Ecole Nationale Préparatoire aux Etudes d'Ingéniorat

3ème Année Préparatoire **Année Scolaire 2001/2002**

Partiel n°1

Module : Analyse Numérique **Semestre** : 2 **Date** : 09/04/2002 **Durée** : 02h

Barème : Ex1 : 08pts, Ex 2 : 04pts, Ex 3 : 04 pts , Ex4 : 04 pts

Exercice 1 :

Soit l'équation $f(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0$, $x \in [0,7]$.

1) Montrer que $f(x) = 0$ admet trois racines réelles $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 7$.

2) Utilisant la méthode de la bissection, trouver une approximation de α_2 avec la précision 10^{-3}. Calculer le nombre d'itérations N pour réaliser une approximation de α_2 avec une précision de 10^{-3}. Comparer N avec le nombre d'itérations effectif.

3) A l'aide de la méthode du point fixe, déterminer une fonction g telle que $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$ pour laquelle l'itération converge plus rapidement vers la plus grande racine α_3 avec une précision de 10^{-3}.

4) Par la méthode de Newton, trouver une approximation de la plus petite racine α_1 avec la même précision.

Exercice 2 :

Soit le sytème $Ax = b$ et $Ax' = b'$ ou A, b et b' sont définis comme suit:

$$A = \begin{pmatrix} 121393 & 196418 \\ 196418 & 317811 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 317811 \\ 514229 \end{pmatrix} \quad b' = b + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $detA$ et l'inverse $B = A^{-1}$.

2) Résoudre par Cramer $Ax = b$ et $Ax' = b'$.

3) Comparer b' à b et x' à x.

Exercice 3 :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

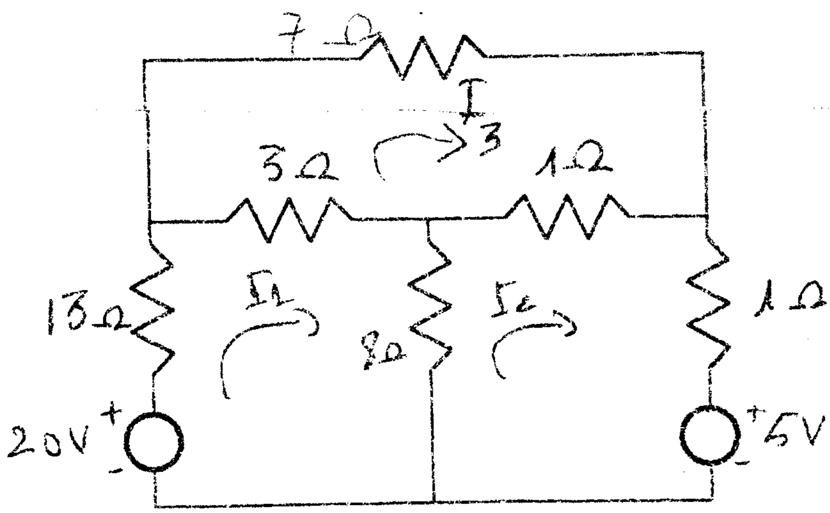
1) Résoudre par la méthode de Gauss le système $Ax = b$ en fonction de b_1, b_2, b_3, b_4 où les b_i sont des paramètres réels quelconques.

2) En déduire A^{-1}.

3) Que se passe-t-il lorsque b est remplacé par l'un des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$: e_1, e_2, e_3, e_4.

Exercice 4 :

Soit le système électrique ci-dessous. Le problème consiste à calculer les courants des branches. Si l'on considère que le montage est composé de trois mailles, les courants peuvent être calculés par la résolution d'un système à trois équations. Les trois équations découlent directement de la deuxième loi de Kirchhoff. Résoudre le système par la méthode de Cramer.



ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

3ème Année Préparatoire **Année Scolaire : 2002/2003**

Partiel 1

Module : Analyse Numérique **Semestre : 2** **Date : 12/04/2003** **Durée : 02h**

	Q1	Q2	Q3	Observation
Barème	10	06	04	

Exercice 1:

Soient $f(x) = x^3 + 3x - 1 = 0$, $g(x) = x^3 + 3x - 3 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ admet chacune une racine réelle α (respectivement β) dans tout R et que $\alpha, \beta \in]0, 1[$.

2) Montrer que les suites $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n + 3}$ et $y_{n+1} = \dfrac{3}{y_n^2 + 3}$ convergent respectivement vers α et β pour tous $x_0, y_0 \in [0, 1]$. Calculer x_6.

3) Pour $x_0 = y_0 = 0.5$, déterminer les nombres d'itérations suffisantes n_0 et n_1 pour avoir $|x_n - \alpha| \leq 10^{-6}$, $\forall n \geq n_0$ et $|y_n - \beta| \leq 10^{-6}$, $\forall n \geq n_1$.

4) Expliquer la différence entre n_0 et n_1 et comparer avec le nombre n_2 d'itérations suffisantes par Dichotomie pour avoir la même précision.

5) Caculer une approximation de α à 10^{-6} près par l'algorithme de Newton $z_{n+1} = z_n - \dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ commençant en $z_0 = 0.5$ et comparer avec x_6.

Exercice 2:

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^3$ définis par $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ -\alpha & 2\alpha^2 & -\alpha - \alpha^2 \\ 1 & -\alpha - \alpha^2 & 1 + \alpha^2 + \alpha^4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 1 + \alpha^2 \end{pmatrix}$.

1) Pour $\alpha \neq 0$, résoudre $Ax = b$ par Gauss.

2) Déduire $\det(A)$ et les factorisations $A = LU$, $L_{ii} = 1$ et $A = LU$, $L_{ii} = 1$, $i = 1,2,3$.

3) Si $b' = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$, résouder $Ax' = b'$ par la factorisation $A = LU$, $L_{ii} = 1$.

4) En déduire A^{-1}.

Exercice 3:

Soient $f(x) = xe^x - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que la fonction f admet un minimum unique α dans l'intervalle $[0, 1]$.

2) Montrer que l'algorithme de Newton permet de déterminer ce minimum α. Ecrire la suite de Newton x_n.

3) Calculer x_5 sachant que $x_0 = 1$.

Corrigé

Exercice 1: 10 pts

Soient $f(x) = x^3 + 3x - 1 = 0$, $g(x) = x^3 + 3x - 3 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

1) f et g sont continues strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) = g'(x) = 3(x^2+1) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De plus $f(0)f(1) = g(0)g(1) = -3 < 0$, donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uniques tels que $f(\alpha) = 0$ et $g(\beta) = 0$, de plus $\alpha, \beta \in]0,1[$.

2) Les fonction $\varphi(x) = \dfrac{1}{x+3}$ et $\psi(x) = \dfrac{3}{x^2+3}$ vérifient

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$, $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \psi(x)$, $\forall x \in [0,1]$ et $\psi = 3\varphi$ sur $[0,1]$

φ et ψ sont continues et décroissantes sur $[0,1]$, donc

$\varphi([0,1]) = [\varphi(1), \varphi(0)] = [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}] \subset [0,1]$ et $\psi([0,1]) = [\psi(1), \psi(0)] = [\frac{3}{4}, 1] \subset [0,1]$.

D'autre part

$$\varphi'(x) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2},\ |\varphi'|'(x) = \frac{6(1-x^2)}{(x^2+3)^3} \geq 0,\ \forall x \in [0,1],\ \text{donc } \sup_{[0,1]} |\varphi'| = |\varphi'(1)| = \frac{1}{8}$$

$$\psi'(x) = -\frac{6x}{(x^2+3)^2},\ |\psi'|'(x) = \frac{18(1-x^2)}{(x^2+3)^3} \geq 0,\ \forall x \in [0,1],\ \text{donc } \sup_{[0,1]} |\psi'| = |\psi'(1)| = \frac{3}{8}$$

D'après le théorème du point fixe, les suites $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ et $y_{n+1} = \psi(y_n)$ convergent respectivement vers α et β pour tous $x_0, y_0 \in [0,1]$. Pour le calcul des x_n voir la table 1.

3) $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$ exige $n \geq Log\left(\dfrac{(1-L)\varepsilon}{|x_1 - x_0|}\right)/LogL$

Pour $\varepsilon = 10^{-6}$, $L = \dfrac{1}{8}$, $x_0 = 0.5$, $x_1 = \dfrac{1}{3.25}$, on trouve $n_0 = 6$.

Pour $\varepsilon = 10^{-6}$, $L = \dfrac{3}{8}$, $y_0 = 0.5$, $y_1 = \dfrac{3}{3.25}$, on trouve $n_1 = 14$.

Par Dichotomie $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$ exige $n \geq Log\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right)/Log2$, donc

$a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 10^{-6}$, on trouve $n_2 = 20$.

4) Pour $x_0 = y_0 = 0.5$ et $\varepsilon = 10^{-6}$, on a $L_1 = \dfrac{1}{8} < L_2 = \dfrac{3}{8} < \dfrac{1}{2}$, donc $n_0 = 6 < n_1 = 14 < n_2 = 20$ même si, dans ce cas, (x_n) et (y_n) ne convergent pas vers la même racine.

5) $z_{n+1} = z_n - \dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)} = \dfrac{2z_n^3 + 1}{3(z_n^2+1)}$; $z_0 = 0.5$ donne les z_n de la table 2 à comparer avec ceux de la table 1.

Exercice 2: 06 pts

1) $$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ -\alpha & 2\alpha^2 & -\alpha-\alpha^2 & -\alpha \\ 1 & -\alpha-\alpha^2 & 1+\alpha^2+\alpha^4 & 1+\alpha^2 \end{pmatrix},\ \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2 & -\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 & \alpha^2+\alpha^4 & \alpha^2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2 & -\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^4 & \alpha^2 \end{pmatrix},\ \text{et} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \text{ donne } x = \frac{1}{\alpha^2}\begin{pmatrix} \alpha^2+\alpha-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) $\det(A) = \det(A^{(2)}) = 1.\alpha^2.\alpha^4 = \alpha^6$ et $A = LU$, $L_{ii} = 1$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & \alpha^2 & 0 \\ 1 & -\alpha^2 & \alpha^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) $$Ly = b' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \alpha b_1 + b_2 \\ (\alpha-1)b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix},$$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ \alpha b_1 + b_2 \\ (\alpha-1)b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{\alpha^4}\begin{pmatrix} (2\alpha^4 + \alpha^2 - 2\alpha + 1)b_1 + (\alpha^3 + \alpha - 1)b_2 + (\alpha - 1)b_3 \\ (\alpha^3 + \alpha - 1)b_1 + (\alpha^2 + 1)b_2 + b_3 \\ (\alpha - 1)b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix}.$$

4) $Ax' = b' \Leftrightarrow x' = A^{-1}b'$, donc $A^{-1} = \frac{1}{\alpha^4}\begin{pmatrix} 2\alpha^4 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 & \alpha^3 + \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ \alpha^3 + \alpha - 1 & \alpha^2 + 1 & 1 \\ \alpha - 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3:

1) $f(x) = (x+1)e^x - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2e - 2 > 0$, $f''(x) = (x+2)e^x > 0$, $\forall x \in [0,1]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie, $f'(x) = 0$ admet une racine et une seule $\alpha \in]0,1[$. De plus f' est croissante sur $[0,1]$, donc $f'(x) < f'(\alpha) = 0$, $\forall x \in [0,\alpha[$ et $f'(x) > f'(\alpha) = 0$, $\forall x \in]\alpha, 1]$, donc $f'(\alpha) = 0$, f est décroissante sur $[0,\alpha[$ et croissante sur $]\alpha, 1]$. Il s'ensuit que $x = \alpha$ est un minimum de f sur $[0,1]$ et il est unique.

