vec{u}}{OM^2}$

Rmq: si on prend: $\vec{B}_{dip} = -\text{grad } V(M)$
 $V(M) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{M \cdot \vec{u}}{OM^2} \Rightarrow H(M) = -\text{grad } V(M)$

" " " " : $V(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{M \cdot \vec{u}}{OM^2} \Rightarrow \vec{B}(M) = -\text{grad } V(M)$

et dans le vide: $\vec{B}(M) = \mu_0 H(M)$

A l'intérieur: $OM_i < R$

M.L.H.I.: $\vec{B}_i(M) = \mu_0 H_i(M) = \mu_0 [H_i(M) + \vec{I}(M)]$

avec: $H_i(M)$ uniforme et \vec{I} direction et \vec{I} sens que H_0

Donc: $B_i(M)$ est " " " " " " " " " " " "

Surface de séparation entre le milieu aimanté et le vide:
 continuité de la composante normale de \vec{B} : $\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$

$\vec{n}_{ext} = \vec{n}_{12} = \vec{n}_r$ et on a $\vec{n}_r \cdot (\vec{B}_e - \vec{B}_i) = 0$

et puisque pas de courant de conduction (réel)

$|\vec{e}| = 0$ $\vec{e} \cdot (\vec{H}_e - \vec{H}_i) = 0$

\vec{e} est déterminé par un angle de $+\frac{\pi}{2}$

Donc: $\vec{e} = \vec{u}_\theta$

3^{ème} étape: Détermination des vecteurs unitaires de chaque champ

H_0 , H_{dip} , H_i et H_e . On exprime l'ensemble en coord. polaire.

$\vec{r} = OM$; $\theta = (\vec{oy}, \vec{OM}) \equiv (\vec{u}_\theta, \vec{u}_r)$

H_0 ? $H_0 = H_0 \vec{u}_r - H_0 \vec{u}_\theta = H_0 \cos\theta \vec{u}_r - H_0 \sin\theta \vec{u}_\theta$
 H_{dip} ? $V(M) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{M \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{M \cos\theta}{r^2}$ et $H_{dip} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{pmatrix}$

$H_{dip} = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{M \cos\theta}{4\pi r^3} \left(-\frac{2}{r^3} \right) = \frac{M \cos\theta}{2\pi r^3}$

$H_{dip} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} M (-\sin\theta) = \frac{M \sin\theta}{4\pi r^3}$

$$\vec{H}_{dip} = H_{0r} \vec{u}_r + H_{0\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{H}_{dip} = \frac{m}{4\pi r^3} (2 \cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta)$$

\vec{H}_i ? uniforme colinéaire et de m même sens que \vec{H}_0
 nous aurons $\vec{H}_i = H_{ir} \vec{u}_r - H_{i\theta} \vec{u}_\theta$

$$\vec{H}_i = H_i \cos\theta \vec{u}_r - H_i \sin\theta \vec{u}_\theta$$

\vec{H}_e ? $\vec{H}_e = \vec{H}_0 + \vec{H}_{dip}$

$$\vec{H}_e = \left(H_0 \cos\theta + \frac{m \cos\theta}{2\pi r^3} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{m}{4\pi r^3} - H_0 \right) \sin\theta \vec{u}_\theta$$

4^{ème} étape: Calcul des modules:

\vec{H}_0 ? H_0 est donné

$$\vec{H}_{dip}: H_{dip} = \sqrt{H_{0r}^2 + H_{0\theta}^2} = \sqrt{\left(\frac{2m \cos\theta}{4\pi r^3} \right)^2 + \left(\frac{m}{4\pi r^3} \sin\theta \right)^2}$$

$$H_{dip} = \frac{m}{4\pi r^3} \sqrt{3 \cos^2\theta + 1} \quad m \text{ inconnue.}$$

\vec{H}_i ? inconnue.

$$\vec{H}_e: H_e = \sqrt{H_{er}^2 + H_{e\theta}^2} = \sqrt{\left(H_0 + \frac{m}{2\pi r^3} \right)^2 \cos^2\theta + \left(\frac{m}{4\pi r^3} - H_0 \right)^2 \sin^2\theta}$$

Equations de passage pour $OM = R$

* $\vec{u}_r (\vec{B}_e - \vec{B}_i) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_r (\mu_0 \vec{H}_e - \mu \vec{H}_i) = \vec{0}$

$$\vec{u}_r \cdot \left\{ \mu_0 \left[\left(H_0 + \frac{m}{2\pi r^3} \right) \cos\theta \vec{u}_r + \left(\frac{m}{4\pi r^3} - H_0 \right) \sin\theta \vec{u}_\theta \right] - \mu \left(H_i \cos\theta \vec{u}_r - H_i \sin\theta \vec{u}_\theta \right) \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \left[\mu_0 \left(H_0 + \frac{m}{2\pi r^3} \right) \cos\theta - \mu H_i \cos\theta = 0 \right]_{r=R}$$

$$\mu_0 \left(H_0 + \frac{m}{2\pi R^3} \right) = \mu H_i \quad (1)$$

* $\vec{u}_\theta (\vec{H}_e - \vec{H}_i) = \vec{0}$

$$\vec{u}_\theta \cdot \left\{ \left[\left(H_0 + \frac{m}{2\pi r^3} \right) \cos\theta \vec{u}_r + \left(\frac{m}{4\pi r^3} - H_0 \right) \sin\theta \vec{u}_\theta \right] - \left[H_i \cos\theta \vec{u}_r - H_i \sin\theta \vec{u}_\theta \right] \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{m}{4\pi R^3} - H_0 \right) + H_i \sin\theta \right] = 0 \quad (2)$$

2^{ème} equ a 2 inconnues (tout calcul fait).

$$\vec{m} = 4\pi R^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \vec{H}_0$$

\vec{B} à faire (simple)

$$\vec{H}_i = \frac{3}{\mu_r + 2} \vec{H}_0$$

2^{ème} Question : Déterminer le vecteur champ polarisant (depolarisant)

champ polarisant, $\vec{H}_i = \vec{H}_0 + \vec{H}_p \Rightarrow \vec{H}_p = \vec{H}_i - \vec{H}_0$
 et le vecteur aimantation: $\vec{B}_i = \mu_0 (\vec{H}_i + \vec{I}) \Rightarrow \vec{I}$

EX: considérons une sphère de centre O et de rayon R uniformément aimantée parallèlement à un de ses diamètres.

1^{ère} Question: Déterminer le modèle électrique équivalent, exprimez \vec{m}_3 dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ en déduire \vec{I} dans cette base.

