Introduction à l'analyse numérique.

Plan du cours

- Dérivation et Intégration numérique.
- Interpolation polynomiale.
- Calcul numérique des racines.
- Résolution numérique des EDO.
- Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires.

Dérivation numérique

Motivation

On voudrait être en mesure d'évaluer numériquement la dérivée d'une fonction qui n'est connue que par ses valeurs en un certain nombre de points. Ce problème de dérivation numérique est très commun en ingénierie et en analyse numérique. C'est la base des méthodes de différences finies pour résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi'(x) = f\left(x, \phi(x)\right), \; x \in [a, b], \\ \phi(a) = \alpha_0, \; \text{condition initiale ou condition de Cauchy.} \end{array} \right.$$

Jérôme Bastien, Jean-Noïl Martin
Introduction à l'analyse numérique, Applications sous Matlab.
Editeur : Dunod .

Définition

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ une suite finie strictement croissante de points x_i, $i = 0, \ldots, n$, c'est à dire

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Par exemple

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n} \text{ avec } \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Définition

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ une suite finie strictement croissante de points x_i, $i = 0, \ldots, n$, c'est à dire

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Par exemple

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n} \text{ avec } \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Position du problème

Soit ϕ une fonction connue seulement par sa valeur en $(n+1)$ points donnés x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.
L'ingénieur est souvent placé devant le problème suivant : comment fournir une valeur approchée de la dérivée, d'ordre un ou supérieur, de ϕ en un point de $[a, b]$.

Formule de difference progressive

Soit $\phi \in \mathcal{C}^2([a,b])$. En utilisant le développement de Taylor d'ordre 1 de ϕ autour de x_i

$$\begin{aligned} \phi'(x_i) &= \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{h}{2}\phi''(\alpha), \quad \alpha \in]x_i, x_{i+1}[, \\ h &= x_{i+1} - x_i. \end{aligned}$$

L'erreur commise est $-\frac{h}{2}\phi''(\alpha)$ donc en $O(h)$:

$$\left| \phi'(x_i) - \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [a,b]} |\phi''(x)|.$$

Par conséquent,

$\phi'(x_i) \approx \dfrac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ approximation de la dérivée première en x_i.

Formule de difference régressive

En utilisant le développement de Taylor d'ordre 1 de ϕ autour de x_i

$$\begin{aligned} \phi'(x_i) &= \frac{\phi(x_i)-\phi(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} + \frac{h}{2}\phi''(\alpha), \quad \alpha \in]x_{i-1}, x_i[, \\ h &= x_i - x_{i-1}. \end{aligned}$$

L'erreur commise est $\frac{h}{2}\phi''(\alpha)$ donc en $O(h)$:

$$\left| \phi'(x_i) - \frac{\phi(x_i)-\phi(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} \right| \leq \frac{h}{2} \max_{x\in[a,b]} |\phi''(x)|.$$

Par conséquent,

$\phi'(x_i) \approx \dfrac{\phi(x_i)-\phi(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$ approximation de la dérivée première en x_i.

Formule de difference centrale

La formule de différence centrale de la dérivée en x_i peut être trouvée en utilisant la formule de Taylor d'ordre 3 avec

$$\phi(x_{i+1}) = \phi(x_i) + h\phi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\phi''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\phi^{(3)}(\alpha),\ \alpha_1 \in]x_i, x_{i+1}[,$$

$$\phi(x_{i-1}) = \phi(x_i) - h\phi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\phi''(x_i) - \frac{h^3}{3!}\phi^{(3)}(\alpha_2),\ \alpha_2 \in]x_{i-1}, x_i[.$$

Si on suppose que $\phi^{(3)}$ est continue sur $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ on peut écrire la formule suivante :

$$\phi'(x_i) = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{12}(\phi^{(3)}(\alpha_1) + \phi^{(3)}(\alpha_2)).$$

Par conséquent, l'erreur est en $O(h^2)$:

$$\left|\phi'(x_i) - \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1})}{2h}\right| \leq \frac{h^2}{6} \max_{x\in[a,b]} |\phi^{(3)}(x)|.$$

Formules à trois points

Il est possible de développer d'autres formules, pour cela il suffit d'écrire un développement de Taylor de ϕ autour de x_i avec un pas $2h$ par exemple :

$$\phi(x_{i+2}) = \phi(x_i) + 2h\phi'(x_i) + 2h^2\phi''(x_i) + \frac{4h^3}{3}\phi^{(3)}(\alpha_1),\ \alpha_1 \in]x_i, x_i + 2h[,$$

$$\phi(x_{i+1}) = \phi(x_i) + h\phi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\phi''(x_i) + \frac{h^3}{6}\phi^{(3)}(\alpha_2),\ \alpha_2 \in]x_i, x_i + h[,$$

En combinant ces deux équations de façon à faire disparaître la dérivée seconde, on obtient :

$$\phi'(x_i) \approx \frac{4\phi(x_{i+1}) - 3\phi(x_i) - \phi(x_{i+2})}{2h}.$$

On peut démontrer que dans ce cas, l'erreur peut se mettre sous la forme suivante :

$$\phi'(x_i) - \frac{4\phi(x_{i+1}) - 3\phi(x_i) - \phi(x_{i+2})}{2h} = \frac{h^2}{3}\phi^{(3)}(\alpha),\ \alpha \in]x_i, x_i + 2h[.$$

$$
\begin{aligned}
Err1 &:= \left|-\sin(1) - (\cos(1+h) - \cos(1))/h\right|, \\
Err2 &:= \left|-\sin(1) - (\cos(1) - \cos(1-h))/h\right|, \\
Err3 &:= \left|-\sin(1) - (\cos(1+h) - \cos(1-h))/(2h)\right|, \\
Err4 &:= \left|-\sin(1) - (4\cos(1+h) - 3\cos(1) - \cos(1+2h))/(2h)\right|
\end{aligned}
$$

h	$Err1$	$Err2$	$Err3$	$Err4$
10^{-1}	2.5591×10^{-2}	2.8394×10^{-2}	1.4018×10^{-3}	2.9299×10^{-3}
10^{-2}	2.6875×10^{-3}	2.7155×10^{-3}	1.4024×10^{-5}	2.8183×10^{-5}
10^{-3}	2.7001×10^{-4}	2.7029×10^{-2}	1.4025×10^{-7}	2.8063×10^{-7}