2) Comme $f''(x) = (x+2)e^x \neq 0$, $\forall x \in [0,1]$, l'algorithme $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$; $x_0 \in [0,1]$ est bien défini, donc il permet de déterminer α pour x_0 bien choisi (convergence locale). Ici, il converge vers α pour tout $x_0 \in [0,1]$ car $f' \in C^2([0,1])$, $f'(0)f'(1) < 0$, $f'' > 0$ sur $[0,1]$, $f'''(x) = (x+3)e^x > 0$, $\forall x \in [0,1]$ et $c = 0$ est tel que $|f'(c)| = \min\{|f'(0)|, |f'(1)|\}$ vérifie $\frac{|f'(c)|}{|f''(c)|} \leq b - a \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1$.

3) $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} = \frac{x_n^2 + x_n - 1 + 2e^{-x_n}}{x_n + 2}$; $x_0 = 1$, donne les x_n de la table 3.

n	x_n	n	z_n	n	x_n
0	0.5	0	0.5	0	1
1	0.30769230	1	0.33333333	1	0.57858629
2	0.32313575	2	0.32222222	2	0.40127775
3	0.32212170	3	0.32218535	3	0.37531258
4	0.32218961	4	0.32218535	4	0.37482269
5	0.32218506	5	0.32218535	5	0.37482252
6	0.32218537	6	0.32218535	6	0.37482252

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

3ème Année Préparatoire **Année Scolaire : 2002/2003**

SYNTHESE

Module : Analyse Numérique **Semestre : 2** **Date : 26/05/2003**
Durée : 02h

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3
Barème	07 pts	05 pts	08 pts

Exercice 1:

Soit $A = \begin{pmatrix} p & -q & 0 & 0 \\ -q & p & -q & 0 \\ 0 & -q & p & -q \\ 0 & 0 & -q & p \end{pmatrix}$, où $p, q \in \mathrm{R}^4$ tels que : $p \geq 1,\ q \geq 1,\ p > 2q$.

1) Montrer que les algorithmes de Jacobi et Gauss-Seidel appliqués à $Ax = b \in \mathrm{R}^4$ convergent

2) Calculer $J,\ \mathrm{L}_1,\ \|J\|_2,\ \|\mathrm{L}_1\|_\infty$.

3) Dans le cas $p = 3,\ q = 1,\ x^0 = (0,0,0,0)^T$ et $\varepsilon = 10^{-6}$, calculer le nombre d'itérations par Jacobi et Gauss-Seidel pour avoir respectivement $\|x^k - x\|_2 \leq \varepsilon$ et $\|x^k - x\|_\infty \leq \varepsilon$.

Exercice 2:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$ et $b \in \mathrm{R}^4$ quelconque.

1) Montrer que l'algorithme de Gauss-Seidel appliqué à $Ax = b$ converge.

2) Calculer $f(\lambda) = \det(J - \lambda I)$ où J est la matrice de Jacobi associée à A.

3) Calculer $f(-2)$ et $f(-1)$, en déduire que l'algorithme de Jacobi appliqué à $Ax = b$ diverge.

Exercice 3:

Soit $f(x) = \cos(\pi x),\ x \in [-1,+1]$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $-1, -1/3, 1/3, 1$ sur $[-1,1]$.

1) Justifier sans calcul le degré exact de P.

2) Appliquer l'algorithme de Newton pour le calcul de P (différences divisées). En déduire l'expression de P.

3) Donner l'estimation de l'erreur d'interpolation $f(x) - P(x),\ x \in [-1,+1]$.

4) Estimer l'erreur d'interpolation en $x = 0$ et comparer avec l'erreur exacte.

Corrigé Synthèse Analyse Numérique

Exercice 1: 07pts

1) Comme $p > 2q$, A est à diagonale strictement dominante, donc les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel appliquées à $Ax = b \in \mathrm{R}^4$ convergent.

$$2)\ J = \frac{q}{p}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathsf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q}{p} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{q}{p}\right)^2 & \frac{q}{p} & 0 \\ 0 & \left(\frac{q}{p}\right)^3 & \left(\frac{q}{p}\right)^2 & \frac{q}{p} \\ 0 & \left(\frac{q}{p}\right)^4 & \left(\frac{q}{p}\right)^3 & \left(\frac{q}{p}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

J est symétrique, donc $\|J\|_2 = \rho(J) = \frac{q}{p}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ (en effet, $J = \frac{q}{p}J'$ et $\det(J' - \lambda I) = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1$, donc $\rho(J') = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et alors $\rho(J) = \frac{q}{p}\rho(J')$).

$$\|\mathsf{L}_1\|_\infty = \left(\frac{q}{p}\right)^4 + \left(\frac{q}{p}\right)^3 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{q}{p}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^2 + \frac{q}{p} + 1\right) = \frac{q}{p}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^3}{1-\frac{q}{p}} = \frac{q}{p-q}\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)^3\right]$$

$(= \frac{13}{27}$ si $p = 3,\ q = 1)$.

3) Pour

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q/p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix},\ \|x^1 - x^0\| = \frac{1}{3},\ p = 3,\ q = 1,$$

$$k \geq \frac{\ln\frac{(1-\|J\|_2)\varepsilon}{\|x^1 - x^0\|}}{\ln\|J\|_2} = \frac{\ln\left(3\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{6}\right)\times 10^{-6}\right)}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{6}\right)} = 21.853,\ \text{donc } k_0 = 22.$$

$$k \geq \frac{\ln\frac{(1-\|\mathsf{L}_1\|_\infty)\varepsilon}{\|x^1 - x^0\|}}{\ln\|\mathsf{L}_1\|_\infty} = \frac{\ln\left(3\left(1 - \frac{13}{27}\right)\times 10^{-6}\right)}{\ln\left(\frac{13}{27}\right)} = 18.298,\ \text{donc } k_0 = 19.$$

Exercice 2 : 05 pts

$$1)\ \Delta_1 = 1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ \Delta_4 = \det A = 1 > 0,$$

donc A est définie positive, la méthode de Gauss-Seidel appliquée à $Ax = b \in \mathrm{R}^4$ converge.

$$2)\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -10 \\ -1/2 & 0 & -3/2 & -2 \\ -1/6 & -1/2 & 0 & -5/3 \\ -1/20 & -1/5 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},\ \det(J - \lambda I) = \lambda^4 - \frac{27}{10}\lambda^2 + \frac{28}{15}\lambda - \frac{13}{80}.$$

3) $f(-2) = \frac{313}{240} = 1.3042\ldots > 0$, $f(-1) = -\frac{179}{48} = -3.7292\ldots < 0$, comme f est continue sur $[-2,-1]$, il existe $\lambda_0 \in]-2,-1[$ tel que $f(\lambda_0) = 0$, λ_0 est une valeur propre de J, donc $\rho(J) \geq |\lambda_0| > 1$ et la méthode de Jacobi appliquée à $Ax = b \in \mathrm{R}^4$ diverge.

Exercice 1: 08 pts

1) Comme f est paire et les points d'interpolation $-1, -1/3, 1/3, 1$ sont symétriques par rapport à l'origine, alors $P(x)$ est pair ($P(-x) = P(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$), puisque $d \mathrm{U}\, P \leq 3$, alors $d \mathrm{U}\, P = 0$ ou $d \mathrm{U}\, P = 2$, donc $d \mathrm{U}\, P = 2$ car P change de signe sur $[-1, +1]$ ($P(-1)P(-1/3) < 0$ et $P(1/3)P(1) < 0$).

2)

x_i	$f(x_i)$	$f[.,.]$	$f[.,.,.]$	$f[-1,-1/3,1/3,1]$
-1	-1			
$-1/3$	$1/2$	$9/4$		
$1/3$	$1/2$	0	$-27/16$	
1	-1	$-9/4$	$-27/16$	0

$P(x) = -1 + \frac{9}{4}(x+1) - \frac{27}{16}(x+1)(x+\frac{1}{3}) = \frac{11}{16} - \frac{27}{16}x^2$

3) $\forall x \in [-1, +1]$, $\exists \xi_x \in [-1, +1] : f(x) - P(x) = (x+1)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})(x-1)\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}$.

Comme $f^{(4)}(x) = \pi^4 \cos(\pi x)$, alors $|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^4}{4!}|(x^2-1)(x^2-\frac{1}{9})|$, $\forall x \in [-1, +1]$.

4) $|f(0) - P(0)| \leq \frac{\pi^4}{4! \times 9} = 0.45097\ldots$

$f(0) - P(0) = 1 - \frac{11}{16} = 0.3125\ldots$

Ecole Nationale Préparatoire aux Etudes d'Ingéniorat
Analyse Numérique. 3ème Année. 2002-2003

Rattrapage

06 Juillet 2003. Durée 02h
Barème : Ex1 (07 pts), Ex2 (08 pts), Ex3 (05 pts)

Exercice 1:

Soit $f \in C^3[a,b]$ et $H(x)$ le polynôme de degré ≤ 2 vérifiant :

$H(a) = f(a),\ H'(a) = f'(a),\ H(b) = f(b)$

1) Montrer, à l'aide d'un système linéaire, que $H(x)$ existe et est unique.

Soit $\varepsilon > 0$ et $L_\varepsilon(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f en $a, a+\varepsilon, b$ sur $[a,b]$.

2) Déterminer par la formule de Newton l'expression de $L_\varepsilon(x)$.

3) Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon(x) = H(x)$.

Exercice 2:

Soit $f \in C^6[-1,+1]$ telle que $|f^{(6)}| \leq 1$ sur $[-1,+1]$ et $T(x) = x^6 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{32}$, $x \in [-1,+1]$.

1) En posant $t = x^2$ puis $t = s + \frac{1}{2}$ dans $T(x) = 0$, déterminer les racines $x_k,\ k = \overline{1,6}$ de $T(x)$ telles que $-1 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < +1$.

2) Montrer que si $x = \cos\theta$, alors $\cos(6\theta) = 32.T(x)$.

Soit $p_5(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f en $x_k,\ k = \overline{1,6}$ sur $[-1,+1]$

3) Exprimer l'erreur d'interpolation $f(x) - p_5(x),\ x \in [-1,+1]$, en fonction de $\cos(6\theta)$.

4) En déduire $|f(x) - p_5(x)| \leq \frac{1}{23\,040},\ \forall x \in [-1,+1]$.

Exercice 3:

Soit $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\varepsilon & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\|A\|_\infty$.

2) Calculer A^{-1} (on pourra résoudre $Ax = y \in \mathbb{R}^4$).

3) Calculer $Cond_\infty(A)$.

4) Pour quelles valeurs de $\varepsilon > 0$, A est-elle mal conditionnée ? bien conditionnée ?

Exercice 4:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est symétrique définie positive.

2) Ecrire l'algorithme de factorisation de Cholesky.

3) Déterminer la matrice L triangulaire inférieure telle que $A = LL^T$.

Bonne Chance !

