Analyse Numérique et Algorithmique

Bouchaib FERRAHI

1er février 2017

Présentation du module

- Filière : SMP
- Semestre :S3
- Code : M20
- intitulé : Analyse Numérique et Algorithmique
- Objectifs :
  - Maitrise des outils Mathématiques utilisés en Physique et en Chimie
  - Application de démarches scientifiques face à des problèmes théoriques et expérimentaux variés.
  - Maitrise des méthodes numériques permettant la résolution des problèmes Mathématiques
  - Initiation à l'algorithmique et à l'utilisation de l'Informatique dans la résoltion des problèmes Mathématiques
- Pré-requis :Analyse 1 et 2, Algèbre 1 et 2
- Volume horaire : 21H de cours + 21H de TD

Contact

Bouchaib FERRAHI

- Département de Mathématiques - Faculté des Sciences - Tétouan
- ferrahi@yahoo.com et Bouchaib.ferrahi@gmail.com
- www.ferrahi.cla.fr
- www.facebook.com/bouchaib.ferrahi
- www.linkedin.com

Plan

1. Analyse Numérique
   - Calculs numériques approchés
   - Zéros de fonctions non-linéaires
   - Approximation et Interpolation Polynomiale
   - Intégration numérique
   - Equations différentielles
   - Systèmes linéaires
2. Algorithmique
   - Introduction et initiation à l'algorithmique
   - Terminologie - Définitions
   - Notions Complémentaires et avancées

Intégration numérique

Introduction et position du problème

$$\text{Soit } I = \int_a^b f(x)dx \text{ où } f \text{ est continue sur } [a, b]$$

Intégration numérique

Introduction et position du problème

$$\text{Soit } I = \int_a^b f(x)dx \text{ où } f \text{ est continue sur } [a, b]$$

Le calcul explicite de cette intégrale n'est pas toujours possible :

Intégration numérique

Introduction et position du problème

$$\text{Soit } I = \int_a^b f(x)dx \text{ où } f \text{ est continue sur } [a, b]$$

Le calcul explicite de cette intégrale n'est pas toujours possible :

$$\text{Par exemple : } \int_0^1 e^{-x^2} dx \ , \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx \ , \ \int_0^1 \cos x^2 dx$$

Intégration numérique

Introduction et position du problème

$$\text{Soit } I = \int_a^b f(x)dx \text{ où } f \text{ est continue sur } [a, b]$$

Le calcul explicite de cette intégrale n'est pas toujours possible :

$$\text{Par exemple : } \int_0^1 e^{-x^2}dx \ , \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \ , \ \int_0^1 \cos x^2 dx$$

• f n'a pas de primitive explicite,
• Le calcul analytique est long et compliqué,
• Le résultat de l'intégrale est une fonction compliquée qui fait appel à d'autres fonctions elles-même longues à évaluer.
• f n'est pas donnée par une forme explicite mais seulement par un nombre fini de couple $(x_i, y_i)_{0\leq i\leq n}$ (suite à une expérience)

Intégration numérique

Introduction et définition

Les méthode d'intégration numérique permettent d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

En utilisant des polynômes d'interpolation de f (dont le calcul de l'intégrale est beaucoup plus simple ! !).
En général, on cherche une approximation sous la forme :

$$\widetilde{I} = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

Intégration numérique

Introduction et définition

L'approximation

$$\widetilde{I} = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

est dite **une formule de quadrature** de I, avec :

- $x_i \in [a, b]$ sont les points d'intégration,
- ω_i sont les poids d'intégration et ils vérifiant :

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i = 1$$

L'approximation quadratique $\widetilde{I}$ de I dépend de la manière dont on choisit les points d'intégration (x_i) et les poids (ω_i)

Intégration numérique

Formule ou méthode des trapèzes

Les points d'intégration a_i sont équidistantes tels que :

$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} = b$ avec $a_{i+1} - a_i = h$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$

et de considérer la valeur approchée :

$$I_n = \frac{h}{2} f(a) + h(f(a_1) + \ldots + f(a_i) + \ldots + f(a_n)) + \frac{h}{2} f(b)$$

que nous pouvons écrire :

$$I_n = \frac{h}{2} f(a) + \frac{h}{2} f(a_1) + \frac{h}{2} f(a_1) + \ldots + \frac{h}{2} f(a_i) + \frac{h}{2} f(a_{i+1}) + \ldots + \frac{h}{2} f(a_n) + \frac{h}{2} f(a_n$$

$$+ \frac{h}{2} f(b)$$

Intégration numérique

Formule des trapèzes

Soit :

$$
\begin{aligned}
I_n = \; & \frac{h}{2}(f(a_0) + f(a_1)) \\
& + \ldots \\
& + \frac{h}{2}(f(a_i) + f(a_{i+1})) \\
& + \ldots \\
& + \frac{h}{2}(f(a_n) + f(a_{n+1}))
\end{aligned}
$$