1^{ère} étape: repère, dessin (voir figure)

2^{ème} étape: formules utilisées:

$$\vec{j}_{av} = \text{rot } \vec{I} \text{ et } \vec{j}_{as} = \vec{I} \wedge \vec{n}$$

$$\text{Pour } \vec{j}_{av} \quad \vec{I} \text{ uniforme} \Rightarrow \vec{j}_{av} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } \vec{j}_{as} : \vec{I} = I \cdot \vec{u}_3$$

$$\text{avec: } \vec{u}_3 = u_3 \vec{e}_r + (u_3 \cdot \vec{e}_\theta) \vec{e}_\theta$$

$$= \cos(\vec{u}_3, \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r + \cos(\vec{u}_3, \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_\theta$$

$$= \cos \theta \vec{e}_r + \cos(\theta + \pi/2) \vec{e}_\theta$$

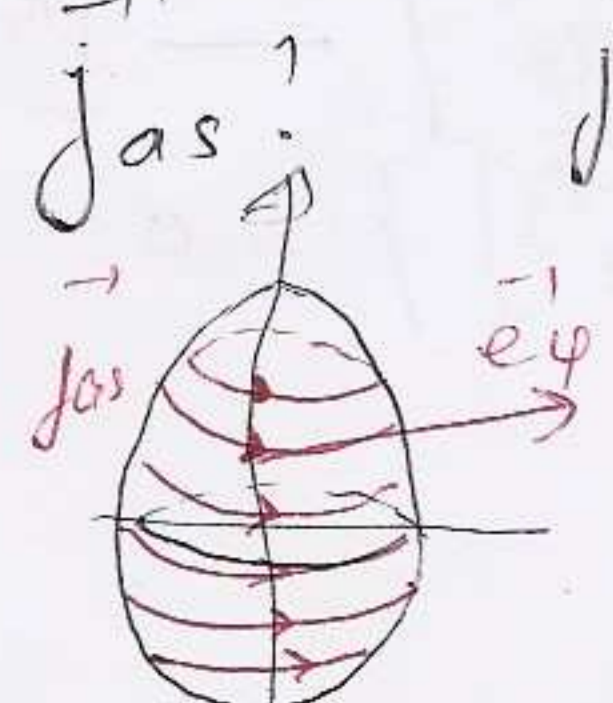
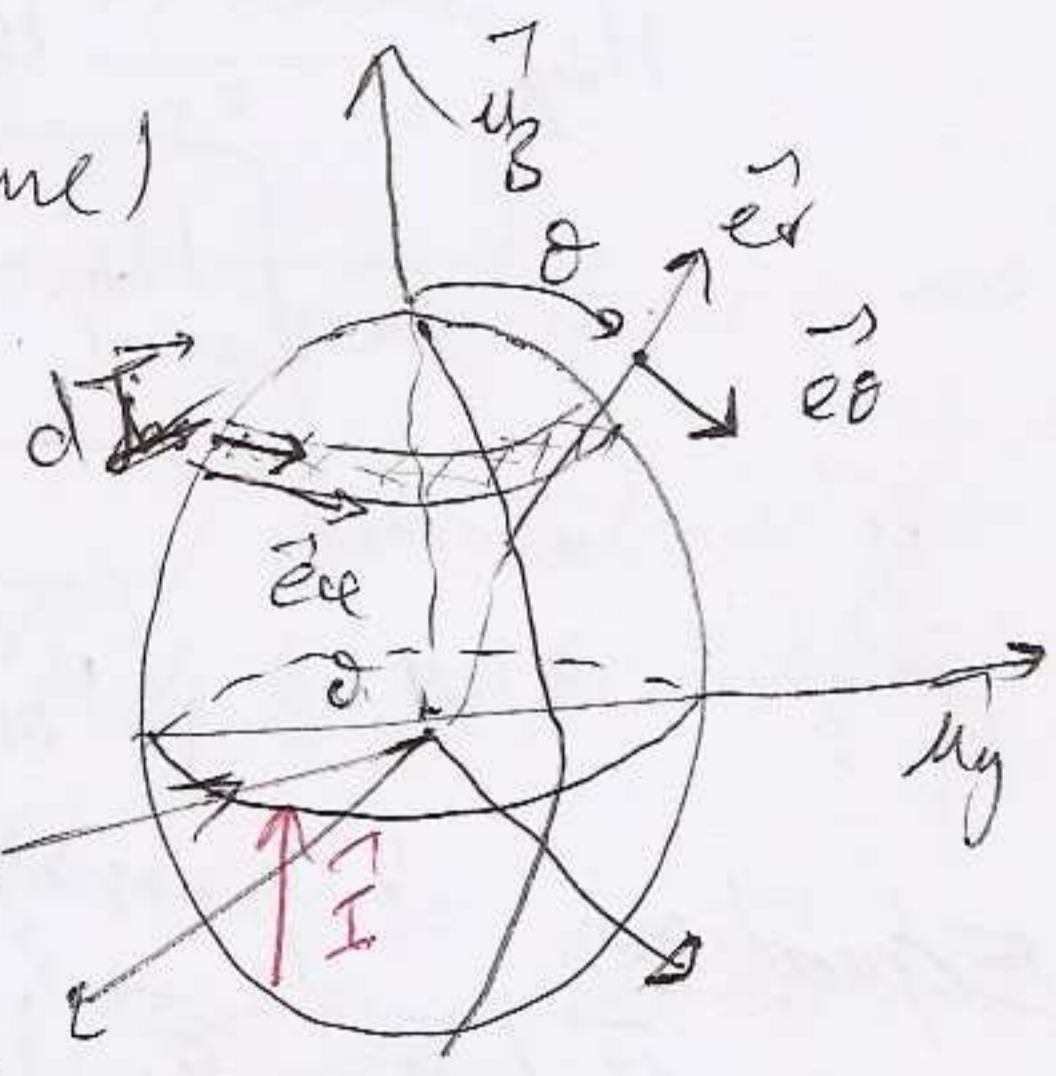
$$\vec{u}_3 = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\text{ce qui donne: } \vec{I} = I \cos \theta \vec{e}_r - I \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{j}_{as} = \vec{I} \wedge \vec{n} \text{ avec } \vec{n} = +\vec{e}_r \Rightarrow \vec{j}_{as} = (I \cos \theta \vec{e}_r - I \sin \theta \vec{e}_\theta) \wedge \vec{e}_r$$

$$\vec{j}_{as} = +I \sin \theta \vec{e}_\phi$$

interprétation: système aimanté équivalent.