Corrigé Rattrapage Analyse Numérique 2002/2003

Exercice 1:

1) $H(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $H'(x) = c_1 + 2c_2 x$

$$\begin{cases} H(a) = f(a) \\ H'(a) = f'(a) \\ H(b) = f(b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 + c_1 a + c_2 a^2 = f(a) \\ c_1 + 2c_2 a = f'(a) \\ c_0 + c_1 b + c_2 b^2 = f(b) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f'(a) \\ f(b) \end{pmatrix} \Leftrightarrow Mc = F, \det M = (b-a)^2 \neq 0.$$

2) $L_\varepsilon(x) = f(a) + f[a, a+\varepsilon](x-a) + f[a, a+\varepsilon, b](x-a)(x-a-\varepsilon)$

$$= f(a) + \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}(x-a) + \frac{f[a+\varepsilon, b] - f[a, a+\varepsilon]}{b-a}(x-a)(x-a-\varepsilon)$$

$$= f(a) + \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}(x-a) + \frac{\dfrac{f(b) - f(a+\varepsilon)}{b-a-\varepsilon} - \dfrac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}}{b-a}(x-a)(x-a-\varepsilon).$$

Quand $\varepsilon \to 0$, $L_\varepsilon(x) \to f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(a)}{b-a}(x-a)^2$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \left(f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\right)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2$$

$$= \left(1 - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\right) f(a) + \frac{(x-a)(b-a) - (x-a)^2}{b-a} f'(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 f(b).$$

3) Le polynôme $H(x) = \left(1 - \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2\right) f(a) + (x-a)\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right) f'(a) + \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2 f(b)$ est de degré 2 et vérifie bien les conditions $H(a) = f(a)$, $H'(a) = f'(a)$, $H(b) = f(b)$, d'après 1) on a : donc $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon(x) = H(x)$.

Exercice 2:

1) $T(x) = x^6 - \dfrac{3}{2}x^4 + \dfrac{9}{16}x^2 - \dfrac{1}{32} = 0$, $t = x^2$ donne $t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + \dfrac{9}{16}t - \dfrac{1}{32} = 0$ et $t = s + \dfrac{1}{2}$ donne $s^3 - \dfrac{3}{16}s = 0$, donc $s = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $t = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $x = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

2) $x = \cos\theta$, $\cos(6\theta) = 2\cos^2(3\theta) - 1 = 2(3\cos^3\theta - 4\cos\theta)^2 - 1$, donc

$\cos(6\theta) = 32\cos^2\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^6\theta - 1 = 32\left(\cos^2\theta - \dfrac{3}{2}\cos^4\theta + \dfrac{9}{16}\cos^6\theta - \dfrac{1}{32}\right) = 32.T(\cos\theta)$.

3) $\forall x \in [-1, +1]$, $\exists \xi_x \in [-1, +1] : f(x) - p_5(x) = \prod\limits_{k=1}^{6}(x - x_k)\dfrac{f^{(6)}(\xi_x)}{6!} = T(x)\dfrac{f^{(6)}(\xi_x)}{6!}$.

Donc si $x = \cos\theta$, $f(x) - p_5(x) = \prod\limits_{k=1}^{6}(x - x_k)\dfrac{f^{(6)}(\xi_x)}{6!} = \dfrac{1}{32}\cos(6\theta)\dfrac{f^{(6)}(\xi_x)}{6!}$ et $|f^{(6)}| \leq 1$ sur $[-1, +1]$, il vient

4) $|f(x) - p_5(x)| \leq \dfrac{1}{32 \times 6!} = \dfrac{1}{23\,040}$, $\forall x \in [-1, +1]$.

Exercice 3:

Soit $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\varepsilon & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$.

1) $\|A\|_\infty = 4 + \varepsilon$.

2) $A^{-1} = \dfrac{1}{\varepsilon(4+\varepsilon)} \begin{pmatrix} 3+\varepsilon & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3+\varepsilon & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3+\varepsilon & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3+\varepsilon \end{pmatrix}$. $\|A^{-1}\|_\infty = \dfrac{6+\varepsilon}{\varepsilon(4+\varepsilon)}$

3) $Cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = (4+\varepsilon)\dfrac{6+\varepsilon}{\varepsilon(4+\varepsilon)} = 1 + \dfrac{6}{\varepsilon}$.

4) Pour $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, A est-elle mal conditionnée, pour ε loin de 0 (par exemple $\varepsilon \geq 1$) A est bien conditionnée.

Exercice 4:

1) $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 1 > 0$, donc A est définie positive.

2) $\begin{cases} L_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1 \\ L_{21} = \dfrac{a_{21}}{L_{11}} = 1 \\ L_{31} = \dfrac{a_{31}}{L_{11}} = 1 \\ L_{41} = \dfrac{a_{41}}{L_{11}} = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} L_{22} = (a_{22} - L_{21}^2)^{1/2} = 1 \\ L_{32} = \dfrac{a_{32} - L_{31}L_{21}}{L_{22}} = 1 \\ L_{42} = \dfrac{a_{42} - L_{41}L_{21}}{L_{22}} = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} L_{33} = (a_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2)^{1/2} = 1 \\ L_{43} = \dfrac{a_{43} - L_{41}L_{31} - L_{42}L_{32}}{L_{33}} = 1 \\ L_{44} = (a_{44} - L_{41}^2 - L_{42}^2 - L_{43}^2)^{1/2} = 1 \end{cases}$

3) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

3ème Année Préparatoire **Année Scolaire : 2003/2004**

Partiel 1

Module : Analyse Numérique **Semestre : 2** **Date : 06/04/2004** **Durée : 02h**

Barème : 02 points par question

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine réelle α et une seule dans tout $\mathbb{R}$ et que cette racine est localisée dans l'intervalle $[3/2, 2]$.

2) Quel est le nombre n_1 d'itérations suffisantes à effectuer par la méthode de Dichotomie pour obtenir une approximation de α à 10^{-6} près.

Soit $\varphi(x) = \left(\dfrac{3x^2+1}{2}\right)^{1/3},\ x \in [3/2, 2]$.

3) Montrer que la fonction φ et l'intervalle $[3/2, 2]$ vérifient les conditions

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x),\ \forall x \in [3/2, 2]$, b) $\varphi([3/2, 2]) \subset [3/2, 2]$, c) $\sup\limits_{x \in [3/2,2]} |\varphi'(x)| = L < 1$.

En déduire que l'itération $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers α pour tout $x_0 \in [3/2, 2]$.

4) Quel est le nombre n_2 d'itérations suffisantes à effectuer par l'itération $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ commençant en $x_0 = 1.75$ pour obtenir une approximation de α à 10^{-6} près.

5) Calculer y_n, $n = \overline{1,5}$, où $y_{n+1} = y_n - \dfrac{f(y_n)}{f'(y_n)}$; $y_0 = 1.75$

On pose $x = t + \dfrac{1}{2}$ dans $f(x) = 0$, ensuite $t = a + b$ dans l'équation obtenue, avec $ab = \dfrac{1}{4}$.

6) Montrer que a^3 et b^3 sont les solutions de l'équation $s^2 - \dfrac{3}{4}s + \dfrac{1}{4^3} = 0$.

7) En déduire a, b, t et la valeur exacte de $\alpha = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}) = 1.677\,650\,699\ldots$

Soient $g(x) = 6x^3 - 3x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$ et $\psi(x) = \left(\dfrac{3x^2+1}{6}\right)^{1/3},\ x \in [0, 1]$.

8) Montrer que l'itération $z_{n+1} = \psi(z_n)$ converge vers l'unique racine β de l'équation $g(x) = 0$ dans $[0, 1]$ pour tout $z_0 \in [0, 1]$.

9) Déterminer le nombre n_3 d'itérations suffisantes par la méthode de Dichotomie pour avoir une approximation de β à 10^{-6} près ainsi que le nombre n_4 d'itérations $z_{n+1} = \psi(z_n)$ commençant en $z_0 = 0.5$ suffisantes pour atteindre la même précision.

10) Comparer n_1 avec n_2 et n_3 avec n_4 et expliquer dans quel cas la méthode de Dichotomie converge vers la racine plus vite que celle du point fixe et pourquoi ?

Bonne Chance !

Corrigé Partiel Analyse Numérique 2003/2004

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$, $f'(x) = 6x(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = -1$, $f(1) = -2$, $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$, $f(3/2) = -1$, $f(2) = 3$. Donc $f(x) < 0$, $\forall x < 1$ et $\exists!\ \alpha \in]1, +\infty[$: $f(\alpha) = 0$ et $\alpha \in]3/2, 2[$ suite au tableau des variations de f.

2) $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \ln \dfrac{b-a}{\varepsilon} / \ln 2$, $a = 3/2$, $b = 2$, $\varepsilon = 10^{-6}$, donc $n \geq 18.931\ldots$ et $n_1 = 19$.

3) a) $x = \varphi(x) = \left(\dfrac{3x^2+1}{2}\right)^{1/3} \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 1 = f(x) = 0$, $\forall x \in [3/2, 2]$,

b) φ est strictement croissante sur $[3/2, 2]$, donc
$\varphi([3/2, 2]) = [\varphi(3/2), \varphi(2)] = [1.570\ldots, 1.866\ldots] \subset [3/2, 2]$.

c) $\varphi'(x) = x\left(\dfrac{3x^2+1}{2}\right)^{-2/3} > 0$, $x \in [\dfrac{3}{2}, 2]$,

$$\varphi''(x) = -(x+1)(x-1)(3x^2+1)^{-1}\left(\frac{3x^2+1}{2}\right)^{-2/3} < 0,\ x \in [\frac{3}{2}, 2]$$

Par conséquent $L = \sup\limits_{[3/2,2]} |\varphi'| = \varphi'(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{8}{31}\right)^{2/3} = 0.608\,009\,158\,5\ldots < 1$. La fonction φ est donc contractante sur $[3/2, 2]$ de constante de contraction L. D'après le théorème du point fixe, l'itération $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers l'unique point fixe α de φ dans $[3/2, 2]$, qui est l'unique racine de $f(x) = 0$ dans $[3/2, 2]$, pour tout $x_0 \in [3/2, 2]$.

4) On a $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \ln \dfrac{(1-L)\varepsilon}{|x_1 - x_0|} / \ln L$, $L = 0.608\,009\,158\ldots$, $\varepsilon = 10^{-6}$, $x_0 = 1.75$, $x_1 = \varphi(x_0) = 1.720\,597\,188\ldots$, donc $n \geq 22.560\ldots$ et $n_2 = 23$.

5) $y_{n+1} = y_n - \dfrac{f(y_n)}{f'(y_n)} = \dfrac{4y_n^3 - 3y_n^2 + 1}{6y_n(y_n - 1)}$; $y_0 = 1.75$, donc
$y_1 = 1.682\,539\,683$, $y_2 = 1.677\,675\,278$, $y_3 = 1.677\,650\,70$,
$y_4 = 1.677\,650\,699$, $y_5 = 1.677\,650\,699$

6) $x = t + \dfrac{1}{2}$ dans $f(x) = 0$ donne $t^3 - \dfrac{3}{4}t - \dfrac{3}{4} = 0$ et $t = a + b$ donne $a^3 + b^3 + (a+b)(3ab - \dfrac{3}{4}) - \dfrac{3}{4} = 0$, donc $ab = \dfrac{1}{4} \Rightarrow a^3 + b^3 = \dfrac{3}{4}$ et a^3 et b^3 sont les solutions de $s^2 - \dfrac{3}{4}s + \dfrac{1}{4^3} = 0$, donc $s = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{8}$.

7) D'après 6), on a $a^3 = \dfrac{1}{8}(3 + 2\sqrt{2})$ et $b^3 = \dfrac{1}{8}(3 - 2\sqrt{2})$ (ou le contraire), donc $a = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}$ et $b = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}$, donc $t = a + b$ et

$$\alpha = \frac{1}{2} + a + b = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}\right) = 1.677\,650\,699\ldots$$

dont le développement décimal coïncide avec y_4 de la question 5).