Intégration numérique

Formule des trapèzes

Remarquons que la quantité :

$$\frac{h}{2}(f(a_i) + f(a_{i+1}))$$

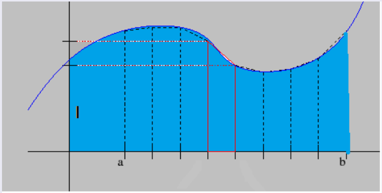
Représente l'aire du Trapèze T_i déterminé par l'axe des abscisses, $x = a_i$, $x = a_{i+1}$ et la droite qui passe par les points $(a_i, f(a_i))$ et $(a_{i+1}, f(a_{i+1}))$. Cette méthode consiste à remplacer l'intégrale I (qui est égale à l'aire comprise entre l'axe des abscisses, $x = a$, $x = b$ et la courbe de f) par la valeur approchée donnée par la somme des aires des trapèze T_i :

$$I_n = T_0 + T_1 + ... + T_n$$

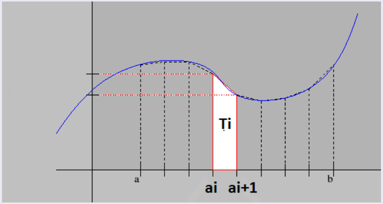
Intégration numérique

Formule des trapèzes

$I = \int_a^b f(x)dx$



$I_n = T_0 + T_1 + ... + T_n$



Intégration numérique

Formule des trapèzes

Remarques : 1) Si les points a_i ne sont pas équidistants, nous pouvons généraliser la méthode en posant :

$$h_i = a_{i+1} - a_i \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, n$$

L'aire du trapèze T_i est donnée par :

$$\frac{h_i}{2}(f(a_i) + f(a_{i+1}))$$

et une valeur approchée de I est donnée par :

$$I_n = T_0 + T_1 + \ldots + T_n$$

Intégration numérique

Formule des trapèzes

Remarques : 2) Les sommes de Riemann définies par :

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} (a_{j+1} - a_j) f(\theta_j) \text{ avec } \theta_j \in [a_j, a_{j+1}]$$

converge vers l'intégrale de Riemann de f $(I = \int_a^b f(x)dx)$.

Intégration numérique

Exemples :

1) Un seul point $x_0 \in [a, b]$: On choisit un seul point d'intégration dans $[a, b]$ et on remplace f par un polynôme d'interpolation P_0 de degré zéro tel que $P_0(x) = f(x_0)$. Donc :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \widetilde{I} = \int_a^b P_0(x)dx = \int_a^b f(x_0)dx = (b-a)f(x_0)$$

Généralement, les cas les plus utilisés sont :

- $x_0 = a$: Méthode rectangle à gauche (d'ordre 0),
- $x_0 = b$: Méthode rectangle à droite (d'ordre 0),
- $x_0 = \frac{a+b}{2}$: Méthode du point au milieu (d'ordre 1).

Intégration numérique

Exemples :

2) Interpolation linéaire : On choisit deux point d'intégration $x_0 = a$ et $x_1 = b$ et on remplacer f par un polynôme d'interpolation P_1 de degré un tel que :

$$P_1(x) = \frac{(x-a)f(b) - (x-b)f(a)}{b-a}$$

Donc :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \widetilde{I} = \int_a^b P_1(x)dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Méthode du trapèze (un seul) d'ordre 1.

Intégration numérique

Exemples :

3) Méthode de Newton-Cotes (cas général) : On choisit les $n+1$ points équidistants définit par :
$x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ avec $i = 0, 1, ..., n$.
Soit $p_n(.)$ le polynôme d'interpolation de f sur la base des $n+1$ points distincts $(x_i)_{i=0,1,\dots,n}$, alors :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

avec $(L_i(.))_i$ les polynômes caractéristiques de Lagrange

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Intégration numérique

Exemples :

Commençant par déterminer la quadrature sur l'intervalle $[-1, 1]$ en utilisant le changement de variable canonique :

$$x \in [a, b] \rightarrow \overline{x} = \frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}} \in [-1, 1]$$

et on subdivise l'intervalle $[-1, 1]$ en introduisant les $n + 1$ points équidistants définit par :

$$\theta_i = \frac{x_i - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}} = -1 + \frac{2i}{n} \text{ avec } i = 0, 1, \ldots, n$$