2^{ème} Question: Déterminer, l'induction en \mathcal{D} centré de la sphère ainsi que le champ en \mathcal{D} : $\vec{B}_i(\theta)$? $\vec{H}_i(\theta)$

pas de courant de conduction, en commence par $\vec{B}_i(\theta)$

$$d\vec{B}_i(\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{NM^2} \quad \text{avec: } dI = \vec{j}_{\text{as}} \cdot d\vec{A}$$

$$= I(\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta) r \vec{e}_r \cdot d\vec{\Omega}$$

$$= I \sin\theta \vec{e}_\varphi \cdot d\vec{\Omega}$$

Coor. Sphériques: r, θ, φ

$$d\vec{\Omega} = R d\theta \wedge R \sin\theta d\varphi \times$$

$$\Rightarrow dI = IR \sin\theta d\theta \vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{B}_i(\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} I R \sin\theta d\theta \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{R^2} \quad \text{avec: } d\vec{l} = r' d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$= R \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\text{et } \vec{u} = \frac{\vec{NM}}{NM} = -\vec{e}_r$$

$$d\vec{B}_i(\theta) = - \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \sin\theta d\theta \cdot \frac{R \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r}{R^2}$$

$$= - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sin^2\theta d\theta \cdot d\varphi \vec{e}_\theta \cdot R^2$$

$$\Rightarrow \vec{B}_i(\theta) = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \cdot d\varphi \vec{e}_\theta$$

Or: $\vec{B}_i(\theta) = B_i(\theta) \cdot \vec{u}_z$

$$\Rightarrow B_i(\theta) = B_i(\theta) \cdot \vec{u}_z = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \vec{e}_\theta \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{u}_z = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$$

$$B_i(\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} 2\pi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$

$$B_i(\theta) = \frac{2}{3} \mu_0 I \Rightarrow \boxed{\vec{B}_i(\theta) = \frac{2}{3} \mu_0 I \vec{u}_z = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{I}}$$

Détermination $\vec{H}_i(\theta)$:

on sait que: $\vec{B}_i(\theta) = \mu_0 [\vec{H}_i(\theta) + \vec{I}]$

$$\Rightarrow \vec{H}_i(\theta) = \frac{\vec{B}_i(\theta)}{\mu_0} - \vec{I} = \frac{2}{3} \vec{I} - \vec{I} = -\frac{1}{3} \vec{I}$$

3^{ème} Question:

En supposant que l'induction \vec{B}_e d'extérieur de la sphère identique à celle d'un dipôle placé au centre de la sphère, en dimension n sens que \vec{I} (moment \vec{m}).

Donner l'expression des composantes radiale et orthoradiale

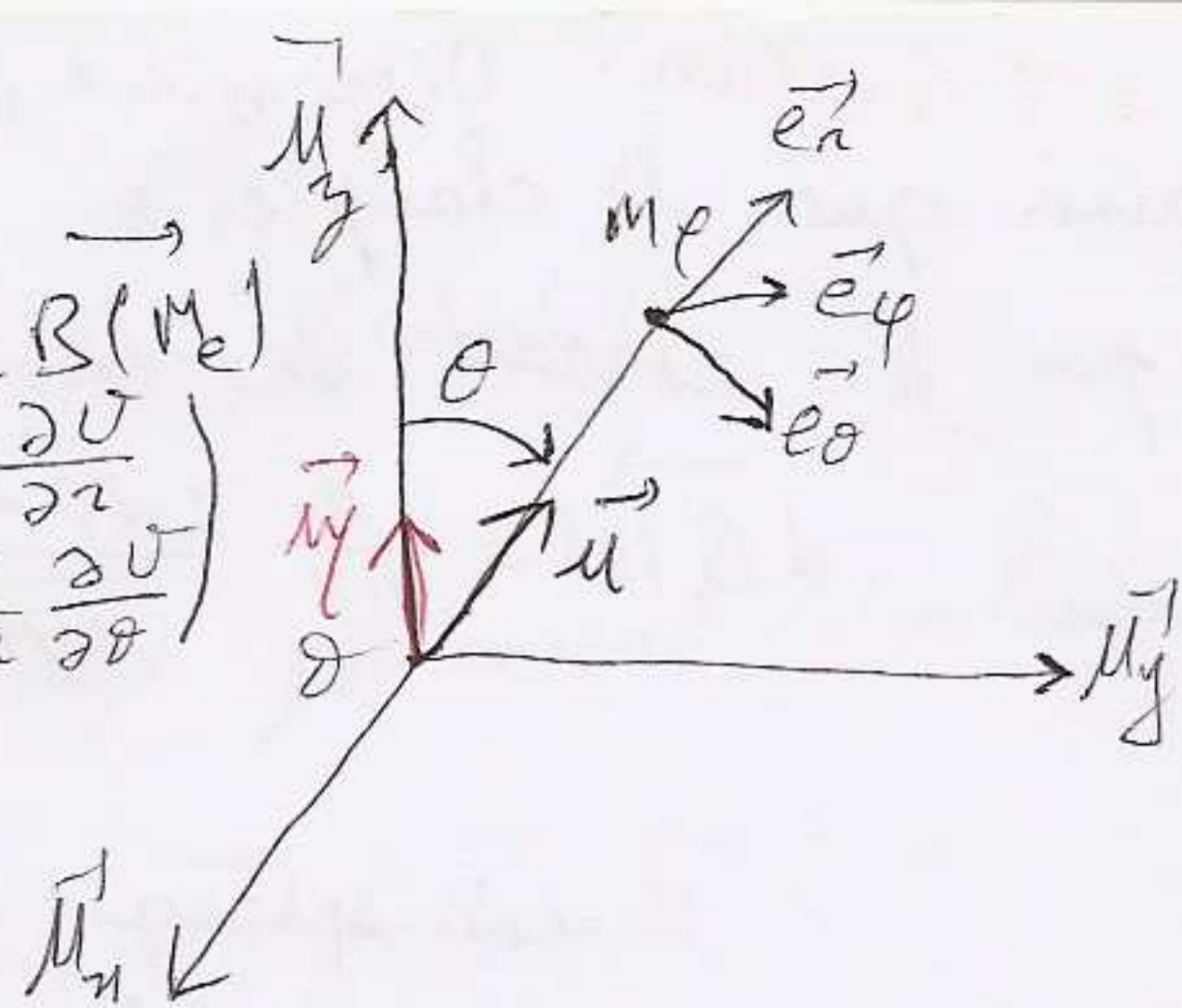
potentiel = $\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \cdot \vec{u}}{OM^2}$ $\vec{r} = OM$

$U(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \cos \theta}{r^2}$ avec $\vec{B}_e(M) = \vec{B}(M_e)$

$B_{er} = - \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{\mu_0}{4\pi} M \cos \theta \frac{\partial r^{-2}}{\partial r} = \begin{pmatrix} - \frac{\partial U}{\partial r} \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \end{pmatrix}$

$= - \frac{\mu_0}{4\pi} (-2) M \cos \theta \frac{1}{r^3}$

$B_{er} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M \cos \theta}{r^3}$



$B_{e\theta} = - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M}{r^3} (-\sin \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin \theta}{r^3}$

H_{er} et $H_{e\theta}$ dans le vide M_e : $\vec{H}_e = \frac{\vec{B}_e}{\mu_0}$

$\Rightarrow H_{er} = \frac{1}{2\pi} \frac{M \cos \theta}{r^3}$ et $H_{e\theta} = \frac{1}{4\pi} \frac{M \sin \theta}{r^3}$

4^{ème} Question: En supposant que \vec{B}_i et \vec{H}_i uniforme déterminer

B_{ir} , $B_{i\theta}$, H_{ir} , $H_{i\theta}$.