8) Comme $\varphi(x)$, la fonction $\psi(x) = \left(\dfrac{3x^2+1}{6}\right)^{1/3}$ vérifie :

a) $x = \psi(x) \Leftrightarrow 6x^3 - 3x^2 - 1 = g(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$,

b) ψ est strictement croissante sur $[0, 1]$, donc
$\psi([0, 1]) = [\psi(0), \psi(1)] = [0.550\ldots, 0.873\ldots] \subset [0, 1]$.

c) $\psi'(x) = \dfrac{x}{3}\left(\dfrac{3x^2+1}{6}\right)^{-2/3} > 0$, $\forall x \in [0, 1]$,

$$\psi''(x) = -\frac{1}{3}(x+1)(x-1)(3x^2+1)^{-1}\left(\frac{3x^2+1}{6}\right)^{-2/3} > 0,\ \forall x \in [0, 1],$$

donc $L = \sup\limits_{[0,1]} |\psi'| = \psi'(1) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2/3} = 0.436\,790\,232\,4\ldots < 1$.

Le théorème du point fixe implique que l'itération $x_{n+1} = \psi(x_n)$ converge vers l'unique point fixe β de ψ dans $[0,1]$, qui est l'unique racine de $g(x) = 0$ dans $[0,1]$, pour tout $x_0 \in [0,1]$.

9) Par la Dichotomie, on a

$$|x_n - \beta| \leq \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \ln \frac{b-a}{\varepsilon} / \ln 2, \ a = 0, \ b = 1, \ \varepsilon = 10^{-6},$$

donc $n \geq 19.931\,568\,57\ldots$ et $n_3 = 20$.

D'autre part,

$$|x_n - \beta| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \ln \frac{(1-L)\varepsilon}{|x_1 - x_0|} / \ln L, \ L = 0.436\,790\,232\,4\ldots, \ \varepsilon = 10^{-6}, \ x_0 = 0.5,$$

$x_1 = \psi(x_0) = 0.663\,176\,201\,3\ldots$, donc $n \geq 15.183\ldots$ et $n_4 = 16$.

10) En résumé, on a $n_1 = 19$, $n_2 = 23$, $n_3 = 20$, $n_4 = 16$. Dans le cas de n_2 on a $L = 0.608\ldots > 0.5$ ce qui explique $n_1 < n_2$ pour le même $x_0 = (a+b)/2 = 1.75$. Dans le cas de n_4 on a $L = 0.436\ldots < 0.5$ ce qui justifie $n_3 > n_4$ pour le même $x_0 = (a+b)/2 = 0.5$

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

3ème Année Préparatoire **Année Scolaire : 2003/2004**

Synthèse

Module : Analyse Numérique **Semestre : 2** **Date : 26/05/2004** **Durée : 02h**

Barème : Ex.1 (04 points), Ex.2 (06 points), Ex.3 (06 points), Ex.4 (04 points)

Exercice 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $b \in \mathbb{R}^4$.

1) Résoudre le système linéaire $Ax = b$ par la méthode de Gauss. En déduire A^{-1}.

2) Montrer que les factorisations Doolittle, Crout et Cholesky de A sont identiques.

3) Montrer que $x^T Ax = \sum_{i=1}^{4} (y_i(x))^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$, où les $y_i(x)$, $i = \overline{1,4}$ sont à déterminer.

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1) Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a-t-on $\rho(J) < 1$? (J est la matrice de Jacobi associée à A)

2) On suppose $\alpha = \beta = 2$ et $x^0 = (2,2,2)^T$.

2.1) La méthode de Jacobi est-elle convergente ?

2.2) Montrer que $x^k = (1,1,1)^T$, $\forall k \geq 1$. Conclusion !

3) Soit $\alpha = 0$ et $\beta = 1/2$.

3.1) Déterminer le nombre d'itérations k_0 à effectuer par la methode de Jacobi commençant en $x^0 = (2,2,2)^T$ pour avoir $\|x^k - x\|_2 \leq 10^{-3}$, $\forall k \geq k_0$.

3.2) Peut-on assimiler x^2 à la meilleure solution approchée de x à 10^{-3} près ? Justifier.

4) Soit $\mathcal{L}_1$ la matrice de Gauss-Seidel associée à A.

4.1) Ecrire l'algorithme de Gauss-Seidel appliqué à $Ax = b$. En déduire $\mathcal{L}_1$.

4.2) Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a-t-on $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$?

Exercice 3 :

Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale strictement dominante, i.e. $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, $\forall i = \overline{1,n}$.

1) Montrer que A est inversible.

2) En déduire que pour toute valeur propre λ de A, il existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

3) Montrer que si A est symétrique à diagonale strictement dominante et à éléments diagonaux strictement positifs, alors A est définie positive.

4) En déduire que $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$; $a_{ij} = \alpha$ si $j = i$, $a_{ij} = -\beta$ si $j = i \pm 1$ et $a_{ij} = 0$ si $j \neq i, i \pm 1$ est définie positive $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha > 2|\beta|$, $\alpha > 0$.

Exercice 4 :

Soit $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $M > 0$ vérifiant : $|f^{(k)}(x)| \leq M^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $p_{2n-1}(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $M < 2$, alors $\lim_{n \to +\infty} p_{2n-1}(0) = f(0)$.

Viel Glück !

Corrigé Synthèse Analyse Numérique 2003/2004

1.1) $\widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_4 - b_1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 + b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_4 - b_1 \end{pmatrix}$,

$\widetilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 + b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 - b_3 - b_2 + b_1 \end{pmatrix}$ et $A^{(3)}x = b^{(3)} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + x_3 = b_1 \\ x_2 - x_3 = b_2 - b_1 \\ x_3 + x_4 = b_3 + b_2 - 2b_1 \\ x_4 = b_4 - b_3 - b_2 + b_1 \end{cases}$

Donc $x = \begin{pmatrix} 7b_1 - 4b_2 - 3b_3 + b_4 \\ -4b_1 + 3b_2 + 2b_3 - b_4 \\ -3b_1 + 2b_2 + 2b_3 - b_4 \\ b_1 - b_2 - b_3 + b_4 \end{pmatrix} = A^{-1}b$, où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2) $A = LU$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} A = LU,\ L_{ii} = 1,\ i = 1,2,3,4 \\ A = LU,\ U_{ii} = 1,\ i = 1,2,3,4 \\ A = LL^T,\ L_{ii} > 0,\ i = 1,2,3,4 \end{cases}$

Les 3 factorisations sont identiques suite à leurs unicité.

1.3) $x^T A x = x^T L L^T x = (L^T x)^T (L^T x) = \|L^T x\|_2^2 = \sum_{i=1}^4 (y_i(x))^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$, donc
$y_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $y_2(x) = x_2 - x_3$, $y_3(x) = x_3 + x_4$, $y_4(x) = x_4$.

2.1) $J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\det(J - \lambda I) = \lambda(\lambda^2 - \beta^2)$, $\lambda = 0, \pm\beta$, $\rho(J) = |\beta|$, donc
$\rho(J) < 1 \Leftrightarrow |\beta| < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.2.1) Pour $\alpha = \beta = 2$, $\rho(J) = 2 > 1$ et Jacobi diverge.

2.2.2) $x^1 = Jx^0 + D^{-1}b = (1,1,1)^T$ et $x^2 = Jx^1 + D^{-1}b = (1,1,1)^T$, donc $x^k = (1,1,1)^T$, $\forall k \geq 1$.
Ici la méthode converge car x^0 est choisi comme étant la solution exacte x de $Ax = b \Leftrightarrow x = Jx + c$.

2.3.1) Si $\alpha = 0$ et $\beta = 1/2$, $\rho(J) = 1/2$, $x^0 = (2,2,2)^T$, $x^1 = (2,1,2)^T$, $\|x^1 - x^0\|_2 = 1$, $\|J\|_2 = \rho(J) = 1/2$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $k \geq \ln\left(\dfrac{(1 - \|J\|_2)\,\varepsilon}{\|x^1 - x^0\|_2}\right) / \ln(\|J\|_2) = 10.965\,784\,28$, $k_0 = 11$.

2.3.2) Oui. $x^2 = (2,1,2)^T$ est la solution exacte.

2.4.1) $\begin{cases} x_1^{k+1} = -\alpha x_2^k + \beta x_3^k + 1 \\ x_2^{k+1} = 1 \\ x_3^{k+1} = \beta x_1^{k+1} - \alpha x_2^{k+1} + 1 = -\alpha\beta x_2^k + \beta^2 x_3^k + \beta - \alpha + 1 \\ x^0 = (2,2,2)^T \end{cases}$, $\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$

2.4.2) $\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = \lambda^2(\lambda - \beta)$, $\lambda = 0, \beta$, $\rho(\mathcal{L}_1) = |\beta|$, $\rho(\mathcal{L}_1) < 1 \Leftrightarrow |\beta| < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.1) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0$, $\forall i = \overline{1,n}$. Si $x \neq 0$, il existe k tel que $x_k \neq 0$, donc $x_i = \max_j |x_j| \neq 0$ et alors

$a_{ii} x_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \Rightarrow |a_{ii}||x_i| = |\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.|x_j|$,

donc

$|a_{ii}| \leq \dfrac{1}{|x_i|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.|x_j| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ car $|x_j| \leq |x_i|$, $\forall j$

ce qui contredit la dominance stricte de la diagonale, donc $x = 0$ et A est inversible.

3.2) Si λ est une valeur propre de A, alors $A - \lambda I$ n'est pas inversible, donc la diagonale de $A - \lambda I$ n'est pas strictement dominante d'après 1). Donc

$\exists i,\ 1 \leq i \leq n : |a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

3.3) A est symétrique, ses valeurs propres λ sont réelles. D'autre part $\exists i,\ 1 \leq i \leq n$ tel que

$a_{ii} - \lambda \leq |a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ et $a_{ii} > 0$,

il vient

$\lambda = a_{ii} + \lambda - a_{ii} \geq |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| > 0$.

Donc $\lambda > 0,\ \forall\lambda$ v.p. de A qui est alors définie positive.

3.4) $\alpha > 2|\beta|$ implique $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|,\ \forall i = \overline{1,n}$ et $a_{ii} > 0,\ \forall i = \overline{1,n}$. D'après 3.3) A est S.D.P.

4) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \xi \in \mathbb{R} : f(x) - p_{2n-1}(x) = \prod_{k=1}^{n} (x^2 - k^2) \dfrac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}$, donc

$$|f(0) - p_{2n-1}(0)| = (n!)^2 \frac{|f^{(2n)}(\xi)|}{(2n)!}.$$

Comme $|f^{(2n)}| \leq M^{2n}$ sur $\mathbb{R}$, alors

$|f(0) - p_{2n-1}(0)| \leq \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n := (n!)^2 \dfrac{M^{2n}}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{((n+1)!)^2 M^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2 M^{2n}} = \frac{(n+1)M^2}{2(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{M^2}{4} < 1 \text{ pour } M < 2.$$

ENPEI - 3ème Année Préparatoire - 2003/2004

Rattrapage

Analyse Numérique - 12/06/2004 - Durée : 02h

Barème : 07 + 07 + 06 pts

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie pour $x > 0$ par $f(x) = \ln x + x^2 + 2x - 5$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine α et une seule que l'on localisera entre deux entiers consécutifs a et $a+1$.

2) Montrer que l'itération $x_{n+1} = x_n - f(x_n)$; $x_0 \in [a, a+1]$ ne converge pas vers α.

3) Pour quelles valeurs de λ, l'itération $x_{n+1} = x_n - \lambda f(x_n)$; $x_0 \in [a, a+1]$ converge-t-elle vers α ? Déterminer la valeur λ_0 de λ pour laquelle $\max\limits_{x \in [a,a+1]} |1 - \lambda f'(x)|$ est minimal.