Intégration numérique

Exemples :

Le polynôme d'interpolation d'une fonction $f \in C([-1,1])$ (sur la base des θ_i) est donné par :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\theta_i) L_i(x)$$

avec $(L_i(.))_i$ les polynômes caractéristiques de Lagrange

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Intégration numérique

Exemples :

Donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)dx &\approx \int_{-1}^{1} p_n(x)dx = \int_{-1}^{1}\sum_{i=0}^{n} f(\theta_i)L_i(x)dx \\
&\approx \sum_{i=0}^{n} f(\theta_i)\int_{-1}^{1} L_i(x)dx = 2\sum_{i=0}^{n} f(\theta_i)\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_i(x)dx}_{\omega_i} \\
&\approx 2\sum_{i=0}^{n} f(\theta_i)\omega_i
\end{aligned}$$

Les points θ_i sont distribués d'une manière symétrique autour de 0,
On a : $\theta n - i = -\theta_i$, $L_{n-i}(x) = L_i(-x)$, $\omega_{n-i} = \omega_i$

Intégration numérique

Exemples :

Sur $[a, b]$: calculons $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant le changement de variable :

$$\overline{x} = \frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}} \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}\overline{x} + \frac{b+a}{2} = a + (\overline{x}+1)\frac{b-a}{2}$$

avec : $x = a \Rightarrow \overline{x} = -1,\ x = b \Rightarrow \overline{x} = 1,\ dx = \frac{b-a}{2}d\overline{x}$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(a + (\overline{x}+1)\frac{b-a}{2})d\overline{x}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \times 2\sum_{i=0}^{n} f(a + (\theta_i + 1)\frac{b-a}{2})\omega_i$$

Intégration numérique

Exemples :

On en déduit :

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} f(a+(\theta_i+1)\frac{b-a}{2})\omega_i = (b-a)\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\omega_i$$

Avec :

$$\omega_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_i(x)dx$$

Les poids de la quadrature sur $[-1, 1]$.

Intégration numérique

Ordre d'une méthode d'intégration :

L'ordre d'une méthode d'intégration est le plus grand degré des polynômes intégrés exactement ($I = \widetilde{I}$). Nous avons :

Méthode	Nombre de point	Ordre
Rectangle	1	0
Milieu	1	1
Trapèze (un)	2	1
Simpson (Newton-Cotes $n = 2$)	3	3

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

On pose $h = \frac{b-a}{n}$ et $a_i = a + ih$ avec $i = 0, 1, ..., n$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

On pose $h = \frac{b-a}{n}$ et $a_i = a + ih$ avec $i = 0, 1, ..., n$
Méthode composite des rectangles à gauche :

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

On pose $h = \frac{b-a}{n}$ et $a_i = a + ih$ avec $i = 0, 1, ..., n$
Méthode composite des rectangles à gauche :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf(a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a+ih)$$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

On pose $h = \frac{b-a}{n}$ et $a_i = a + ih$ avec $i = 0, 1, ..., n$
Méthode composite des rectangles à gauche :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf(a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a+ih)$$

Méthode composite des rectangles à droite :

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

On pose $h = \frac{b-a}{n}$ et $a_i = a + ih$ avec $i = 0, 1, ..., n$
Méthode composite des rectangles à gauche :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf(a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a+ih)$$

Méthode composite des rectangles à droite : $\int_a^b f(x)dx$

$$\simeq \sum_{i=1}^{n} hf(a_i) = \sum_{i=1}^{n} hf(a+ih) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a+(i+1)h)$$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

On pose $h = \frac{b-a}{n}$ et $a_i = a + ih$ avec $i = 0, 1, ..., n$

Méthode composite des rectangles à gauche :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf(a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a+ih)$$

Méthode composite des rectangles à droite : $\int_a^b f(x)dx$

$$\simeq \sum_{i=1}^{n} hf(a_i) = \sum_{i=1}^{n} hf(a+ih) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a+(i+1)h)$$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode composite des rectangles au milieu :

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode composite des rectangles au milieu :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf(\frac{(a_i + a_{i+1})}{2}) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a + (i + \frac{1}{2})h)$$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode composite des rectangles au milieu :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf(\frac{(a_i + a_{i+1})}{2}) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a + (i + \frac{1}{2})h)$$

Méthode composite des trapèzes :