TABLE: Erreurs en fonction du pas pour les méthodes progressive, régressive, centrale et à trois points.

$$
\begin{aligned}
Err1 &:= \left| -\sin(1) - (\cos(1+h) - \cos(1))/h \right|, \\
Err2 &:= \left| -\sin(1) - (\cos(1) - \cos(1-h))/h \right|, \\
Err3 &:= \left| -\sin(1) - (\cos(1+h) - \cos(1-h))/(2h) \right|, \\
Err4 &:= \left| -\sin(1) - (4\cos(1+h) - 3\cos(1) - \cos(1+2h))/(2h) \right|
\end{aligned}
$$

h	$Err1$	$Err2$	$Err3$	$Err4$
10^{-1}	2.5591×10^{-2}	2.8394×10^{-2}	1.4018×10^{-3}	2.9299×10^{-3}
10^{-2}	2.6875×10^{-3}	2.7155×10^{-3}	1.4024×10^{-5}	2.8183×10^{-5}
10^{-3}	2.7001×10^{-4}	2.7029×10^{-2}	1.4025×10^{-7}	2.8063×10^{-7}

TABLE: Erreurs en fonction du pas pour les méthodes progressive, régressive, centrale et à trois points.

Remarque

On voit bien que l'erreur absolue obtenue par la formule centrale est beaucoup plus faible que celles obtenues par les formules progressive et régressive . Ceci confirme la règle : plus l'ordre de la méthode est grand, plus la précision est bonne.

Approximation de la dérivée seconde

Pour obtenir une approximation de la dérivée seconde, nous procédons de la même façon, mais à partir de développements de Taylor d'ordre 4 :

$$\phi(x_{i+1}) = \phi(x_i) + h\phi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\phi''(x_i) + \frac{h^3}{6}\phi^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}\phi^{(4)}(\alpha_1),$$
$$\phi(x_{i-1}) = \phi(x_i) - h\phi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\phi''(x_i) - \frac{h^3}{6}\phi^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}\phi^{(4)}(\alpha_2),$$
$$\alpha_1 \in]x_i, x_i + h[,\ \alpha_2 \in]x_i - h, x_i[.$$

Après addition, on obtient : $\phi''(x_i) \approx \frac{\phi(x_{i+1}) - 2\phi(x_i) + \phi(x_{i-1})}{h^2}$, approximation de la dérivée seconde de ϕ en x_i. L'erreur commise est :

$$\phi''(x_i) - \frac{\phi(x_{i+1}) - 2\phi(x_i) + \phi(x_{i-1})}{h^2} = -\frac{h^4}{24}\left(\phi^{(4)}(\alpha_1) + \phi^{(4)}(\alpha_2)\right),$$

$\alpha_1 \in]x_i, x_i + h[,\ \alpha_2 \in]x_i - h, x_i[.$ Le terme d'erreur peut se simplifier :

$$\exists\ \alpha \in]x_i - h, x_i + h[\ /\ -\frac{h^4}{24}\left(\phi^{(4)}(\alpha_1) + \phi^{(4)}(\alpha_2)\right) = -\frac{h^4}{12}\phi^{(4)}(\alpha).$$

Position du problème

- Il existe des fonctions simples comme $\frac{\sin(x)}{x}$ ou $\sqrt{\cos^2(x) + 3\sin^2(x)}$ qui n'ont pas de primitive connue.
- ϕ peut être connue seulement en quelques points et sa formule est inconnue (exp : résultats expérimentaux,...).

Comment peut-on intégrer de telles fonctions entre a et b ?

Solution numérique

Nous cherchons donc une valeur approchée à l'aide d'un ordinateur c'est-à-dire une valeur calculée à l'aide de sommes finies, qu'on appellera une formule de quadrature :

$$\int_a^b \phi(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i \phi(x_i),$$

où les x_i, $i = 0, \ldots, n$ sont appelés les noeuds ou points d'intégration, et les ω_i $i = 0, \ldots, n$, les poids de la formule de quadrature.

Solution numérique

Nous cherchons donc une valeur approchée à l'aide d'un ordinateur c'est-à-dire une valeur calculée à l'aide de sommes finies, qu'on appellera une formule de quadrature :

$$\int_a^b \phi(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i \phi(x_i),$$

où les x_i, $i = 0, \ldots, n$ sont appelés les noeuds ou points d'intégration, et les ω_i $i = 0, \ldots, n$, les poids de la formule de quadrature.

Définition

Une formule de quadrature est dite exacte sur l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n (qu'on note par $\mathbb{P}_n$) si

$$\forall\ \phi \in \mathbb{P}_n, \quad \int_a^b \phi(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \phi(x_i),$$

Formule des rectangles

Pour $n = 0$, la formule des rectangles est une formule dite à un point $x_0 = a$. La formule de rectangle est donnée par la formule suivante :

$$\int_a^b \phi(x)dx \approx \phi(a)(b - a).$$

L'interprétation graphique consiste donc à remplacer $\int_a^b \phi(x)dx$ par l'aire du rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur $\phi(a)$. Cette formule est exacte pour tout polynôme de degré 0.

Formule des rectangles

Pour $n = 0$, la formule des rectangles est une formule dite à un point $x_0 = a$. La formule de rectangle est donnée par la formule suivante :

$$\int_a^b \phi(x)dx \approx \phi(a)(b-a).$$

L'interprétation graphique consiste donc à remplacer $\int_a^b \phi(x)dx$ par l'aire du rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur $\phi(a)$. Cette formule est exacte pour tout polynôme de degré 0.