4) L'itération $x_{n+1} = \dfrac{5 - \ln x_n}{x_n + 2}$; $x_0 \in [a, a+1]$ converge-t-elle vers α ?

5) Ecrire l'algorithme de Newton appliqué à $f(x) = 0$. Pour quelles valeurs de x_0 converge-t-il vers α ?

Exercice 2 :

Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ et $\Delta_n = x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2$, $n \geq 0$.

1) Montrer que $\Delta_n = (-1)^n$, $\forall n \geq 0$.

2) Calculer x_n pour $n = 13, 14, 15, 16$.

3) Déduire la solution des systèmes

$$\begin{pmatrix} 144 & 233 \\ 233 & 377 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 377 \\ 610 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 144 & 233 \\ 233 & 377 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 378 \\ 609 \end{pmatrix}.$$

4) La matrice A de ces systèmes est-elle bien conditionnée ?

5) Calculer $Cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.

Exercice 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 2 \end{pmatrix}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifient $\alpha\beta = 1$ et $b \in \mathbb{R}^3$.

1) Calculer $p(\lambda) = \det(J - \lambda I)$, où J est la matrice de Jacobi associée à A.

2) Montrer que $p(-1) < 0$, et étudier la convergence de la méthode de Jacobi appliquée à $Ax = b$.

3) Calculer la matrice $\mathcal{L}_1$ de Gauss-Seidel associée à A, en déduire les valeurs de α, β pour lesquelles la méthode de Gauss-Seidel appliquée à $Ax = b$ converge.

Bonne chance !

Corrigé Rattrapage Analyse Numérique 2003/2004

1.1) f est continue pour $x > 0$ et $f(1) = -2 < 0,\ f(2) = \ln 2 + 3 > 0$, donc $\exists \alpha \in]1,2[$: $f(\alpha) = 0$. D'autre part, $f'(x) = 1/x + 2x + 2 > 0,\ \forall x \in [1,2]$, donc α est unique.

1.2) $\varphi(x) = x - f(x) = 5 - x - x^2 - \ln x,\ \varphi'(x) = -1 - 2x - 1/x,\ |\varphi'|'(x) = 2 - 1/x^2 > 0,\ \forall x \in [1,2]$, donc $\min\limits_{[1,2]} |\varphi'| = |\varphi''(1)| = 4$ car $|\varphi'|$ est croissante, donc

$$|x_{n+1} - \alpha| = |\varphi(x_n) - \varphi(\alpha)| = |\varphi'(\xi_n)||x_n - \alpha| = 4|x_n - \alpha|.$$

Alors

$$|x_n - \alpha| \geq 4^n |x_0 - \alpha| \longrightarrow +\infty \text{ si } x_0 \neq \alpha, \text{ donc } x_n \nrightarrow \alpha,\ n \to \infty.$$

1.3) $f'(x) = 1/x + 2x + 2 > 0,\ f'' > 0$ sur $[1,2]$ et

$$M = \max_{[1,2]} f' = f'(2) = 13/2,\ m = \min_{[1,2]} f' = f'(1) = 5,$$

donc

$$\max_{[1,2]} |1 - \lambda f'| = \max\{|1 - \lambda m|, |1 - \lambda M|\} \text{ si } \lambda > 0$$

(pour $\lambda < 0,\ 1 - \lambda f' > 1$ et $x_n \nrightarrow \alpha$ comme en 2).

En effet,

$$m \leq f' \leq M \Rightarrow \lambda m \leq \lambda f' \leq \lambda M,\ \lambda > 0 \Rightarrow 1 - \lambda M \leq 1 - \lambda f' \leq 1 - \lambda m,$$

de plus

$$|1 - \lambda M| < 1 \Leftrightarrow -1 < (13/2)\lambda - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 4/13 \text{ et}$$

$$|1 - \lambda m| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - 5\lambda < 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 2/5,$$

donc $\max\limits_{[1,2]} |1 - \lambda f'| < 1$ si $0 < \lambda < 4/13$ et pour ces valeurs de λ, $\max\limits_{[1,2]} |1 - \lambda f'|$ est minimal en $\lambda_0 \in]0, 4/13[$ lorsque

$$1 - \lambda_0 M = \lambda_0 m - 1 \text{ (examiner le graphe de } \lambda \mapsto |1 - \lambda M| \text{ et } \lambda \mapsto |1 - \lambda m|),$$

ce qui donne $\lambda_0 = 2/(M + m) = 26/69$.

1.4) $\varphi(x) = \dfrac{5 - \ln x}{x + 2},\ \varphi'(x) = \dfrac{\ln x - 2/x - 6}{(x+2)^2} < 0,\ \forall x \in [1,2]$, car le numérateur $N(x) = \ln x - 2/x - 6$ est croissant et $N(1) = -8 < 0$ et $N(2) = \ln 2 - 7 < 0$, donc $N(x) < 0$, $\forall x \in [1,2]$, et alors

$$|\varphi'|(x) = \frac{6 + 2/x - \ln x}{(x+2)^2},\ \forall x \in [1,2],$$

$$|\varphi'|'(x) = -\frac{(x+2)^2/x^2 + 2(6 + 2/x - \ln x)}{(x+2)^3} < 0,\ \forall x \in [1,2],$$

donc $\sup\limits_{[1,2]} |\varphi'| = |\varphi'(1)| = 8/9 < 1$. D'autre part,

$$\varphi([1,2]) = [\varphi(2), \varphi(1)] = [(5 - \ln 2)/4, 5/3] = [1.076\ldots, 1.666\ldots] \subset [1,2].$$

Par le théorème du point fixe, la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n);\ x_0 \in [1,2]$ converge vers la racine α de $f(x) = 0$ car $x = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in [1,2]$.

1.5) $f'(x) = 1/x + 2x + 2 > 0,\ \forall x \in [1,2]$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{6 + x_n^2 - \ln x_n}{2 + 2x_n + 1/x_n},\ n \geq 0;\ x_0 \in [1,2].$$

Cet algorithme converge pour tout $x_0 \in [1,2]$ car

- $f \in C^2[1,2]$,
- $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in [1,2]$,
- $f''(x) = 2 - 1/x^2 > 0,\ \forall x \in [1,2]$,
- $f(1)f(2) < 0$,
- $f'(1) = 5,\ f'(2) = 13/2$, donc $c = 1$, où $|f'(c)| = \min\{|f'(1)|, |f'(2)|\}$ et $|f(c)/f'(c)| \leq b - a \Leftrightarrow 2/5 \leq 1$.

Le théorème de convergence globale de l'algorithme de Newton implique que $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n) = \alpha,\ \forall x_0 \in [1,2]$.

2.1) $\Delta_n = x_n(x_n + x_{n+1}) - x_{n+1}^2 = x_n^2 + x_{n+1}(x_n - x_{n+1}) = x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = -\Delta_{n-1}$ et $\Delta_0 = x_0 x_2 - x_1^2 = 1$, donc $\Delta_n = (-1)^n \Delta_0 = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.2) Partons de $x_0 = 1$ et $x_1 = 0$, on obtient : $x_{13} = 144,\ x_{14} = 233,\ x_{15} = 377,\ x_{16} = 610$.

2.3) $\begin{cases} x_{13} + x_{14} = x_{15} \\ x_{14} + x_{15} = x_{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 144 & 233 \\ 233 & 377 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 377 \\ 610 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la solution du 1er système car $\det A = \Delta_{13} = -1 \neq 0$. La solution du 2ème système est $x' = A^{-1}b' = A^{-1}b + A^{-1}\delta b$ car $b' = b + \delta b$, où $\delta b = (1, -1)^T$, donc

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -377 & 233 \\ 233 & -144 \end{pmatrix}$ et $x' = x + A^{-1}\delta b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -610 \\ 377 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -609 \\ 378 \end{pmatrix}$.

2.4) $\delta x = x' - x = (-610, 377)^T$ est très grand devant $\delta b = b' - b = (1, -1)^T$, donc A est mal conditionnée.

2.5) $\|A\|_\infty = 377,\ \|A^{-1}\|_\infty = 610$, donc $Cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 229\,970 >> 1$.

3.1) & 3.2) $J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha/2 & -1/2 \\ -\alpha & 0 & -\beta \\ -1/2 & -\beta/2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} p(\lambda) := \det(J - \lambda I) = \lambda^3 - \frac{1}{4}\left(2\alpha^2 + 2\beta^2 + 1\right)\lambda + \frac{1}{2} \\ p(-1) < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 > 1/2 \\ \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta = 2 > 1/2 \end{array}$

Donc $\exists \lambda_0 \in]-\infty, -1[: p(\lambda_0) = 0$ et alors $\rho(J) \geq |\lambda_0| > 1$ et Jacobi diverge.

3.3) $\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha/2 & -1/2 \\ 0 & \alpha^2/2 & \alpha/2 - \beta \\ 0 & -\alpha(\alpha\beta - 1)/4 & -\alpha\beta/4 + \beta^2/2 + 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha/2 & -1/2 \\ 0 & \alpha^2/2 & \alpha/2 - \beta \\ 0 & 0 & \beta^2/2 \end{pmatrix}$

$\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = \lambda^3 - \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\lambda^2/2 + \lambda/4 \Rightarrow \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = \left(\alpha^2 + \beta^2 \pm \sqrt{\alpha^4 + \beta^4 - 2}\right)/4$, donc

$\rho(\mathcal{L}_1) = \left(\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\alpha^4 + \beta^4 - 2}\right)/4 < 1 \Leftrightarrow 2 \leq \alpha^2 + \beta^2 < 5/2$.

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

3ème Année Préparatoire **Année Scolaire : 2004/2005**

Partiel

Module : Analyse Numérique Semestre : 1 Date : 07/12/2004 Durée : 02h

Barème : Ex.1 (10 points), Ex.2 (05 points), Ex.3 (05 points)

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie pour $x > 0$ par $f(x) = \ln x + x^2 + 2x - 5$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine α et une seule que l'on localisera entre deux entiers consécutifs a et $a + 1$.

2) Montrer que l'itération $x_{n+1} = x_n - f(x_n)$; $x_0 \in [a, a + 1]$ ne converge pas vers α.

3) Pour quelles valeurs de $\lambda > 0$, la fonction $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$ est-elle contractante sur $[a, a + 1]$?

4) Déterminer la valeur λ_0 de λ pour laquelle $\max\limits_{x\in[a,a+1]} |1 - \lambda f'(x)|$ est minimal.

5) L'itération $x_{n+1} = \dfrac{5 - \ln x_n}{x_n + 2}$; $x_0 \in [a, a + 1]$ converge-t-elle vers α ?

6) Ecrire l'algorithme de Newton appliqué à $f(x) = 0$ et montrer qu'il converge vers α pour tout $x_0 \in [a, a + 1]$.

Exercice 2 :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 - \ln x}, \ \forall x > 0; \ \varphi(0) = 0 \text{ et } \alpha = e^{(1-\sqrt{5})/2}.$$

1) Le Théorème du point fixe est-il applicable à la fonction φ sur $[0, \alpha]$?

2) Montrer que l'itération $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers $\ell = 0$ pour tout $x_0 \in [0, \alpha]$.

Exercice 3 :

Soit (x_n) la suite définie par

$$x_0 = 1, \ x_1 = 0, \ x_{n+2} = x_n + x_{n+1}, \ \forall n \geq 0 \text{ et } \Delta_n = x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2, \ n \geq 0.$$

1) Montrer que $\Delta_n = (-1)^n$, $\forall n \geq 0$.