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode composite des rectangles au milieu :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf(\frac{(a_i + a_{i+1})}{2}) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a + (i + \frac{1}{2})h)$$

Méthode composite des trapèzes : $\int_a^b f(x)dx$

$$\simeq \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{n-1} hf(a_i) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{n-1} hf(a + ih)$$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode de Simpson (Newton-cotes avec $n = 2$)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]$$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode de Simpson (Newton-cotes avec $n = 2$)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]$$

Démonstration : Application de la méthode Newton-cotes avec $n = 2$ dans $[-1, 1]$ puis $[a, b]$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode de Simpson (Newton-cotes avec $n=2$)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]$$

Démonstration : Application de la méthode Newton-cotes avec $n=2$ dans $[-1,1]$ puis $[a,b]$

Méthode composite de Simpson :

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode de Simpson (Newton-cotes avec $n = 2$)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]$$

Démonstration : Application de la méthode Newton-cotes avec $n = 2$ dans $[-1, 1]$ puis $[a, b]$

Méthode composite de Simpson :

Application de la méthode de Simpson dans chaque intervalle $[a_i, a_{i+2}]$ (n est pair) :

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode de Simpson (Newton-cotes avec $n = 2$)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]$$

Démonstration : Application de la méthode Newton-cotes avec $n = 2$ dans $[-1, 1]$ puis $[a, b]$

Méthode composite de Simpson :

Application de la méthode de Simpson dans chaque intervalle $[a_i, a_{i+2}]$ (n est pair) :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{j=\frac{n}{2}-1} f(a_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{j=\frac{n}{2}} f(a_{2j-1}) + f(b)\right]$$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthodes basées sur l'interpolation :

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthodes basées sur l'interpolation : On détermine P_n un polynôme d'interpolation et on a :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_n(x)dx$$

Interpolation de Lagrange $\rightarrow$ Méthode de Newton-cotes. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de calculer P_n mais seulement les L_i.

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthodes basées sur l'interpolation : On détermine P_n un polynôme d'interpolation et on a :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_n(x)dx$$

Interpolation de Lagrange $\rightarrow$ Méthode de Newton-cotes. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de calculer P_n mais seulement les L_i.

Interpolation de Newton utilisant les différences divisées :

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthodes basées sur l'interpolation : On détermine P_n un polynôme d'interpolation et on a :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_n(x)dx$$

Interpolation de Lagrange $\rightarrow$ Méthode de Newton-cotes. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de calculer P_n mais seulement les L_i.
Interpolation de Newton utilisant les différences divisées : Cette Méthode utilise une base différente de l'espace $\mathbb{P}_n[X]$, à savoir :

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

$$\begin{cases} Q_0(x) = 1 \\ Q_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{j=k-1}(x-x_j), \quad \text{k=1,2,...,n} \end{cases}$$

Dans cette base, le coefficient de $Q_k(x)$ est donné par la différence divisée $f[x_0, x_1, ..., x_k]$ définie par récurrence :

$$\begin{cases} f[x_0] = f(x_0) \\ f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{f[x_1,...,x_k]-f[x_0,...,x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad \text{k=1,2,...,n} \end{cases}$$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Une méthode pratique :

x	$f[x] = f(x)$			
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_2, x_2, x_3]$

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1.40	1.56	1.76	2.00	2.28

x	$f[x]=f(x)$				
0.1	1.40				
0.2	1.56	$\frac{1.56-1.40}{0.2-0.1}=1.6$			
0.3	1.76	$\frac{1.76-1.56}{0.3-0.2}=2.0$	$\frac{2.0-1.6}{0.3-0.1}=2.0$		
0.4	2.00	$\frac{2.0-1.76}{0.4-0.3}=2.4$	$\frac{2.4-2.}{0.4-0.2}=2.0$	0.	
0.5	2.28	$\frac{2.28-2.0}{0.5-0.4}=2.8$	$\frac{2.8-2.4}{0.5-0.3}=2.0$	0.	0.

$$P_4(x) = 1.4+1.6(x-0.1)+2(x-0.1)(x-0.2)+0(x-0.1)(x-0.2)(x-0.3)$$
$$+0(x-0.1)(x-0.2)(x-0.3)(x-0.4)$$