Puisque \vec{B}_i et \vec{H}_i sont uniforme, on peut les calculer en n'importe quel pt. particulier ils restent les m en particulier en θ .

Donc: $\vec{B}_i = \vec{B}_i(\theta)$ et $\vec{H}_i = \vec{H}_i(\theta)$

$\Rightarrow \vec{B}_i = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{J} \cdot \vec{u}_z = \frac{2}{3} \mu_0 J (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$

$B_{ir} = \frac{2}{3} \mu_0 J \cos \theta$ et $B_{i\theta} = - \frac{2}{3} \mu_0 J \sin \theta$

et $\vec{H}_i = - \frac{\vec{J}}{3} = - \frac{J}{3} \vec{u}_z = - \frac{J}{3} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$

$H_{ir} = - \frac{J}{3} \cos \theta$ et $H_{i\theta} = \frac{J}{3} \sin \theta$

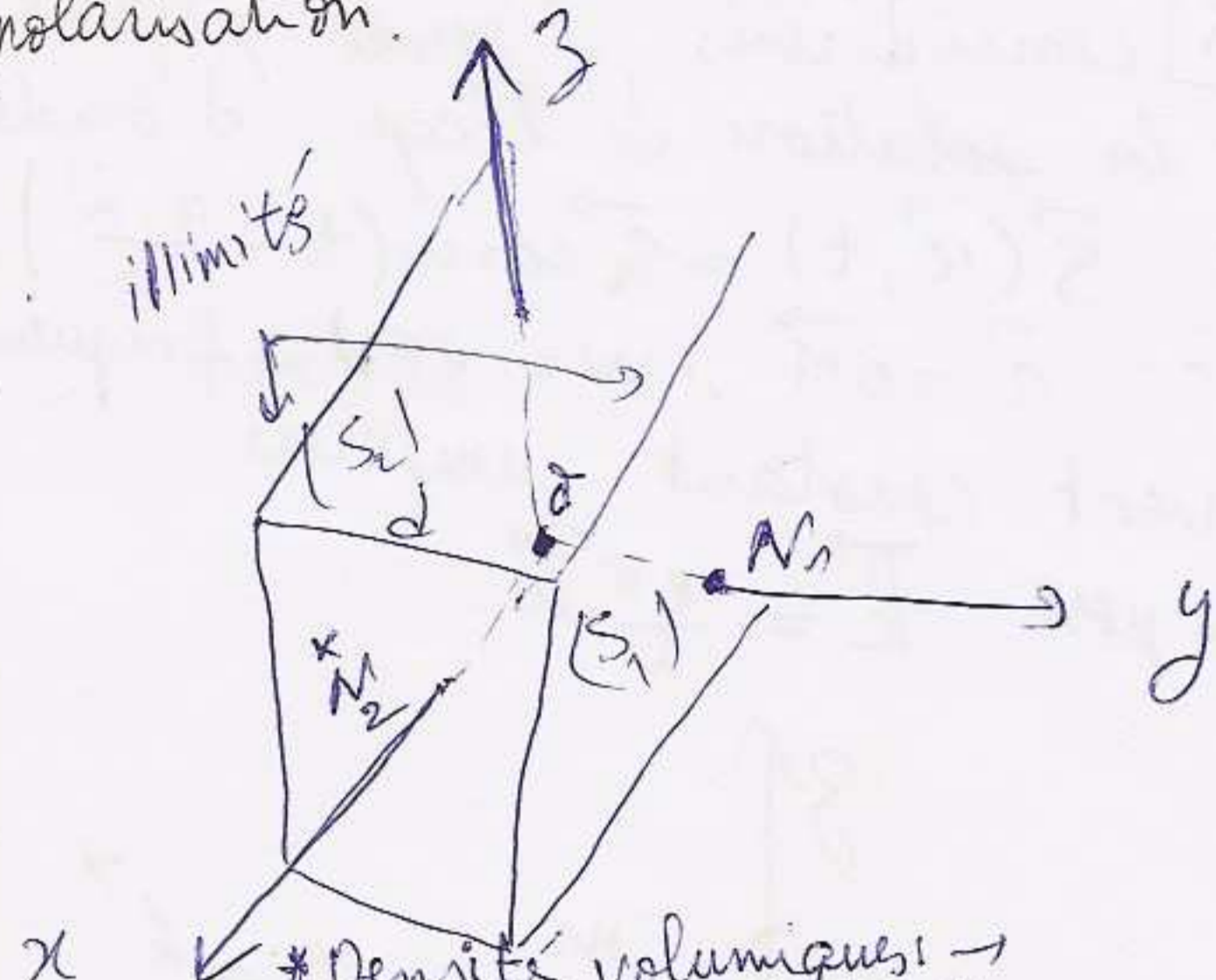
5^{ème} Question: Calculer M .

$\vec{M} \cdot (\vec{B}_e - \vec{B}_i) = 0$

$\vec{r} \cdot (\vec{H}_e - \vec{H}_i) = |\vec{J}| = 0$

EX considérons dans un repère cartésien $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ deux surfaces plans illimités, séparés par une distance d entre elles et au plan xOz . L'espace compris entre ces 2 surfaces est rempli par un milieu diélectrique.

1^{re} Question: Le milieu étant polarisé avec le vect- $\vec{P}(M) = P_0 \cos(\beta x) (\vec{u}_x + \vec{u}_y)$. Déterminer les densités de charges de polarisation.



* Densités volumiques: $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$
 et: $\vec{J}_p = \dot{\vec{P}} = \vec{P} \cdot \vec{n}$
 $\rho_p = -P_0 \frac{\partial}{\partial x} (\cos \beta x) - P_0 \frac{\partial}{\partial y} (\cos \beta x)$

$\rho_p = P_0 \beta \sin(\beta x)$

* Densités surfaciques:
 → surface (S_1) : $\vec{n} = \vec{u}_y \Rightarrow \vec{J}_p = \vec{P}(N_1) \cdot \vec{n}(N_1)$
 $\Rightarrow \vec{J}_p = P_0 (\cos \beta x) (\vec{u}_x + \vec{u}_y) \cdot \vec{u}_y$
 $\vec{J}_p = P_0 \cos(\beta x)$

→ surface (S_2) : $\vec{n} = -\vec{u}_y \Rightarrow \vec{J}_p = \vec{P}(N_2) \cdot \vec{n}(N_2)$
 $\Rightarrow \vec{J}_p = P_0 \cos \beta x (\vec{u}_x + \vec{u}_y) (-\vec{u}_y)$
 $\vec{J}_p = -P_0 \cos \beta x$