Théorème

Supposons que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Posons :
$E(\phi) := \int_a^b \phi(x)dx - \phi(a) * (b-a)$. *Alors il existe un α dans $]a, b[$ tel que :*

$$E(\phi) = \frac{(b-a)^2}{2}\phi'(\alpha). \tag{1}$$

Preuve :

- Formule de Taylor d'ordre 0,

$$E(\phi) = \int_a^b (x-a)\phi'(\alpha_x)dx, \quad \alpha_x \in]a,b[$$

.

- ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$,
$m := \min_{x\in[a,b]} \phi'(x), \quad M := \max_{x\in[a,b]} \phi'(x).$
-

$$m \leq \frac{\int_a^b (x-a)\phi'(\alpha_x)dx}{\int_a^b (x-a)dx} \leq M.$$

- Théorème des valeurs intermédiaires à ϕ', implique

$$\exists \alpha \in]a,b[, \quad \phi'(\alpha) = \frac{\int_a^b (x-a)\phi'(\alpha_x)dx}{\int_a^b (x-a)dx}.$$

Formule des trapèzes

La formule des trapèzes est une formule à 2 points : $n = 1$, $x_0 = a$ et $x_1 = b$, i.e.,

$$\int_a^b \phi(x)dx \approx \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2}(b - a).$$

Cette formule est exacte pour tout polynôme de degré 1.

Formule des trapèzes

La formule des trapèzes est une formule à 2 points : $n = 1$, $x_0 = a$ et $x_1 = b$, i.e.,

$$\int_a^b \phi(x)dx \approx \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2}(b - a).$$

Cette formule est exacte pour tout polynôme de degré 1.

Théorème

Supposons que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. Posons :

$$E(\phi) := \int_a^b \phi(x)dx - \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2}(b - a).$$

Alors il existe un α dans $]a, b[$ tel que :

$$E(\phi) = -\frac{(b - a)^3}{12}\phi^{(2)}(\alpha).$$

Lemme

Soit $\phi \in \mathcal{C}^2([a,b])$. *Alors, il existe* $\alpha_x \in]a,b[$ *tel que*

$$\phi(x) - p_1(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}\phi^{(2)}(\alpha_x), \tag{2}$$

où

$$p_1(x) := \phi(a)\frac{x-b}{a-b} + \phi(b)\frac{x-a}{b-a}.$$

Lemme

Soit $\phi \in \mathcal{C}^2([a,b])$. *Alors, il existe* $\alpha_x \in]a,b[$ *tel que*

$$\phi(x) - p_1(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}\phi^{(2)}(\alpha_x), \tag{2}$$

où

$$p_1(x) := \phi(a)\frac{x-b}{a-b} + \phi(b)\frac{x-a}{b-a}.$$

Preuve :

- Si $x = a$ ou $x = b$, alors (2) est vérifiée.
- Si, $x \neq a$, $x \neq b$, définissons

$$\psi(t) = \phi(t) - p_1(t) - \frac{(t-a)(t-b)}{(x-a)(x-b)}(\phi(x) - p_1(x)).$$

- Par le théorème de Rolle,

$$\exists \alpha_x \in]a,b[, \ \psi^{(2)}(\alpha_x) = 0.$$

Preuve du théorème :

- On rappelle (cf. lemme précédent) que

$$E(\phi) = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}\phi^{(2)}(\alpha_x)dx, \quad \alpha_x \in [a,b].$$

- $$m := \min_{x\in[a,b]} \phi^{(2)}(x), \quad M := \max_{x\in[a,b]} \phi^{(2)}(x).$$

- $$m \leq \frac{\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}\phi^{(2)}(\alpha_x)dx}{\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}dx} \leq M.$$

- Il existe un α dans $]a,b[$ tel que :

$$E(\phi) = \frac{\phi^{(2)}(\alpha)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{12}\phi^{(2)}(\alpha).$$

Formule de Simpson

La formule de Simpson est une formule à trois points $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$ et $x_2 = b$, i.e.,

$$\int_a^b \phi(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(\phi(a) + 4\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \phi(b)\right).$$

Cette formule est exacte pour tout polynôme de degré 3.

Supposons que ϕ est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$. Posons :

$$E(\phi) := \int_a^b \phi(x)dx - \frac{b-a}{6}\left(\phi(a) + 4\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \phi(b)\right).$$

On a (preuve : cf TD)

$$E(\phi) = -\frac{(b-a)^5}{2880}\phi^{(4)}(\alpha), \quad \alpha \in [a,b].$$

Exemple Numérique

- $$\int_0^1 \exp(x)dx = 1.718281828459046...,$$
- Formule des rectangles,
$$exp(0) = 1,$$
- Formule des trapèzes,
$$(\exp(0) + \exp(1))/2 = 1.859140914229523...,$$
- Formule Formule de Simpson,
$$(\exp(0) + 4 * \exp(1/2) + \exp(1))/6 = 1.718861151876593...$$

,

Formules composées

Plutôt que d'augmenter le degré du polynôme d'exactitude, on peut obtenir une formule d'integration en découpant l'intervalle d'intégration en sous-intervalles et en appliquant des formules simples sur chacun des sous-intervalles.