2) Les valeurs de x_n pour $n = 44, 45, 46, 47$ sont données par

$$x_{44} = 433494437, \ x_{45} = 701408733, \ x_{46} = 1134903170, \ x_{47} = 1836311903.$$

Déduire la solution du système

$$\begin{pmatrix} 433494437 & 701408733 \\ 701408733 & 1134903170 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1134903170 + \varepsilon \\ 1836311903 - \varepsilon \end{pmatrix}$$

pour $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon \neq 0$. Conclusion ?

Bonne chance !

Corrigé Partiel Analyse Numérique 2004/2005

1.1) f est continue pour $x > 0$ et $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = \ln 2 + 3 > 0$, donc $\exists \alpha \in]1,2[$: $f(\alpha) = 0$.
D'autre part, $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x + 2 > 0$, $\forall x > 0$, donc α est unique.

1.2) $\varphi(x) = x - f(x) = 5 - x - x^2 - \ln x$, $\varphi'(x) = -1 - 2x - \frac{1}{x}$, $|\varphi'|'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} > 0$, $\forall x \in [1,2]$, donc $\min\limits_{[1,2]} |\varphi'| = |\varphi''(1)| = 4$ car $|\varphi'|$ est croissante, il vient

$|x_{n+1} - \alpha| = |\varphi(x_n) - \varphi(\alpha)| = |\varphi'(\xi_n)||x_n - \alpha| \geq 4|x_n - \alpha|$, donc $|x_n - \alpha| \geq 4^n|x_0 - \alpha| \longrightarrow +\infty$ si $x_0 \neq \alpha$, i.e. $x_n \nrightarrow \alpha$, $n \to \infty$.

1.3) $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x + 2 > 0$, $f'' > 0$ sur $[1,2]$ et $M = \max\limits_{[1,2]} f' = f'(2) = \frac{13}{2}$, $m = \min\limits_{[1,2]} f' = f'(1) = 5$, donc $\max\limits_{[1,2]} |1 - \lambda f'| = \max\{|1 - \lambda m|, |1 - \lambda M|\}$, $\lambda > 0$.
En effet, $m \leq f' \leq M \Rightarrow \lambda m \leq \lambda f' \leq \lambda M \Rightarrow 1 - \lambda M \leq 1 - \lambda f' \leq 1 - \lambda m$, de plus

$|1 - \lambda M| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{13}{2}\lambda - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda < \frac{4}{13}$ et

$|1 - \lambda m| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - 5\lambda < 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda < \frac{2}{5}$,

donc $\max\limits_{[1,2]} |1 - \lambda f'| < 1$ si $0 < \lambda < \frac{4}{13}$.

1.4) Pour ces valeurs de $\lambda : 0 < \lambda < \frac{4}{13}$ le $\max\limits_{x \in [1,2]} |1 - \lambda f'(x)|$ est minimal en $\lambda_0 \in]0, \frac{4}{13}[$ lorsque $1 - \lambda_0 M = \lambda_0 m - 1$ (examiner le graphe de $\lambda \mapsto |1 - \lambda M|$ et $\lambda \mapsto |1 - \lambda m|$), ce qui donne

$$\lambda_0 = \frac{2}{M + m} = \frac{26}{69}.$$

1.5) $\varphi(x) = \dfrac{5 - \ln x}{x + 2}$, $\varphi'(x) = \dfrac{\ln x - \frac{2}{x} - 6}{(x+2)^2} < 0$, $\forall x \in [1,2]$, car le numérateur $N(x) = \ln x - \frac{2}{x} - 6$ est croissant et $N(1) = -8 < 0$ et $N(2) = \ln 2 - 7 < 0$, donc $N(x) < 0$, $\forall x \in [1,2]$, et alors

$$|\varphi'|(x) = \frac{6 + \frac{2}{x} - \ln x}{(x+2)^2},\quad |\varphi'|'(x) = -\frac{\frac{(x+2)^2}{x^2} + 2(6 + \frac{2}{x} - \ln x)}{(x+2)^3} < 0,\ \forall x \in [1,2], \text{ donc}$$

$\sup\limits_{[1,2]} |\varphi'| = |\varphi'(1)| = \frac{8}{9} < 1$. D'autre part,

$\varphi([1,2]) = [\varphi(2), \varphi(1)] = [\frac{5 - \ln 2}{4}, \frac{5}{3}] = [1.076\ldots, 1.666\ldots] \subset [1,2]$.

Par le théorème du point fixe, la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$; $x_0 \in [1,2]$ converge vers la racine α de $f(x) = 0$ car $x = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$, $\forall x \in [1,2]$.

1.6) $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x + 2 > 0$, $\forall x \in [1,2]$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{6 + x_n^2 - \ln x_n}{2 + 2x_n + 1/x_n}$, $n \geq 0$; $x_0 \in [1,2]$.
Cet algorithme converge $\forall x_0 \in [1,2]$ car

. $f \in C^2[1,2]$,
. $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [1,2]$,
. $f''(x) = 2 - \frac{1}{x^2} > 0$, $\forall x \in [1,2]$,
. $f(1)f(2) < 0$,
. $f'(1) = 5$, $f'(2) = \frac{13}{2}$,

donc $c = 1$, où $|f'(c)| = \min\{|f'(1)|, |f'(2)|\}$ et $|\dfrac{f(c)}{f'(c)}| \leq b - a \Leftrightarrow \dfrac{2}{5} \leq 1$. Le Théorème de convergence globale de l'algorithme de Newton implique que $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n) = \alpha,\ \forall x_0 \in [1, 2]$.

2.1) $\varphi'(x) = \dfrac{2 - \ln x}{(1 - \ln x)^2} > 0$, $\forall x < e^2$, φ est strictement croissante pour $x < e^2$, $x \neq e$ et $\alpha < 1$ donc

$$\varphi([0, \alpha]) = [\varphi(0), \varphi(\alpha)] = [0, \frac{\alpha}{1 - \ln \alpha}] \subset [0, \alpha],$$

en effet, $\dfrac{\alpha}{1 - \ln \alpha} < \alpha$ car $\alpha = e^{(1-\sqrt{5})/2} < 1$, donc $[0, \alpha]$ est stable par φ. D'autre part

$$L = \sup_{[0,\alpha]} |\varphi'| = \sup_{[0,\alpha]} \varphi' = \varphi'(\alpha) = 1,$$

en effet $\varphi''(x) = \dfrac{3 - \ln x}{x\,(1 - \ln x)^3} > 0$, $\forall x \in [0, \alpha]$, φ' est strictement croissante sur $[0, \alpha]$, donc

$$L = \varphi'(\alpha) = \frac{2 - \ln \alpha}{(1 - \ln \alpha)^2} = \frac{2 - (1 - \sqrt{5})/2}{(1 - (1 - \sqrt{5})/2)^2} = 1.$$

La fonction n'étant pas contractante, le théorème du point fixe n'est pas applicable à φ sur $[0, \alpha]$.

2.2) On distingue deux cas : $x_0 \in [0, \alpha[$ et $x_0 = \alpha$. Pour tout $x_0 \in [0, \alpha[$, il existe $0 < \alpha^* < \alpha$ tel que $x_0 \in [0, \alpha^*]$ et on applique le théorème du point fixe à φ sur $[0, \alpha^*]$. Comme $[0, \alpha^*] \subset [0, \alpha]$, on a

$$\varphi([0, \alpha^*]) = [\varphi(0), \varphi(\alpha^*)] = [0, \frac{\alpha^*}{1 - \ln \alpha^*}] \subset [0, \alpha^*], \text{ car } \frac{\alpha^*}{1 - \ln \alpha^*} < \alpha^*$$

pour les mêmes raisons qu'en 1). D'autre part,

$$L^* = \sup_{[0,\alpha^*]} |\varphi'| = \sup_{[0,\alpha^*]} \varphi' = \varphi'(\alpha^*) = \frac{2 - \ln \alpha^*}{(1 - \ln \alpha^*)^2} < 1$$

car φ' est strictement croissante sur $[0, \alpha^*]$, donc

$\alpha^* < \alpha \Rightarrow L^* = \varphi'(\alpha^*) < \varphi'(\alpha) = 1$ et φ est L^*-contractante sur $[0, \alpha^*]$,

donc $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge pour le x_0 choisi dans $[0, \alpha[$.

Maintenant, pour $x_0 = \alpha$, $x_1 = \varphi(x_0) = \dfrac{\alpha}{1 - \ln \alpha} < \alpha$, donc $x_1 < x_0$. Comme φ est croissante, on a $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall n$, donc x_n est décroissante et minorée par 0 car $x_0 \in [0, \alpha]$ et $[0, \alpha]$ est stable par φ, donc $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge pour tout $x_0 \in [0, \alpha]$.

La limite ℓ de (x_n) vérifie : $\ell = \varphi(\ell)$, donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$, mais $\ell = 1 \notin [0, \alpha]$ car $\alpha < 1$, donc $\ell = 0$.

3.1) $\Delta_n = x_n(x_n + x_{n+1}) - x_{n+1}^2 = x_n^2 + x_{n+1}(x_n - x_{n+1}) = x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = -\Delta_{n-1}$ et $\Delta_0 = x_0x_2 - x_1^2 = 1$, donc $\Delta_n = (-1)^n\Delta_0 = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3.2) $\left\{\begin{array}{l} x_{44} + x_{45} = x_{46} \\ x_{45} + x_{46} = x_{47} \end{array}\right. \Leftrightarrow Ax = b$, où $A = \begin{pmatrix} x_{44} & x_{45} \\ x_{45} & x_{47} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} x_{46} \\ x_{47} \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la solution du système pour $\varepsilon = 0$ car $\det A = \Delta_{44} = 1 \neq 0$ d'après la question 1).

La solution x_ε pour $\varepsilon \neq 0$ du système est $x_\varepsilon = A^{-1}b_\varepsilon = A^{-1}b + A^{-1}\delta b$ car $b_\varepsilon = b + \delta b$, où $b = (x_{46}, x_{47})^T$, $\delta b = (\varepsilon, -\varepsilon)^T$, donc (puisque $\det A = 1$)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{46} & -x_{45} \\ -x_{45} & x_{44} \end{pmatrix} \text{ et } x = x + A^{-1}\delta b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} x_{47} \\ -x_{46} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1836311903\varepsilon \\ 1 - 1134903170\varepsilon \end{pmatrix}.$$

On voit que $\delta x = x_\varepsilon - x = (1836311903\varepsilon, -1134903170\varepsilon)^T$, alors que $\delta b = b_\varepsilon - b = (\varepsilon, -\varepsilon)^T$, i.e. donc la solution x du système $Ax = b$ est très sensible aux perturbations sur les données. Par exemple si $\varepsilon = 10^{-3}$, $x_\varepsilon = (1836312.903, -1134902.170)^T$.

ENPEI. 3ème Année Préparatoire. 2004/2005

Epreuve de Synthèse d'Analyse Numérique

10/01/2005. Durée 02h

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie 1 : (05 = 01 + 02 + 02 pts)

1.1. Calculer $A^{(1)}$, $A^{(2)}$. En déduire la factorisation $A = LU$, $L_{ii} = 1$.
1.2. Résoudre $Ax = y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ par cette factorisation. En déduire A^{-1}.
1.3. Déterminer la factorisation $A = LDL^T$, $L_{ii} = 1$. En déduire la factorisation de Cholesky $A = RR^T$, $R_{ii} > 0$, où R est une matrice triangulaire inférireure.