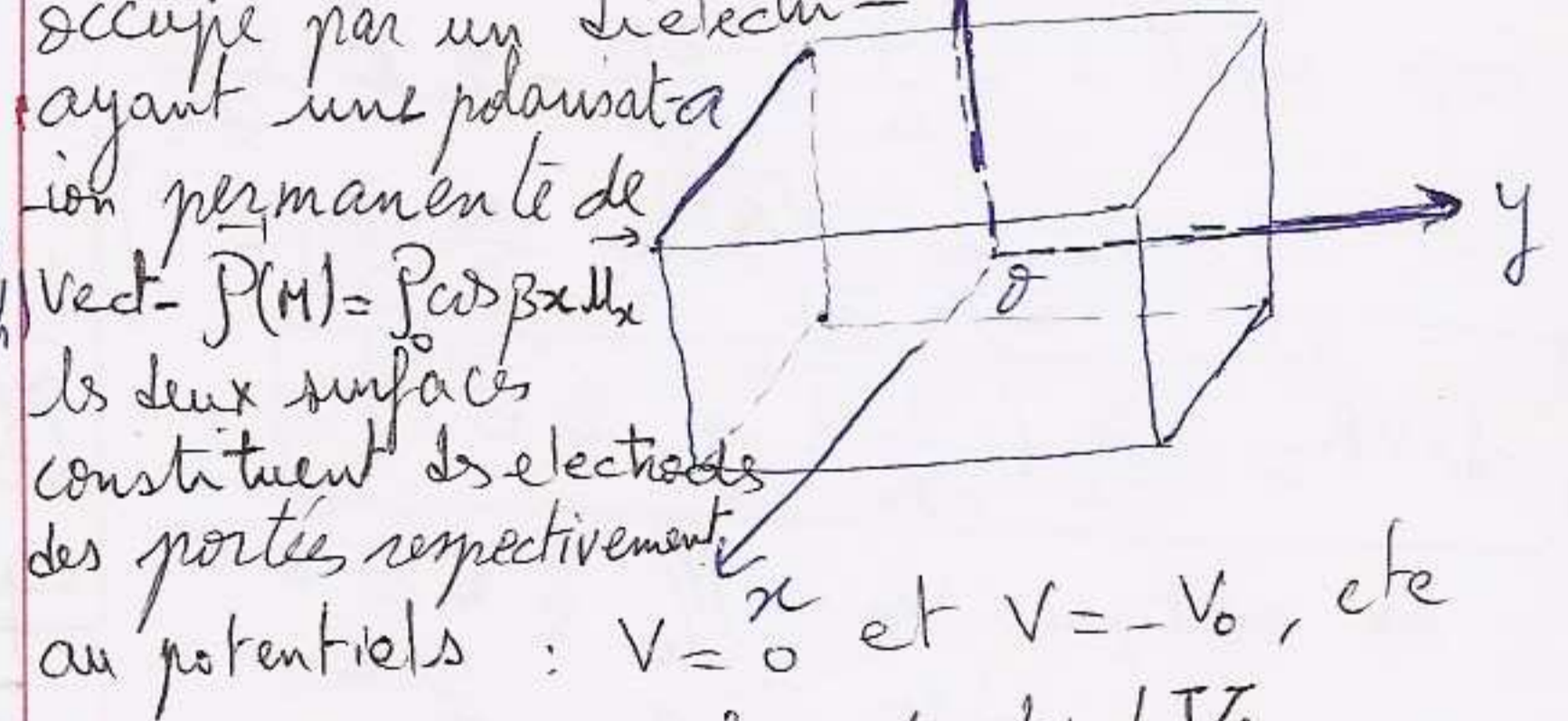
2^{eme} Question:
 1- Si la densité initiale P_0 devient $P_0(t) = P_0 \cos \omega t$. Déterminer le vecteur densité de courant de polarisation et la densité volumique ρ_p .

$\vec{P} = P_0 \cos \beta x (\vec{u}_x + \vec{u}_y) \Rightarrow \vec{P}(x,t) = P_0 \cos \omega t \cos \beta x (\vec{u}_x + \vec{u}_y)$
 * Densité volumique: $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$
 $\rho_p = -\frac{\partial}{\partial x} P_0 \cos \omega t \cos \beta x - \frac{\partial}{\partial y} P_0 \cos \omega t \cos \beta x$
 * Vecteur densité de courant de polarisation on sait que: $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
 on pose: $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$: vect- densité courant dia' D.

Avec: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial (\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$
 on pose: $\vec{j}_p(M,t) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$: vect. densité de polarisation

$\vec{J}_p = \frac{\partial}{\partial t} (P_0 \cos \beta x (\vec{u}_x + \vec{u}_y) \cos \omega t)$
 $= -\omega P_0 \cos \beta x (\vec{u}_x + \vec{u}_y) \sin \omega t$
 2- Vérifier la loi locale de la conservation de la charge: $\text{div } \vec{J}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0$
 on sait que: $\text{div } \vec{J}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0$
 $\Rightarrow -\omega P_0 \sin \omega t (-\beta \sin \beta x) + \beta P_0 \omega (-\sin \omega t) \sin \beta x = 0$
 ce qui est vérifié.

EX considérons un repère cartésien $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, et dans ce repère deux surfaces plans et illimités séparés par la distance a entre elles et au plan yOz . L'espace compris entre ces 2 surfaces est occupé par un diélectrique ayant une polarisation permanente de vect- $\vec{P}(M) = P_0 \cos \beta x \vec{u}_x$. Les deux surfaces constituent les électrodes des portés respectivement au potentiels: $V = 0$ et $V = -V_0$, etc.



* Déterminer le potentiel V :
 on sait que: $\Delta V_p + \frac{\rho_p}{\epsilon_0} = 0$ avec $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$
 $\Rightarrow \rho_p = -\frac{\partial}{\partial x} (P_0 \cos \beta x) = +P_0 \beta \sin \beta x$
 $\Rightarrow \Delta V_p + \frac{1}{\epsilon_0} P_0 \beta \sin \beta x = 0$

avec: $\Delta V_p = \frac{d^2 V_p}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2 V_p}{dx^2} = -\frac{P_0}{\epsilon_0} \beta \sin(\beta x)$
 $\Rightarrow \frac{dV_p}{dx} = \frac{P_0}{\epsilon_0} \cos \beta x + C_1$
 $\Rightarrow V_p = \frac{P_0}{\beta \epsilon_0} \sin(\beta x) + C_1 x + C_2$

* Condition limitees: $x=0 \Rightarrow V_p=0$ (1)
 $x=a \Rightarrow V_p=-V_0$ (2)

(1) $\Leftrightarrow 0 = \frac{P_0}{\epsilon_0 \beta} \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

(2) $\Leftrightarrow -V_0 = \frac{P_0}{\epsilon_0 \beta} \sin(\beta a) + C_1 a$

$\Rightarrow C_1 = \frac{-V_0 - \frac{P_0}{\epsilon_0 \beta} \sin(\beta a)}{a}$

$$V = \frac{P_0}{\epsilon_0 \beta} \sin \beta x - \frac{V_0}{a} x - \frac{P_0}{\epsilon_0 \beta a} \sin(\beta a) x$$

EX: considérons le vecteur $\vec{E} \wedge \vec{H}$ appelé vect. de POYNTING noté \vec{R} .