Soit n est entier, posons

$$h = \frac{b-a}{n}, \; x_k = a + kh, \; k = 0, \ldots, n.$$

Formule composée des rectangles

Soit ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. L'intégrale approchée de ϕ sur $[a, b]$ par la méthode composée des rectangles est donnée par :

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi(x)dx \right) \approx h \sum_{k=0}^{n-1} \phi(x_k).$$

Formule composée des rectangles

Soit ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. L'intégrale approchée de ϕ sur $[a, b]$ par la méthode composée des rectangles est donnée par :

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi(x)dx \right) \approx h \sum_{k=0}^{n-1} \phi(x_k).$$

Théorème

Supposons que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. L'erreur d'intégration est donnée par :

$$E_n^R := \int_a^b \phi(x)dx - h \sum_{k=0}^{n-1} \phi(x_k) = h \frac{b-a}{2} \phi'(\alpha), \ \textit{avec } \alpha \in [a, b].$$

Preuve :

$$E_n^R = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} \phi'(\alpha_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^2}{2} \phi'(\alpha_k),$$

avec $\alpha_k \in]x_k, x_{k+1}[$ pour tout $k = 0, \dots, n-1$.

$$m \leq \phi'(x) \leq M \text{ alors } \frac{h^2}{2} m \leq \frac{h^2}{2} \phi'(x) \leq \frac{h^2}{2} M.$$

Donc,

$$\frac{h^2}{2} m \leq \frac{h^2}{2} \phi'(\alpha_k) \leq \frac{h^2}{2} M, \; k = 0, \dots, n-1,$$

qui conduisent

$$m \leq 2 \frac{E_n^R}{nh^2} \leq M.$$

Il existe un α dans $]a, b[$ tel que :
$2 \frac{E_n^R}{nh^2} = \phi'(\alpha) \Rightarrow E_n^R = h \frac{b-a}{2} \phi'(\alpha)$.

Formule composée du point milieu

Soit ϕ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. L'intégrale approchée de ϕ sur $[a, b]$ par la méthode composée du point milieu est donnée par :

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi(x)dx \right) \approx h \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(x_k + \frac{h}{2} \right).$$

L'erreur d'intégration est donnée par :

$$E_n^M := \int_a^b \phi(x)dx - h \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(x_k + \frac{h}{2} \right) = h^2 \frac{(b-a)}{24} \phi''(\alpha),$$

avec $\alpha \in [a, b]$.

Formule composée des trapèzes

Soit ϕ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. L'intégrale approchée de ϕ sur $[a, b]$ par la méthode composée des trapèzes est donnée par :

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi(x)dx \right) \approx \frac{h}{2}(\phi(a)+\phi(b))+h\sum_{k=1}^{n-1} \phi(x_k).$$

Posons

$$E_n^T = \int_a^b \phi(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\phi(x_{k+1}) + \phi(x_k)}{2} \, (x_{k+1} - x_k) \right).$$

Alors, le terme représentant l'erreur est :

$$E_n^T(\phi) = -h^2 \frac{(b-a)}{12} \phi''(\alpha), \text{ avec } \alpha \in [a, b].$$

Formule de Simpson composée.

Soit ϕ de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$. L'intégrale approchée de ϕ sur $[a,b]$ par la méthode de Simpson composée est donnée par :

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi(x)dx &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi(x)dx\right)\\ &\approx \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{6}\left(\phi(x_k)+4\phi\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)+\phi(x_{k+1})\right)\right)\end{aligned}$$

Posons

$$E_n^S(\phi)=\int_a^b \phi(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{6}\left(\phi(x_k)+4\phi\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)+\phi(x_{k+1})\right)\right)$$

alors,

$$E_n^S(\phi)=-h^4\frac{(b-a)}{2880}\phi^{(4)}(\alpha),\ \text{avec } \alpha\in[a,b].$$

Feuille TD1

Exercice 1

$$\int_a^b \phi(x)dx \approx A\phi(a) + B\phi(b)$$

Déterminer les constantes A et B pour que cette formule soit exacte sur les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 1. Puis donner une majoration d'erreur

$$\left| \int_a^b \phi(x)dx - (A\phi(a) + B\phi(b)) \right| .$$

Feuille TD1

Solution

Soit la formule de quadrature

$$\int_a^b \phi(x)dx \approx A\phi(a) + B\phi(b)$$

Écrivons que cette formule est exacte pour les polynômes de degré ≤ 1 :

$$\begin{cases} \int_a^b 1dx = A + B \\ \int_a^b xdx = A \times a + B \times b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \frac{b-a}{2} \\ B = \frac{b-a}{2} \end{cases}$$

Supposons que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$.
Alors il existe un α dans $]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b \phi(x)dx - \frac{b-a}{2}(\phi(a) + \phi(b)) = -\frac{(b-a)^3}{12}\phi^{(2)}(\alpha).$$

Exercice 2 :

Soit la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} \phi(x)dx \approx A\phi(-x_0) + B\phi(0) + C\phi(x_0).$$

Déterminer les constantes A, B, C et x_0 pour que cette formule soit d'ordre maximal. Quel est alors l'ordre de cette formule ?

Solution

Soit la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} \phi(x)dx \approx A\phi(-x_0) + B\phi(0) + C\phi(x_0).$$

Écrivons que cette formule est exacte pour les polynômes de degré ≤ 5 :

$$\begin{cases} 2 = A + B + C \\ 0 = -Ax_0 + Cx_0 \\ \frac{2}{3} = Ax_0^2 + Cx_0^2 \\ 0 = -Ax_0^3 + Cx_0^3 \\ \frac{2}{5} = Ax_0^4 + Cx_0^4 \\ 0 = -Ax_0^5 + Cx_0^5 \end{cases} \implies \begin{cases} A = C \\ 2A + B = 2 \\ 2Ax_0^2 = \frac{2}{3} \\ 2Ax_0^4 = \frac{2}{5} \end{cases} \implies \begin{cases} A = C = \frac{5}{9} \\ B = \frac{8}{9} \\ x_0 = \sqrt{0,6} \end{cases}$$

Donc la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} \phi(x)dx \approx \frac{5}{9}\phi(-\sqrt{0,6}) + \frac{8}{9}\phi(0) + \frac{5}{9}\phi(\sqrt{0,6}),$$

est d'ordre 5 (elle n'est pas d'ordre 6 car elle est inexacte pour x^6).

Exercice 3 :

On souhaite dans cet exercice, obtenir une approximation de $\ln 2$ à l'aide de la formule

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

1. Écrire l'approximation obtenue en appliquant la méthode des trapèzes.
2. Comparer le résultat avec celui obtenu an appliquant la méthode de Simpson.
3. Montrer que la méthode composée des trapèzes conduit à une approximation : $\ln 2 \approx \mathcal{A}(n) = \frac{3}{4n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k}$
4. Quelle valeur de n faudrait-il choisir pour calculer ainsi $\ln 2$ avec 5 décimales précises ?
5. Calculer $\mathcal{A}(n)$ pour $n = 2, 4, 8$.