Partie 2 : (06 = 01 + 01 + 02 + 02 pts)

2.1. Ecrire les algorithmes de Jacobi et Gauss-Seidel appliqués à $Ax = b$.
2.2. Montrer que ces algorithmes convergent.
2.3. Calculer J, $\|J\|_\infty$, $\rho(J)$ et $\mathcal{L}_1$, $\|\mathcal{L}_1\|_\infty$, $\rho(\mathcal{L}_1)$.
2.4. Pour $x^0 = (0,0,0)^T$ et $\varepsilon = 10^{-6}$, calculer les nombres d'itérations k_1 et k_2 à effectuer par ces deux algorithmes pour avoir respectivement :
$\|x^k - x\|_\infty \leq \varepsilon, \ \forall k \geq k_1$ par Jacobi et $\|x^k - x\|_\infty \leq \varepsilon, \ \forall k \geq k_2$ par Gauss-Seidel.

Partie 3 : (05 = 02 + 02 + 01 pts)

3.1. Calculer A^2 et déterminer sa factorisation de Cholesky $A^2 = R^T R$, où R est une matrice triangulaire supérieure.
3.2. Montrer que si $A = QR$, où R est la matrice de 3.1, alors $Q^T Q = I$.
3.3. Calculer Q.

Partie 4 : (04 = 02 + 01 + 01 pts)

4.1. Calculer $\det(A - \lambda I)$. En déduire $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ainsi que V^1, V^2, V^3 tels que $AV^k = \lambda_k V^k$, $k = 1,2,3$.
4.2. Déterminer une matrice U telle que $U^{-1}AU = \Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ et $U^{-1} = U^T$.
4.3. En déduire les formes $y_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telles que $x^T A x = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k y_k^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$.

Bonne chance !

Corrigé Synthèse Analyse Numérique 2004/2005

1.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1 \\ 0 & 0 & 8/5 \end{pmatrix}$.

$A = LU;\ \ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/5 & 1 \end{pmatrix}$, $U = A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1 \\ 0 & 0 & 8/5 \end{pmatrix}$.

1.2. $Lz = y \Rightarrow z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1/2 + y_2 \\ y_1/5 + 2y_2/5 + y_3 \end{pmatrix}$ et $Ux = z \Rightarrow x = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \\ 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \\ y_1 + 2y_2 + 5y_3 \end{pmatrix} = A^{-1}y$.

1.3. $A = LDL^T;\ \ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/5 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/5 \end{pmatrix}$,

$$R = LD^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5/2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{8/5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{5/2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2/5} & 2\sqrt{2/5} \end{pmatrix}.$$

2.1. $\begin{cases} x_1^{k+1} = \left(x_2^k + 1\right)/2 \\ x_2^{k+1} = \left(x_1^k + x_3^k + 2\right)/3 \\ x_3^{k+1} = \left(x_2^k + 1\right)/2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1^{k+1} = \left(x_2^k + 1\right)/2 \\ x_2^{k+1} = \left(x_1^{k+1} + x_3^k + 2\right)/3 \\ x_3^{k+1} = \left(x_2^{k+1} + 1\right)/2 \end{cases}$, $x^0 \in \mathbb{R}^3$ donné.

2.2. A est à diagonale strictement dominante $(2 > 1+0,\ 3 > 1+1,\ 2 > 0+1)$.

2.3. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/12 & 1/6 \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} \|J\|_\infty = 2/3,\ \rho(J) = 1/\sqrt{3} \\ \|\mathcal{L}_1\|_\infty = 1/2,\ \rho(\mathcal{L}_1) = 1/3 \end{matrix}$

En effet, $\det(J - \lambda I) = \lambda^3 - \lambda/3$ et $\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = \lambda^3 - \lambda^2/3$ (ou bien $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho^2(J)$).

2.4. Jacobi : $x^0 = (0,0,0)^T$, $x^1 = (1/2, 2/3, 1/2)^T$, $\|x^1 - x^0\|_\infty = 2/3$, $\varepsilon = 10^{-6}$,

$k \geq \ln\left(\dfrac{(1 - \|J\|_\infty)\varepsilon}{\|x^1 - x^0\|_\infty}\right) / \ln\|J\|_\infty = 35.782$, $k_1 = 36$.

Gauss-Seidel : $x^0 = (0,0,0)^T$, $x^1 = (1/2, 5/6, 11/12)^T$, $\|x^1 - x^0\|_\infty = 11/12$, $\varepsilon = 10^{-6}$,

$k \geq \ln\left(\dfrac{(1 - \|\mathcal{L}_1\|_\infty)\varepsilon}{\|x^1 - x^0\|_\infty}\right) / \ln\|\mathcal{L}_1\|_\infty = 20.806$, $k_2 = 21$.

3.1. $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 \\ -5 & 11 & -5 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} = R^TR;\ R = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{6} & -2\sqrt{6}/3 \\ 0 & 0 & 4\sqrt{2/15} \end{pmatrix}$.

3.2. $A = QR = A^T = R^TQ^T$, donc $R^TR = A^2 = A^TA = R^TQ^TQR$ qui donne $Q^TQ = I$.

3.3. $Q = AR^{-1} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{5} & \sqrt{6}/3 & \sqrt{30}/15 \\ 0 & -1/\sqrt{6} & \sqrt{30}/6 \end{pmatrix}$.

4.1. $\det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$,
$V^1 = (1,1,1)^T$, $V^2 = (-1,0,1)^T$, $V^3 = (1,-2,1)^T$.

4.2. $U = \left[\dfrac{V^1}{\|V^1\|_2}, \dfrac{V^2}{\|V^2\|_2}, \dfrac{V^3}{\|V^3\|_2}\right] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ car $\begin{matrix} \|V^1\|_2 = \sqrt{3} \\ \|V^2\|_2 = \sqrt{2} \\ \|V^3\|_2 = \sqrt{6} \end{matrix}$

U est la matrice de passage de $\{e^k\}$à $\{V^k/\|V^k\|_2\}$, elle vérifie $U^{-1}AU = \Lambda \Leftrightarrow A = U\Lambda U^T$ et $U^{-1} = U^T$ car A est symétrique et les vecteurs colonnes de U sont orthonormaux deux à deux.

4.3. $x^TAx = x^TU\Lambda U^Tx = (U^Tx)^T\Lambda(U^Tx) = y^T\Lambda y = \sum_{k=1}^3 \lambda_k y_k^2$ avec $y = U^Tx$, donc
$y_1(x) = (x_1 + x_2 + x_3)/\sqrt{3}$, $y_2(x) = (-x_1 + x_3)/\sqrt{2}$, $y_3(x) = (x_1 - 2x_2 + x_3)/\sqrt{6}$.

ENPEI. 3ème Année Préparatoire. 2004/2005
Epreuve de Rattrapage d'Analyse Numérique
13/06/2005. Durée 02h

Exercice 1 :

Soit f la fonction polynomiale définie par

$$f(x) = 120 - 600x + 600x^2 - 200x^3 + 25x^4 - x^5,\ x \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet cinq racines réelles strictement positives $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$.
2) Localiser ces racines dans des intervalles $[a, b]$ du type $[p, p+1]$, où $p \in \mathbb{N}$.
3) Calculer des approximations de ces racines à 10^{-6} près par la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ commençant en } x_0 = \frac{a+b}{2} \text{ pour chaque racine.}$$

Exercice 2 :

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \varepsilon > 0.$$

1) Ecrire les algorithmes de Jacobi, Gauss-Seidel appliqués à $Ax = b$.
2) Calculer les matrices de Jacobi J et Gauss-Seidel $\mathcal{L}_1$ associées à A.
3) Calculer $\rho(J)$ et déduire $\rho(\mathcal{L}_1)$ pour $\varepsilon \neq 1$ et $\varepsilon = 1$.
4) Montrer que ces algorithmes convergent.
5) Dans le cas où $\varepsilon = 1$, $x^0 = (0,0,0)^T$, $\varepsilon = 10^{-6}$, calculer les nombres d'itérations k_1, k_2 à effectuer pour avoir respectivement

$\|x^k - x\|_2 \leq \varepsilon,\ \forall k \geq k_1$ par l'algorithme de Jacobi,

$\|x^k - x\|_2 \leq \varepsilon,\ \forall k \geq k_2$ par l'algorithme de Gauss-Seidel,

(Choisir resp. $L = \rho(J),\ \rho(\mathcal{L}_1)$ dans la majoration $\|x^k - x\|_2 \leq \dfrac{L^k}{1-L}\|x^1 - x^0\|_2 \leq \varepsilon,\ \forall k \geq 1$).

Bonne chance !

Corrigé Rattrapage Analyse Numérique 2004/2005

1.1.

x	0	1	2	3	4	7	8	12	13
$f(x)$	120	−56	88	102	−104	−62	952	3288	−2948

1.2. $\alpha_1 \in [0,1]$, $\alpha_2 \in [1,2]$, $\alpha_3 \in [3,4]$, $\alpha_4 \in [7,8]$, $\alpha_5 \in [12,13]$.

1.3.

n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
0	0.5	0	1.500000	0	3.500000	0	7.500000	0	12.500000
1	0.1120181	1	1.413873	1	3.600294	1	7.140092	1	12.650750
2	0.2389630	2	1.413403	2	3.596431	2	7.087021	2	12.640850
3	0.2627551	3	1.413403	3	3.596426	3	7.085811	3	12.640800
4	0.2635594	4	1.413403	4	3.596426	4	7.085810	4	12.640800
5	0.2635603	5	1.413403	5	3.596426	5	7.085810	5	12.640800

$\alpha_1 = 0.263\,560\,3\ldots$, $\alpha_2 = 1.413\,403\ldots$, $\alpha_3 = 3.596\,426\ldots$, $\alpha_4 = 7.085\,810\ldots$, $\alpha_5 = 12.640\,800\ldots$

2.1. $\begin{cases} x_1^{k+1} = x_2^k + 1 \\ x_2^{k+1} = \left(x_1^k + x_3^k + 1\right)/2 \\ x_3^{k+1} = \left(x_2^k + 1\right)/(1+\varepsilon) \end{cases}$, $\begin{cases} x_1^{k+1} = x_2^k + 1 \\ x_2^{k+1} = \left(x_1^{k+1} + x_3^k + 1\right)/2 \\ x_3^{k+1} = \left(x_2^{k+1} + 1\right)/(1+\varepsilon) \end{cases}$, $x^0 \in \mathbb{R}^3$ donné.

2.2. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/(1+\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2\,(\varepsilon+1) & 1/2\,(\varepsilon+1) \end{pmatrix}$.

2.3. $\det(J - \lambda I) = \lambda^4 - \dfrac{\varepsilon+2}{2\,(\varepsilon+1)}\lambda$, $\rho(J) = \sqrt{\dfrac{\varepsilon+2}{2\,(\varepsilon+1)}}$. Si $\varepsilon = 1$, $\rho(J) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\rho(\mathcal{L}_1) = \rho^2(J) = \dfrac{\varepsilon+2}{2\,(\varepsilon+1)}$. Si $\varepsilon = 1$, $\rho(\mathcal{L}_1) = \dfrac{3}{4}$ car A est tridiagonale.

2.4. $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho^2(J) = \dfrac{\varepsilon+2}{2\,(\varepsilon+1)} < 1$ ou bien A est tridiagonale symétrique définie positive, car $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1 > 0$, $\Delta_4 = \varepsilon > 0$, Jacobi et Gauss-Seidel sont de même nature, donc ces deux algorithmes convergent.