* Montrer que $\text{div} \vec{R} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$
 avec: w = densité volumique de l'énergie totale (elec + magn).

solution: $\text{div} \vec{R} = \text{div} (\vec{E} \wedge \vec{H})$
 $= \vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H}$

Dans le vide, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
 $\Rightarrow \text{div} \vec{R} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \text{ rot } \vec{B}$

$\Rightarrow \text{div} \vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$
 $\left(\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

$\Rightarrow \text{div} \vec{R} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 $= -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial (\vec{B}^2)}{\partial t} - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial (\vec{E}^2)}{\partial t}$

$$\text{div} \vec{R} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 \right)$$

on sait que: $w_e = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 dV$

$\Rightarrow \frac{dw_e}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$

$w_m = \int_V \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 dV$

$\frac{dw_m}{dV} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$

$\Rightarrow \frac{dw_e}{dV} + \frac{dw_m}{dV} = w$

finallement $\text{div} \vec{R} = -\frac{\partial w}{\partial t}$

$$\text{div} \vec{R} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

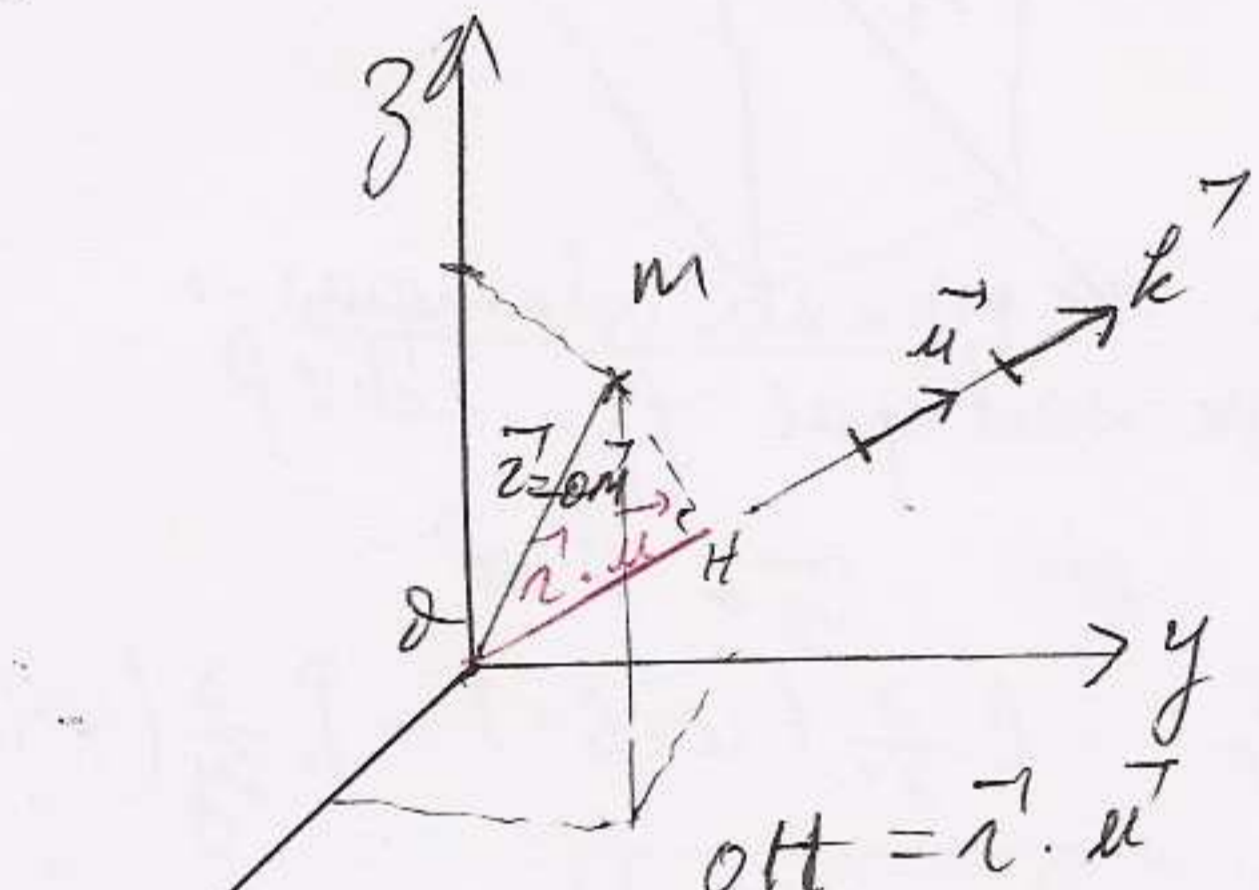
identique a': $\boxed{\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

$\text{div} \vec{R} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ equ. de conservat. de l'énergie libre, avec $\frac{\partial w}{\partial t}$ representent la densité de puissance.

Rmq: $\iiint_{(V)} \text{div} \vec{R} \cdot dV = \iint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S}$ (5)
 $= - \iiint_{(V)} \frac{\partial w}{\partial t} dV$ (6)

EX considérons l'onde plane dont la solution de l'equ. d'onde est: $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{S}_0 \cos w(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c})$
 avec: $\vec{r} = \vec{OM}$, $w = 2\pi \nu t \rightarrow$ fréquence
 \vec{S}_0 vect constant uniforme

on pose $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$



1^{eu} Question: vérifier en coord. polaire Cartesien $\vec{S}(\vec{r}, t)$ est bien solution de l'equ. d'onde ($\vec{u} = \vec{u}_x$)

equ. d'onde: $\Delta S(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$

$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{S}_0 \cos w(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c})$

$\vec{S} = S_{0x} \vec{u}_x + S_{0y} \vec{u}_y + S_{0z} \vec{u}_z$

$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{u} = x$

$\Rightarrow \Delta S(\vec{r}, t) = \Delta S(x \vec{u}_x, t) = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$

$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} S_0 \cos w(t - \frac{x}{c})$

ensuite on calcule $\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} S_0 \cos w(t - \frac{x}{c})$

\Rightarrow La somme est nulle.
 les solutions du type $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{S}_0 \cos w(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c})$

Sont dites ondes plans monochromatiques par analogie

2^{ème} Question: exprimer $\vec{S}(\vec{r}, t)$ en fonction de \vec{k} : $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$

ona: $\vec{S}(\vec{r}, t) = S_0 \cos(\omega(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c}))$

avec: $\omega = 2\pi\nu$ or $\lambda = c.T = \frac{c}{\nu}$

$\Rightarrow \vec{S}(\vec{r}, t) = S_0 \cos(\omega(t - \frac{2\pi\nu}{c} \vec{r} \cdot \vec{u})) = S_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi\nu}{c} \vec{u} \cdot \vec{r})$

$S(\vec{r}, t) = S_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$

3^{ème} Question: Associer à $\vec{S}(\vec{r}, t)$

la grandeur complexe variable: $\vec{S}^*(\vec{r}, t)$

$\vec{S}^*(\vec{r}, t) = S_0 [\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + j \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$

ou: $\vec{S}^*(\vec{r}, t) = \vec{S}_0 \exp(j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$

avec: $\vec{S}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{S}^*(\vec{r}, t) \}$

4^{ème} Question: En coord. Cart.