Solution

1. La méthode des trapèzes donne

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{b-a}{2}(\phi(a)+\phi(b)) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

soit une erreur absolue $|\ln 2 - \frac{3}{4}| = 0.0569.$

2. La méthode des Simpson donne

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{b-a}{6}\left(\phi(a) + 4\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \phi(b)\right) = \frac{25}{36}.$$

soit une erreur absolue $|\ln 2 - \frac{25}{36}| = 0.0013.$

Solution

La méthode composée des trapèzes donne

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{h}{2}(\phi(a) + \phi(b)) + h \sum_{k=1}^{n-1} \phi(x_k).$$

où $x_k = 1 + kh$ avec $h = \frac{1}{n}$. Donc

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{h}{2}(1 + \frac{1}{2}) + h \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 + kh}.$$

Puisque $h = \frac{1}{n}$, alors

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{3}{4n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n + k} = \mathcal{A}(n).$$

Solution

L'erreur absolue dans la méthode composée des trapèze vérifie

$$E = \frac{1}{12n^2}\phi''(\alpha), \text{ avec } \alpha \in [1, 2].$$

Comme $\phi(x) = \frac{1}{x}$, donc $\phi''(\alpha) = \frac{2}{\alpha^3}$. Par conséquent :

$$E = \frac{1}{6n^2\alpha^3}, \text{ avec } \alpha \in [1, 2].$$

Ainsi pour être certain d'avoir 5 décimales précises, il faut

$$\frac{1}{6n^2\alpha^3} \leq \frac{1}{6n^2} \leq 10^{-5}.$$

Solution

$$\mathcal{A}(2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{3} = \frac{17}{24} = 0,708333333333333$$

$$\mathcal{A}(4) = \frac{3}{16} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{17}{24} = 0,697023809523809$$

$$\mathcal{A}(8) = \frac{3}{32} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{5} = \frac{17}{24} = 0.694121850371850$$

Interpolation polynomiale

On considère la table suivante :

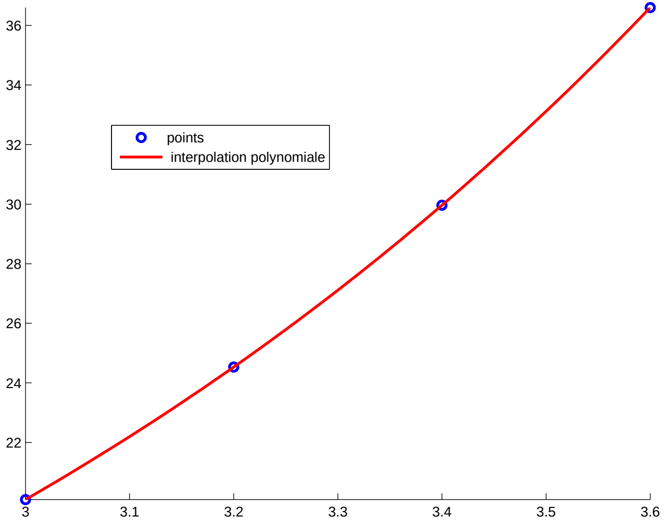
x_i	$y_i = f(x_i)$
3.0	20.0855
3.2	24.5325
3.4	29.9641
3.6	36.5982

Position du problème :

Calculer :

$$f(3.3)$$

Interpolation polynomiale



Solution

- Déterminer un polynôme $p_3(x)$ dont le graphe passe par les points $(x_i, f(x_i)),\ i = 0, 1, 2, 3$:

$$p_3(x) = 0.5955x^4 - 3.3205x^3 + 7.5752x^2 - 6.6708$$

- Approcher $f(3,3)$ par

$$f(3,3) \approx p_3(3,3) = 27.1121$$

Interpolation polynomiale

Problème

Étant donné $n+1$ couples $(x_i, y_i := f(x_i))$, trouver un polynôme p_n de degré n tel que

$$p_n(x_i) = y_i \text{ pour } i = 0, \dots, n.$$

Soit

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Les égalités $p_n(x_i) = y_i$, s'écrivent sous forme d'un système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n & = y_0 \\ p_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n & = y_1 \\ \qquad \vdots & \vdots \\ p_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n & = y_n \end{array} \right.$$

Puisque les inconnues sont les a_i, ce système d'équations est linéaire et l'on peut montrer que son déterminant est différent de 0 si $x_i \neq x_j$ avec $i \neq j$.

Interpolation polynomiale

Cas $n = 2$

Soit
$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Les égalités $p_2(x_i) = y_i$, s'écrivent sous forme d'un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} p_2(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 & = y_0 \\ p_2(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 & = y_1 \\ p_2(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 & = y_2 \end{cases}$$

Puisque les inconnues sont les a_i, ce système d'équations est linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Interpolation polynomiale

Cas $n = 2$

le déterminant est

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_0) \neq 0,$$

car on doit supposer x_0, x_1, x_2 deux à deux différents. Il y a une unique solution (a_0, a_1, a_2) et un unique polynôme p_2 passant par les points (x_i, y_i). Nous allons montrer ce résultat pour n quelconque et calculer le polynôme p_n.

Interpolation polynomiale

Cas du degré $n = 1$.

Le polynôme de degré 1 qui passe par $A_0 = (x_0, y_0)$ et $A_1 = (x_1, y_1)$, est

$$p_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Cas du degré $n = 2$.

Déterminer le polynôme de degré 2 dont le graphe passe par $A_0 = (x_0, y_0)$, $A_1 = (x_1, y_1)$, et $A_2 = (x_2, y_2)$. Tout d'abord, cherchons le polynôme sous la forme

$$p_2(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) + a_1(x - x_0)(x - x_2) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

On a $p_2(x_0) = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$. Puisque $p_2(x_0) = y_0$, donc

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$

De même, nous avons

$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad a_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Cas général.