Intégration numérique

Estimation de l'Erreur

Méthode	Simple	Combinée
Rectangle au milieu	$E = \frac{(\frac{b-a}{2})^3}{3} \lvert f''(\eta)\rvert$	$E_n = \frac{b-a}{24} (\frac{b-a}{n})^2 \lvert f''(\eta)\rvert$
Trapèzes	$E = \frac{(b-a)^3}{12} \lvert f''(\eta)\rvert$	$E_n = \frac{(b-a)^3}{12} (\frac{b-a}{n})^2 \lvert f''(\eta)\rvert$
Simpson	$E = \frac{(\frac{b-a}{2})^5}{90} \lvert f^{(4)}(\eta)\rvert$	$E_n = \frac{b-a}{180} (\frac{b-a}{4n})^4 \lvert f^{(4)}(\eta)\rvert$

Intégration numérique

Les méthodes précédentes fixent d'abord les points x_i et cherchent les poids ω_i. Pour améliorer la méthode, on peut chercher à optimiser le choix des x_i pour obtenir la meilleure approximation (de maximiser l'ordre de la méthode, $n+1$ au maximum).
On se place sur $[-1,1]$ et on cherche les points x_i et les poids ω_i pour minimiser la différence :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\omega_i$$

Intégration numérique

Méthode de Gauss-Legendre :

Théorème :

Il existe un choix et un seul des points x_i et des poids ω_i de sorte que la méthode soit d'ordre $p = 2n + 1$. Les points x_i sont les zéros du polynôme de Legendre $\mathbb{L}_{n+1}$. Les poids ω_i sont donnés par plusieurs formules, en particulier :
D'autre part, l'erreur est donnée par :

$$E(f) = c\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$$ où $\xi \in [-1, 1]$ à condition : f suffisamment régulière

Intégration numérique

Méthode de Gauss-Legendre :

$\mathbb{L}_{n+1}$ définit par la relation de recurrence :

$(n+1)\mathbb{L}_{n+1}(x) = (2n+1)x\mathbb{L}_n(x) - n\mathbb{L}_{n-1}(x)$, avec $\mathbb{L}_0 = 1$ et $\mathbb{L}_1 = x$

Pour déterminer les racines, $(x_i)_{i=0,\dots,n}$, de $\mathbb{L}_{n+1}(x)$ nous pouvons utiliser la formule équivalente suivante :

$$x\mathbb{L}_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}\mathbb{L}_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}\mathbb{L}_{n-1}(x)$$

et x est une valeur propre d'une matrice tridiagonale (à déterminer).
En pratique, nous pouvons utiliser une méthode numérique pour déterminer des valeurs approchées des racines $(x_i)_{i=0,\dots,n}$.

Intégration numérique

Méthode de Gauss-Legendre :

$$\mathbb{L}_0 = 1,\ \mathbb{L}_1 = x \text{ et } \mathbb{L}_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Un seul point d'intégration : $x_0 = 0$ et $\omega_0 = 2$

Intégration numérique

Méthode de Gauss-Legendre :

$$\mathbb{L}_0 = 1,\ \mathbb{L}_1 = x \text{ et } \mathbb{L}_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Un seul point d'intégration : $x_0 = 0$ et $\omega_0 = 2$

Deux points $\mp\sqrt{\frac{1}{3}}$ et les poids : $\omega_i = 1,\ i = 0, 1$

Intégration numérique

Méthode de Gauss-Legendre :

$$\mathbb{L}_0 = 1,\ \mathbb{L}_1 = x \text{ et } \mathbb{L}_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Un seul point d'intégration : $x_0 = 0$ et $\omega_0 = 2$

Deux points $\mp\sqrt{\frac{1}{3}}$ et les poids : $\omega_i = 1,\ i = 0, 1$

Trois points d'intégration : $\mathbb{L}_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \Rightarrow x_i = \mp\sqrt{\frac{3}{5}}, 0$ et $\omega_i = \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$

Intégration numérique

Méthode de Gauss-Legendre :

1) Les points d'intégration, $(x_i)_{i=0,...,n-1}$, racines du polynôme de Legendre $\mathbb{L}_n$,
2) Les poids $(\omega_i)_{i=0,...,n-1}$ sont aussi donnés par :

$$\omega_i = \frac{-2}{(n+1)\mathbb{L}'_n(x_i)\mathbb{L}_{n+1}(x_i)} = \frac{2}{(1-x_i^2)(\mathbb{L}'_n(x_i))^2} \text{ pour } i = 0, ..., n$$

3) $\mathbb{L}_n$ est définit aussi comme solution de l'équation de Legendre :

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}] + n(n+1)y = 0$$

C'est à dire que $\mathbb{L}_n$ vérifie : $\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{d\mathbb{L}_n}{dx}] + n(n+1)\mathbb{L}_n = 0.$