Determines $\frac{\partial \vec{S}^*}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \vec{S}^*}{\partial t^2}$, $\text{div} \vec{S}^*$, $\text{rot} \vec{S}^*$

et $\Delta \vec{S}^*$ puis Généraliser

1- $\frac{\partial \vec{S}^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} S_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = j\omega S_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = j\omega \vec{S}^*$

$\frac{\partial \vec{S}^*}{\partial t} = j\omega \vec{S}^* \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{S}^*}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{S}^*$

2^o $\text{div} \vec{S}^*$; $\text{div} \vec{S}^* = \frac{\partial}{\partial x} (S_x^*) + \frac{\partial}{\partial y} (S_y^*) + \frac{\partial}{\partial z} (S_z^*)$

avec: $\vec{S}^* = \begin{pmatrix} S_x^* \\ S_y^* \\ S_z^* \end{pmatrix}$; $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

et $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$; $S_0 = \begin{pmatrix} S_{0x} \\ S_{0y} \\ S_{0z} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{S}^* = \begin{pmatrix} S_{0x} \\ S_{0y} \\ S_{0z} \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$

$\frac{\partial}{\partial x} (S_x^*) = \frac{\partial}{\partial x} S_{0x} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} = -jk_x S_{0x} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} = -jk_x S_x^*$

$\frac{\partial}{\partial x} (S_x^*) = -jk_x S_x^*$

$\frac{\partial}{\partial y} (S_y^*) = -jk_y S_y^*$; $\frac{\partial}{\partial z} (S_z^*) = -jk_z S_z^*$
 $\Rightarrow \text{div} \vec{S}^* = -j(k_x S_x^* + k_y S_y^* + k_z S_z^*)$

Generalisation:

$k_x S_x^* + k_y S_y^* + k_z S_z^* = \vec{k} \cdot \vec{S}^*$

$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x^* \\ S_y^* \\ S_z^* \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div} \vec{S}^* = -j \vec{k} \cdot \vec{S}^*$

3^o $\text{rot} \vec{S}^* = \nabla \wedge \vec{S}^* = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ S_x^* e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} & S_y^* e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} & S_z^* e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} \end{vmatrix}$

$\text{rot} \vec{S}^* = \left[\frac{\partial}{\partial y} S_{0z} e^{j\theta} - \frac{\partial}{\partial z} S_{0y} e^{j\theta} \right] \vec{u}_x - \left[\frac{\partial}{\partial x} S_{0z} e^{j\theta} - \frac{\partial}{\partial z} S_{0x} e^{j\theta} \right] \vec{u}_y + \left[\frac{\partial}{\partial x} S_{0y} e^{j\theta} - \frac{\partial}{\partial y} S_{0x} e^{j\theta} \right] \vec{u}_z$

$\text{rot} \vec{S}^* = \left[S_{0z} (-jk_y) e^{j\theta} - S_{0y} (-jk_z) e^{j\theta} \right] \vec{u}_x - \left[S_{0z} (-jk_x) e^{j\theta} - S_{0x} (-jk_z) e^{j\theta} \right] \vec{u}_y + \left[S_{0y} (-jk_x) e^{j\theta} - S_{0x} (-jk_y) e^{j\theta} \right] \vec{u}_z$

$\Rightarrow \text{rot} \vec{S}^* = -j \{ (k_y S_{0z} - k_z S_{0y}) \vec{u}_x - (k_x S_{0z} - k_z S_{0x}) \vec{u}_y + (k_x S_{0y} - k_y S_{0x}) \vec{u}_z \} e^{j\theta}$

$\Rightarrow \text{rot} \vec{S}^* = -j (\vec{k} \wedge \vec{S}_0) e^{j\theta} = -j \vec{k} \wedge \vec{S}^*$

$\Rightarrow \text{rot} \vec{S}^* = -j \vec{k} \wedge \vec{S}^*$

4^o $\Delta \vec{S}^* = \begin{pmatrix} \Delta S_x^* \\ \Delta S_y^* \\ \Delta S_z^* \end{pmatrix}$

avec: $\Delta S_x^* = \frac{\partial^2 S_x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_x^*}{\partial z^2}$

$\Delta S_y^* = \frac{\partial^2 S_y^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_y^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_y^*}{\partial z^2}$

$\Delta S_z^* = \frac{\partial^2 S_z^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_z^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_z^*}{\partial z^2}$

et: $\frac{\partial^2 S_x^*}{\partial x^2} = -k_x^2 S_x^* \Rightarrow \frac{\partial^2 S_x^*}{\partial x^2} = -k_x^2 S_x^*$

$\frac{\partial^2 S_x^*}{\partial x^2} = -k_x^2 S_x^*$

de manière analogue on trouve :

$$\frac{\partial^2 S_x^*}{\partial y^2} = -k_2^2 S_x^* ; \frac{\partial^2 S_x^*}{\partial z^2} = -k_3^2 S_x^*$$

$$\Rightarrow \Delta S_x^* = -(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) S_x^*$$

$$\Delta S = -k^2 S_x^*$$

De même : $\Delta S_y^* = -k^2 S_y^*$ et $\Delta S_z^* = -k^2 S_z^*$

finalement :

$$\Delta \vec{S} = -k^2 \vec{S} = -k^2 \vec{S}^*$$

Question : Appliquer ces résultats

à la structure onde électromagn.

Nous avons que : \vec{A} , \vec{E} et \vec{B} sont solutions d'équations d'onde.