On commence par chercher des polynômes L_k de degré n tels que

$$L_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

Alors L_k s'annule en $x_0,\ x_1,\ \dots, x_{k-1},\ x_{k+1},\ \dots, x_n$ donc L_k s'écrit :

$$L_k(x) = \lambda(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n).$$

L_k est bien de degré n. Reste à trouver λ. Pour cela, on utilise le fait que $L_k(x_k)$ doit être égal à 1 :

$$1 = L_k(x_k) = \lambda(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n).$$

Donc $\lambda = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}$.

Par conséquent $L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}$.

Cas général.

Définissons le polynôme p_n en posant

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x).$$

On a alors

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= y_0 L_0(x_0) + y_1 L_1(x_0) + \ldots + y_n L_n(x_0) \\ &= y_0 \times 1 + y_1 \times 0 + \ldots + y_n \times 0 = y_0, \end{aligned}$$

et de même $p_n(x_i) = y_i$ pour tout i. Le polynôme p_n s'appelle le polynôme d'interpolation pour les points (x_i, y_i).

Unicité du polynôme d'interpolation.

Supposons que deux polynômes p_n et q_n de degré n tels que

$$p_n(x_i) = q_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Donc,

$$(p_n - q_n)(x_i) = 0, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Alors il existe un polynôme α tel que :

$$(p_n - q_n)(x) = \alpha(x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Si α n'est pas la fonction nulle alors le degré de $(p_n - q_n)$ est strictement supérieur à $n+1$; ceci est exclu. D'où l'unicité. Cela montre que p_n est le seul polynôme de degré au plus n vérifiant $p_n(x_i) = y_i$ quel que soit $i = 0, \ldots, n$.

Calcul du polynôme d'interpolation

Voici une méthode pour calculer le polynôme p_n d'interpolation relatif à des points (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$.

Différence divisée

Notons

$$\forall i \in \{0, \dots, n\},\ \ f[x_i] = y_i.$$

On appelle différence divisée d'ordre k, relativement aux $k+1$ points distincts $x_0, \dots, x_k$ et on note $f[x_0, \dots, x_k]$ le réel défini par

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

Donc,

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}).$$

Calcul du polynôme d'interpolation : différence divisée

Cas du degré $n = 1$

$$p_1(x) \;=\; y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

On propose une autre méthode pour calculer le polynôme d'interpolation p_1 relatif à des points (x_0, y_0), (x_1, y_1).

$$\begin{array}{lll}
x_0 & f[x_0] = y_0 & \\
 & & \searrow \\
 & & \quad f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\
 & & \nearrow \\
x_1 & f[x_1] = y_1 &
\end{array}$$

$$p_1(x) \;=\; y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0).$$

Cas du degré $n = 2$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ &\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{aligned}$$

On propose une autre méthode pour calculer le polynôme d'interpolation p_2 relatif à des points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

$$\begin{tikzcd}
x_0 & f[x_0] = y_0 \arrow[dr] & & \\
 & & f[x_0, x_1] \arrow[dr] & \\
x_1 & f[x_1] = y_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0} \\
 & & f[x_1, x_2] \arrow[ur] & \\
x_2 & f[x_2] = y_2 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$$p_2(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Calcul du polynôme d'interpolation : différence divisée

Cas Cas du degré $n = 3$

$$
\begin{aligned}
p_3(x) \quad = \quad & y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \\
& y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\
& y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \\
& y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.
\end{aligned}
$$

Dans la suite, on propose une autre méthode pour calculer le polynôme d'interpolation p_3 relatif à des points (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_3).

Cas du degré $n = 3$

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_0 & f[x_0] = y_0 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
 & & & f[x_0, x_1] & & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & & \\
x_1 & f[x_1] = y_1 & & & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & f[x_1, x_2] & & & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
x_2 & f[x_2] = y_2 & & & & f[x_1, x_2, x_3] & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & & f[x_2, x_3] & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & \\
x_3 & f[x_3] = y_3 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
p_3(x) \quad = \quad & y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\
& f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).
\end{aligned}
$$

Cas du degré $n = 3$

$$
\begin{array}{cccccccc}
-1 & 1 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
 & & & -1 & & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & & \\
0 & 0 & & & & 1 & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & 1 & & & & 2 \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
1 & 1 & & & & 7 & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & & 15 & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & \\
2 & 16 & & & & & &
\end{array}
$$

$$p_3(x) = 1 - (x+1) + (x+1)x + 2(x+1)x(x-1).$$

Erreur d'interpolation

Erreur d'interpolation

Maintenant Que peut-on dire de $f(x) - p_n(x)$.

- Le polynôme d'interpolation pour les données (x_i, y_i) prend les mêmes valeurs que f en $x_0, x_1, \dots, x_n$.
- Si pour les autres valeurs de x l'écart entre $p_n(x)$ et $f(x)$ n'est pas trop grand (ce qu'on souhaite).

Erreur d'interpolation

Erreur d'interpolation

Soient $x_0, \dots, x_n$, $n+1$ points distincts dans l'intervalle $[a, b]$ et soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$. Alors

$$f(x) = p_n(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha), \;\; \alpha \in]a, b[. \tag{3}$$

Majoration d'erreur d'interpolation

Si l'on connaît un nombre M tel que $|f^{(n+1)}(x| \leq M$, alors

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|. \tag{4}$$

Erreur d'interpolation : Phénomène de Runge.