Donc $\vec{A} = A_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$
 $\vec{E} = E_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$
 et $\vec{B} = B_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

1 * Potentiel vecteur,

or $\text{div} \vec{A} = 0$ et d'après les calculs précédents : $\text{div} \vec{A} = -j \vec{k} \cdot \vec{A}$

Donc : $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{A}$

2 * Champ électrique : $V = 0$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} A_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -j \omega A_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -j \omega \vec{A}$$

avec $\vec{E}_0 = -j \omega_0 A_0 = -j \vec{E}_0$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = \omega A_0$$

$$\vec{E} = -j \omega \vec{A}$$

\vec{E} est en quadrature retard sur \vec{A}

3 * Induction magnétique : \vec{B}

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = -j \vec{k} \wedge \vec{A} = j (\vec{k} \wedge A_0) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

on pose : $\vec{B} = B_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

avec : $B_0 = -j \vec{k} \wedge A_0$

$$\Rightarrow B_0 = k A_0 ; B_0 = -j B_0$$

Equ. de propagation :

$$\Delta \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\vec{A} = A_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\Delta \vec{A} = -k^2 \vec{A} \text{ et } \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{A}$$

$$\Rightarrow -k^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2) \vec{A} = 0$$

donc $k^2 = \omega^2 / c^2$

CONTROLE D'ELECTROMAGNETISME (E3)

Session normale 18 juin 2012

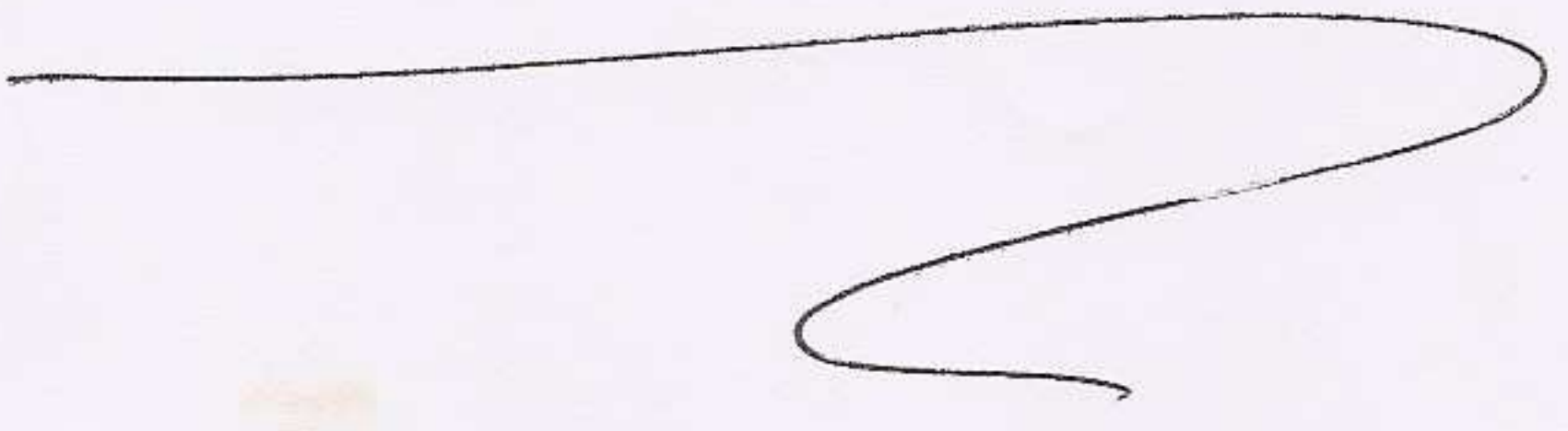
un cable coaxial est constitué par deux armatures conductrices cylindriques de longueur L ; le conducteur interne a un rayon R_i et est maintenu au potentiel V_0 ; le conducteur externe a un rayon R_e et est maintenu au potentiel zéro.

I. L'espace entre les armatures est constitué par un diélectrique MLHI permittivité ϵ

- 1- calculer la capacité du condensateur équivalent
- 2- Déterminer le modèle électrique équivalent
- 3- calculer la densité volumique des charges libres
- 4- calculer l'énergie emmagasinée dans le diélectrique

II. L'espace entre les armatures est constitué par deux diélectriques MLHI permittivités ϵ_1 et ϵ_2 occupant chacun la moitié du volume suivant la longueur du cable.
mêmes questions qu'au I).

Tout Document Interdit



Examen de rattrapage S₄ - E_{III}
09 juillet 2012

I - On considère un milieu magnétique occupant un volume (V) de surface externe (Σ) et de perméabilité μ (M.L.H.I). On définit le vortexage d'un point M de ce milieu par une sphère métallique homogène (S) de rayon R .
En l'absence de tout courant le milieu entier est soumis à un champ H_0 uniforme (donc \vec{J} uniforme) à prendre suivant un axe de la sphère.

1^{ère} question: On néglige le champ dû au courant volumique d'aimantation du voisinage de M et on suppose qu'il n'y a pas de courants sur (Σ) .

1 - Déterminer le champ magnétique à l'intérieur de la sphère (S) .

2 - en déduire l'expression du vecteur \vec{J} .

2^{ème} question: En considérant que pour les actions extérieures la sphère est équivalente à un dipôle magnétique de moment \vec{m} .

1 - calculer l'expression du potentiel scalaire magnétique.

2 - En déduire l'expression du champ magnétique à l'extérieur de la sphère.

3 - vérifier que les conditions de passage sont satisfaites.

Examen de rattrapage S₄ - E_{III}
09 juillet 2012

I - On considère un milieu magnétique occupant un volume (V) de surface externe (Σ_1) et de perméabilité μ (M.L.H.I). On définit le vortexage d'un point M de ce milieu par une sphère métallique homogène (S) de rayon R .
En l'absence de tout courant le milieu entier est soumis à un champ H_0 uniforme (donc \vec{J} uniforme) à prendre suivant un axe de la sphère.

1^{ère} question: On néglige le champ dû au courant volumique d'aimantation du voisinage de M et on suppose qu'il n'y a pas de courants sur (Σ_1) .

1 - Déterminer le champ magnétique à l'intérieur de la sphère (S) .

2 - en déduire l'expression du vecteur \vec{J} .

2^{ème} question: En considérant que pour les actions extérieures la sphère est équivalente à un dipôle magnétique de moment \vec{m} .

1 - calculer l'expression du potentiel scalaire magnétique.

2 - En déduire l'expression du champ magnétique à l'extérieur de la sphère.

3 - vérifier que les conditions de passage sont satisfaites.

II - On se propose d'étudier la propagation dans le vide d'ondes électromagnétiques de champ \vec{E} dont la propagation suivant oz est :

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = X(x) \cos(\omega t + \varphi(z)) \\ E_y = 0 \\ E_z = Z(x) \cos(\omega t + \varphi(z) + \varphi_0) \end{cases}$$

avec $X(x)$, $Z(x)$ et $\varphi(z)$ des fonctions réelles.

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } \frac{d\varphi(z)}{dz} < 0, \varphi_0 \text{ cte réelle } > 0$$

1^{ère} question : écrire en notation complexe les composantes du champ électrique

2^{ème} question : en utilisant successivement l'équation de la divergence et l'équation générale de propagation de \vec{E} , établir les relations liant φ_0 , φ , X et Z .

calculer φ_0 et montrer que $\varphi = -kz$, k cte réelle > 0

3^{ème} question : on pose $\left| \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right| = \alpha^2$

1 - Expliciter les fonctions X et Z pour les deux cas :

$$k^2 < \frac{\omega^2}{c^2} \text{ et } k^2 > \frac{\omega^2}{c^2}$$

2 - Déterminer le champ magnétique \vec{B}

Choisissez un des deux problèmes