Supposons qu'on approche la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \;\; x \in [-5, 5],$$

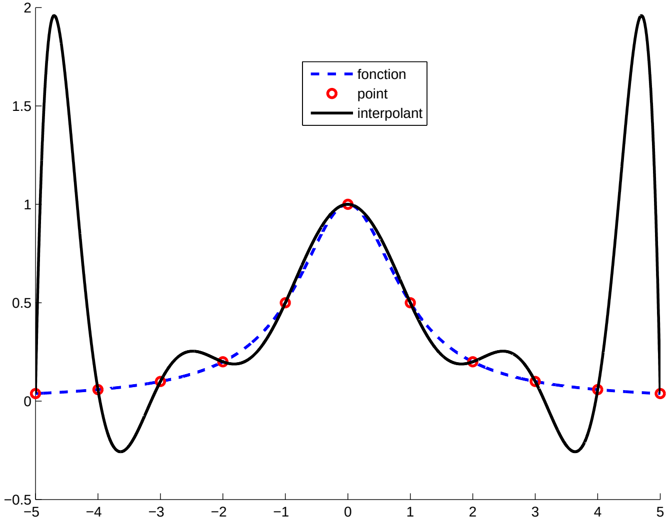
en utilisant l'interpolation de Lagrange avec noeuds équirépartis :

$$x_i = -5 + \frac{10i}{n}, \;\; i = 0, \ldots n.$$

- $\lim_{n \longrightarrow +\infty} |f(x_{n-1/2}) - p_n(x_{n-1/2})| = +\infty$, avec $x_{n-1/2} = 5 - \frac{5}{n}$.

n	$f(x_{n-1/2})$	$p_n(x_{n-1/2})$	$\lvert f(x_{n-1/2}) - p_n(x_{n-1/2})\rvert$
2	0.137931	0.75961	0.621684
10	0.04705	1.57872	1.53166
20	0.04244	−39.9524	39.9948

Erreur d'interpolation : Phénomène de Runge.



Comment choisir les points d'interpolation ?

Pour chaque entier positif $n \geq 1$. Pour $i = 0, \ldots, n$,

$$\widehat{x}_i = \cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi) \in [-1, 1]$$

de points de Tchebycheff et on définit :

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\widehat{x}_i \in [a, b],$$

pour un intervalle arbitraire $[a, b]$. Dans ce cas on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} |f(x) - p_n(x)| = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Exemple 1

Chercher le polynôme d'interpolation qui en -1 vaut 8, en 0 vaut 3 et en 1 vaut 6 , i.e.

$$p_2(-1) = 8, \quad p_2(0) = 3, \quad p_2(1) = 6.$$

Exemple 1

Chercher le polynôme d'interpolation qui en -1 vaut 8, en 0 vaut 3 et en 1 vaut 6 , i.e.

$$p_2(-1) = 8, \quad p_2(0) = 3, \quad p_2(1) = 6.$$

Exemple

$$p_2(x) = 8\frac{x(x-1)}{2} + 3\frac{(x+1)(x-1)}{-1} + 6\frac{(x+1)x}{2} = 4x^2 - x + 3.$$

Exemple 2

Calculer le polynôme d'interpolation de de la fonction $f(x) = \sin(x)$ en les 3 points $x_i = \frac{\pi}{2} i$, avec $i = 0, 1, 2$? On cherche donc

$$p_2(x_i) = \sin(x_i), \;\; i = 0, 1, 2.$$

1. Méthode directe : écrire $p_2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, puis déterminer a_0, a_1 et a_2.
2. Méthode de Lagrange : $p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$.
3. Méthode de Newton :
   $p_2(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$.

Exemple 2

1. Méthode directe : Si on écrit $p_2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, on cherche a_0, a_1 et a_2 tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} \\ 1 & \pi & \pi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire on trouve $a_0 = 0$, $a_1 = 4/\pi$ et $a_2 = -4/\pi^2$.

Exemple 2

1. Méthode de Lagrange :

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) = \frac{x(x-\pi)}{\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}-\pi)} \\
&= -\frac{4}{\pi^2} x(x-\pi).
\end{aligned}
$$

Exemple 2

1. Méthode de Newton :
$p_2(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$

$$\begin{array}{llcccc}
0 & f[x_0] = 0 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
 & & & f[x_0, x_1] = \frac{2}{\pi} & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & \\
\frac{\pi}{2} & f[x_1] = 1 & & & & f[x_0, x_1, x_2] = -\frac{4}{\pi^2} \\
 & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & f[x_1, x_2] = -\frac{2}{\pi} & & \\
 & & \nearrow & & & \\
\pi & f[x_2] = 0 & & & &
\end{array}$$

$$p_2(x) \quad = \quad \frac{2}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{2}).$$

Exemple 3

Construire le polynôme p_3 qui interpole les points $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(3, 3)$.

1. Méthode directe : écrire $p_2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, puis déterminer a_0, a_1, a_2 et a_3.
2. Méthode de Lagrange : $p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$.
3. Méthode de Newton : $p_2(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple 3

1. Méthode directe : Si on écrit $p_2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, on cherche a_0, a_1, a_2 et a_4 tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire on trouve $a_0 = 2$, $a_1 = -8/3$, $a_2 = 2$ et $a_3 = -1/3$.

Exemple 2

1. Méthode de Lagrange :

$$\begin{aligned} p_3(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \\ & y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ & y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \\ & y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$p_3(x) = 2 - \frac{8}{3}x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Exemple 2

1. Méthode de Newton :
$p_2(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & 2 & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & \\
 & & & -1 & & & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & & & \\
1 & 1 & & & & 1 & & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \\
 & & & 1 & & & & -1/3 & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \\
2 & 2 & & & & 0 & & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & & & \\
 & & & 1 & & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & & \\
3 & 3 & & & & & & &
\end{array}
$$

$p_2(x) = 2 - x + x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$.

Exercice 1

On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération γ :

t (en s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
γ (en m/s^2)	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Calculer la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80s$, par la méthode composée des trapèzes puis par Simpson.

Corrigé :

On sait que l'accélération γ est la dérivée de la vitesse V, donc,

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \gamma(s)ds \quad \Rightarrow \quad V(80) = \int_0^{80} \gamma(s)ds = I.$$

- Calculons I par la méthode composée des trapèzes. Ici, d'après le tableau des valeurs, $h = 10$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{2}\left(\gamma(x_0) + \gamma(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\gamma(x_i)\right) \\ &= \frac{10}{2}(30 + 50.67 + 2(31.63 + \ldots + 46.70)) = 3089,45 \ m/s \end{aligned}$$

Corrigé :

Calculons I par la méthode de Simpson

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{h}{6} \left(\gamma(x_i) + 4\gamma\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) + \gamma(x_{i+1}) \right) \right) = 3087,166\ m/s$$

$$x_0 = 0,\ x_1 = 20,\ x_2 = 40,\ x_3 = 60,\ x_4 = 80,\ h = 20,$$

$$\frac{x_0+x_1}{2} = 10,\ \frac{x_1+x_2}{2} = 30,\ \frac{x_2+x_3}{2} = 50,\ \frac{x_3+x_4}{2} = 70.$$

$$\sum_{i=0}^{3} \gamma(x_i) = 30 + 33,44 + 37,75 + 43,29$$

$$\sum_{i=0}^{3} \gamma\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) = 31,63 + 35,47 + 40,33 + 46,70$$

$$\sum_{i=0}^{3} \gamma(x_{i+1}) = 33,44 + 37,75 + 43,29 + 50,67$$

Feuille TD2

Exercice 2

Démontrer la formule de quadrature de Simpson :

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{6}f(0) + \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}f(1).$$

- Indication : Calculer le polynôme p_2 qui interpole les 3 points $(0, f(0))$, $(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right))$ et $(1, f(1))$. Puis approximer l'intégrale de f :

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 p_2(x)dx.$$

Solution

Pour démontrer la formule de quadrature de Simpson,

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{6}f(0) + \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}f(1).$$

on calcule le polynôme qui interpole les 3 points $(0, f(0))$, $(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right))$ et $(1, f(1))$.

$$p_2(x) = f(0)\frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(0-\frac{1}{2})(0-1)} + f\left(\frac{1}{2}\right)\frac{x(x-1)}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)} + f(1)\frac{x(x-\frac{1}{2})}{(1-0)(1-\frac{1}{2})}.$$

Puis approximer l'intégrale de f :

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 p_2(x)dx = \frac{1}{6}f(0) + \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}f(1).$$

Exercice 2

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$.

- Soit $L(x)$ le polynôme de degré minimal tel que :

$$L(0) = f(0), \quad L(1) = f(1).$$

Calculer le polynôme $L(x)$.

Solution 2

Le polynôme $L(x)$ de degré minimal tel que $L(0) = f(0)$, et $L(1) = f(1)$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$L(x) = -f(0)(x - 1) + f(1)x.$$

Exercice 2

- Soit $H(x)$ le polynôme de degré minimal tel que :

$$H(0) = f(0), \quad H(1) = f(1), \quad H'(0) = f'(0), \quad H'(1) = f'(1).$$

  - Montrer qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que

$$H(x) = L(x) + x(x-1)Q(x).$$

  - Calculer $Q(0)$ et $Q(1)$. En déduire $Q(x)$ et $H(x)$.

Solution

- Soit $H(x)$ le polynôme de degré minimal tel que :

$$H(0) = f(0), \quad H(1) = f(1), \quad H'(0) = f'(0), \quad H'(1) = f'(1).$$

  - Comme $H(0) = L(0)$ et $H(1) = L(1)$, le polynôme $H(x) - L(x)$ admet 0 et 1 comme racines. Il est donc divisible par $x(x-1)$: il existe un polynôme $Q(x)$ tel que

$$H(x) - L(x) = x(x-1)Q(x).$$

Feuille TD2

En dérivant $H(x) = L(x) + x(x-1)Q(x)$. on obtient

$$H'(x) = f(1) - f(0) + (2x-1)Q(x) + x(x-1)Q'(x).$$

D'où

$$f'(0) = f(1) - f(0) - Q(0) \quad \text{et } f'(1) = f(1) - f(0) + Q(1).$$

Le polynôme d'interpolation d'Hermite $H(x)$ est de degré ≤ 3 celui de Lagrange $L(x)$ est de degré ≤ 2 : : le polynôme $Q(x)$ est donc de degré ≤ 1. De

$$Q(0) = f(1) - f(0) - f'(0) \quad \text{et } Q(1) = f'(1) - f(1) + f(0).$$

on déduit que

$$\begin{aligned} Q(x) &= -Q(0)(x-1) + Q(1)x \\ &= -(f(1) - f(0) - f'(0))(x-1) + (f'(1) - f(1) + f(0))x. \end{aligned}$$

Exercice 2

- On approxime l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ par $\int_0^1 H(x)dx$. En déduire la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 H(x)dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \frac{f'(0)-f'(1)}{12}.$$

- On approxime l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ par $\int_0^1 H(x)dx$:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 H(x)dx = \int_0^1 L(x)dx + \int_0^1 x(x-1)Q(x)dx$$

Donc :

  - $\int_0^1 L(x)dx = \frac{f(0)+f(1)}{2}$.
  - $\int_0^1 x(x-1)Q(x)dx = \frac{1}{12}(-Q(0) - Q(1))$.
  - $\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 H(x)dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \frac{f'(0)-f'(1)}{12}$.

Exercice 2

- Quel est l'ordre de cette formule de quadrature ?

Feuille TD2

Solution

Pour déterminer l'ordre de la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 H(x)dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \frac{f'(0)-f'(1)}{12}.$$

on teste cette formule pour $1,\ x,\ x^2, x^3,\ x^4$.

- $\int_0^1 1dx = 1 = \int_0^1 H(x)dx$
- $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2} = \int_0^1 H(x)dx$
- $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} = \int_0^1 H(x)dx$
- $\int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4} = \int_0^1 H(x)dx$
- $\int_0^1 x^4dx = \frac{1}{5} \neq \int_0^1 H(x)dx = \frac{1}{6}$.

La formule est exacte pour les polynômes de degré ≤ 3 et inexacte pour le polynôme x^4 : elle est donc d'ordre 3.