2.5. Jacobi : $x^0 = (0,0,0)^T$, $x^1 = (1, 1/2, 1/2)^T$, $\|x^1 - x^0\|_2 = \sqrt{3/2}$, $\rho(J) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\varepsilon = 10^{-6}$,
$k \geq \ln\left(\dfrac{(1-\rho(J))\varepsilon}{\|x^1 - x^0\|_\infty}\right) / \ln \rho(J) = 111.430\,983\,9$, $k_1 = 112$.
Gauss-Seidel : $x^0 = (0,0,0)^T$, $x^1 = (1,1,1)^T$, $\|x^1 - x^0\|_2 = \sqrt{3}$, $\rho(\mathcal{L}_1) = 3/4$, $\varepsilon = 10^{-6}$,
$k \geq \ln\left(\dfrac{(1-\rho(\mathcal{L}_1))\varepsilon}{\|x^1 - x^0\|_2}\right) / \ln \rho(\mathcal{L}_1) = 54.751\,799\,20$, $k_2 = 55$.

ENPEI. 3ème Année Préparatoire. 2005/2006
Partiel d'Analyse Numérique
27/03/2006. Durée 02h
Barème : 4 + 6 + 6 + 4

Exercice 1 :

Soient $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $\varphi(x) = 1 + \sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$, $x \in [1, 2]$.

1) Montrer que l'itération $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers l'unique racine réelle α de $f(x) = 0$ pour tout $x_0 \in [1, 2]$.

2) Quel est le nombre d'itérations suffisantes à effectuer pour atteindre la précision $|x_n - \alpha| \leq 10^{-6}$ sachant que $x_0 = 1.5$

3) Comparer ce nombre avec celui qu'on devrait effectuer par la méthode de Dichotomie pour atteindre la même précision.

Exercice 2 :

Soient $F(x) = x - f(x) = 0$, $f(x) = \ln(x^2 + 4)$, $x \in \mathbb{R}$. On définit $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $|x_{n+1} - x_n| \leq \dfrac{C}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, où C est une constante à déterminer.

2) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)$ admet un point fixe unique s dans $[2, 3]$.

3) L'itération $x_{n+1} = f(x_n)$ est-elle convergente vers s pour tout $x_0 \in [2, 3]$?

4) Si $x_0 = 2$, montrer que $|x_n - s| \leq \dfrac{10^{-2}}{2^{n-4}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5) Pour $\varepsilon = 10^{-5}$, déterminer $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x_n - s| \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_1$.

6) Pour le même ε, déterminer $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x_n - s| \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_2$ par la méthode de Dichotomie. La valeur de n_2 est-elle prévisible par rapport à celle de n_1 ?

Exercice 3 :

1) Séparer les racines de l'équation $f(x) = \sin(95x) + \sqrt{1 - x^2} = 0$ situées dans l'intervalle $[0, 0.2]$.

2) Combien de racines l'équation $g(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7.54 = 0$ admet-elle dans l'intervalle $[-2, +2]$?

3) Montrer que l'équation $h(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 = 0$ admet 4 racines réelles positives $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$ que l'on localisera dans des intervalles de la forme $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{N}$.

4) Déterminer des approximations de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ à 10^{-6} près par la méthode de Newton commençant respectivement aux milieux des intervalles trouvés précédemment.

Exercice 4 :

Soit x un nombre réel et $fl(x)$ la représentation de x en base décimale par n chiffres significatifs exacts dont p est le premier chiffre de cette représentation (à gauche). Montrer que l'erreur relative due à cette représentation est inférieure à $1/(p \times 10^{n-1})$.

N.B. Les n chiffres significatifs exacts de x dans $fl(x)$ sont ceux qui vérifient $|x - fl(x)| \leq 0.5 \times 10^{-n}$.

Bonne Chance !

Corrigé Partiel Analyse Numérique 2005/2006

1.1. $x \mapsto f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 1 > 0$, donc $\exists \alpha \in]1,2[$: $f(\alpha) = 0$. De plus, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1) > 0$, $\forall x \in]1,2]$, donc α est unique. En fait, d'après le tableau de variations de f, on a : $f(x) < 0$, $\forall x \leq 1$ et f est strictement croissante pour $x > 1$, donc α est unique dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in [1,2]$, on a

a) $x = \varphi(x) \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{\dfrac{2}{x+1}} \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{\dfrac{2}{x+1}} \Leftrightarrow (x-1)^2 = \dfrac{2}{x+1}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1) = 2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, $\forall x \in [1,2]$. **(0.5 pt)**

$\varphi(x) = 1 + \sqrt{2}(x+1)^{-1/2}$, $\varphi'(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+1)^{-3/2}$, $\forall x \in [1,2]$, donc φ est décroissante sur $[1,2]$.

b) $\varphi([1,2]) = [\varphi(2), \varphi(1)] = \left[1 + \sqrt{2/3}, 2\right] \subset [1,2]$. **(0.5 pt)**

c) $|\varphi'(x)| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+1)^{-3/2}$, $|\varphi'|'(x) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{4}(x+1)^{-4/2} < 0$, donc

$\sup\limits_{[1,2]} |\varphi'| = |\varphi'(1)| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} 2^{-3/2} = \dfrac{1}{4} < 1$. **(0.5 pt)**

D'après a), b), c) $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers α pour tout $x_0 \in [1,2]$ en vertu du théorème du point fixe **(0.5 pt).**

1.2. $L = 1/4$, $\varepsilon = 10^{-6}$, $x_0 = 1.5$, $x_1 = \varphi(x_0) = 1.894427191\ldots$,

$n_0 = \left[\ln\left(\dfrac{(1-L)\varepsilon}{|x_1 - x_0|}\right) / \ln L\right] + 1 = [9.502] + 1 = 10.$

x_1 : **(0.25 pt),** formule de n_1 : **(0.25 pt),** n_0 : **(0.5 pt)**

1.3. $a = 1$, $b = 2$, $n_1 = \left[\ln\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right) / \ln 2\right] = [19.931] = 19$. On voit que $n_1 = 19 > n_0 = 10$ car $L = 1/4 < 1/2$. En fait, $n_1 \simeq 20 = 2n_0$ et $L = (1/2)^2$.

Calcul de n_1 : **05 pt,** Comparaison : **0.5 pt**

2.1. $f(x) = \ln(x^2 + 4)$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$, donc

$|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2|x|}{x^2+4} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4|x| \leq x^2 + 4 \Leftrightarrow (|x| - 2)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **(0.5 pt)**

$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})| \leq \dfrac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$

$\leq \dfrac{1}{2^2}|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \ldots \leq \dfrac{1}{2^n}|x_1 - x_0|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $C = |x_1 - x_0|$. **(0.5 pt)**

2.2. F est continue sur $[2,3]$, $F(2) = 2 - \ln 8 = -0.07944 < 0$, $F(3) = 3 - \ln 13 = 0.435 > 0$, il existe $s \in]2,3[$: $F(s) = 0 \Leftrightarrow s = f(s)$. $F'(x) = 1 - f'(x) > 0$ car $-1/2 \leq f'(x) \leq 1/2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donc s est unique. **(0.5 pt)**

2.3. On applique le théorème du point fixe à f sur le fermé $I = [2,3]$. f est $\frac{1}{2}$-contractante sur I d'après (2.1) car f est dérivable et $|f'| \leq 1/2$ sur I. D'autre part

$f(I) = [f(2), f(3)] = [\ln 8, \ln 13] = [2.079\ldots, 2.564\ldots] \subset I$

car f est strictement croissante sur I, donc I est stable par f. La convergence de $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $x_0 \in I$ découle du théorème du point fixe.

Stabilité : **(0.5 pt),** Contraction : **(0.5 pt),** Convergence : **(0.5 pt)**

2.4. On a $|x_n - s| \leq \dfrac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, où $L = 1/2$, $x_0 = 2$, $x_1 = f(x_0) = \ln 8$, comme $|x_1 - x_0| = |\ln 8 - 2| = 0.0794\ldots \leq 0.08 = 2^3 \times 10^{-2}$, il vient

$$|x_n - s| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \le \frac{(1/2)^n}{1-1/2} \times 2^3 \times 10^{-2} = \frac{10^{-2}}{2^{n-4}},\ \forall n \ge 1. \quad \textbf{(01 pt)}$$

2.5. On a $|x_n - s| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \le \varepsilon \Rightarrow n \ge \ln\left(\frac{(1-L)\varepsilon}{|x_1 - x_0|}\right)/\ln L.$

Pour $L = 1/2,\ \varepsilon = 10^{-5},\ x_0 = 2,\ x_1 = \ln 8$, on trouve $n \ge 13.955$, donc $n_1 = 14$. **(01 pts)**

(Avec la majoration $\frac{10^{-2}}{2^{n-4}} \le 10^{-5}$, on trouve $n \ge 4 + 3\ln 10/\ln 2 = 13.965$, donc le même n_1).

2.6. Par la dichotomie, on a $|x_n - s| \le \frac{b-a}{2^{n+1}} \le \varepsilon \Rightarrow n + 1 \ge \ln\frac{b-a}{\varepsilon}/\ln 2.$

Comme $a = 2,\ b = 3,\ \varepsilon = 10^{-5}$, on trouve $n \ge 5\ln 10/\ln 2 - 1 = 15.609$, donc $n_2 = 16$. La valeur de n_2 est prévue proche de n_1 sans calcul car $L = 1/2$. **(01 pt)**

Pour $x_0 = 2.5$, cette comparaison est encore plus prévisible, on trouve $x_1 = \ln(10.25)$ et $n \ge 15.076$, donc $n_1 = n_2 = 16$.

3.1. $f(x) = \sin(95x) + \sqrt{1-x^2},\ x \in [0, 0.2]$. On utilise les racines de $\sin(95x) = 0$ dans $[0, 0.2]$ pour esquisser un tracé du graphe de $x \mapsto \sin(95x)$ et son intersection avec $x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$ (le quart du cercle).

$$\sin(95x) = 0 \Rightarrow 95x = k\pi \Rightarrow x_k = k\pi/95,\ k \in \mathbb{N}.$$
$$x_k \in [0, 0.2] \Leftrightarrow 0 \le k\pi/95 \le 0.2 \Leftrightarrow 0 \le k \le 19/\pi = 6.047,$$

Donc $\sin(95x) = 0$ admet 7 racines $x_k = k\pi/95,\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. On voit, d'après l'intersection du graphe de $x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$ avec celui de $x \mapsto \sin(95x)$, que $f(x) = 0$ admet 6 racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ dans $[0, 0.2]$ telles que:

$$\alpha_1, \alpha_2 \in]x_1, x_2[,\ \alpha_3, \alpha_4 \in]x_3, x_4[,\ \alpha_5, \alpha_6 \in]x_5, x_6[.$$

On sépare ces racines en prenant les milieux respectifs x_{12}, x_{34}, x_{56} de $]x_1, x_2[,\ ]x_3, x_4[,\ ]x_5, x_6[$. On obtient alors le tableau des valeurs de f aux points $x_1, x_{12}, x_2, x_3, x_{34}, x_4, x_5, x_{56}, x_6$

x	$f(x)$
$3.306939635 \times 10^{-2}$	0.9994530583
$4.960409453 \times 10^{-2}$	$-1.231040828 \times 10^{-3}$
$6.613879271 \times 10^{-2}$	0.9978104332
$9.920818906 \times 10^{-2}$	0.9950666990
0.1157428872	$-6.720792495 \times 10^{-3}$
0.1322775854	0.9912127106
0.1653469818	0.9912127106
0.1818816800	-0.0166795769
0.1984163781	0.9801178179

En définitive

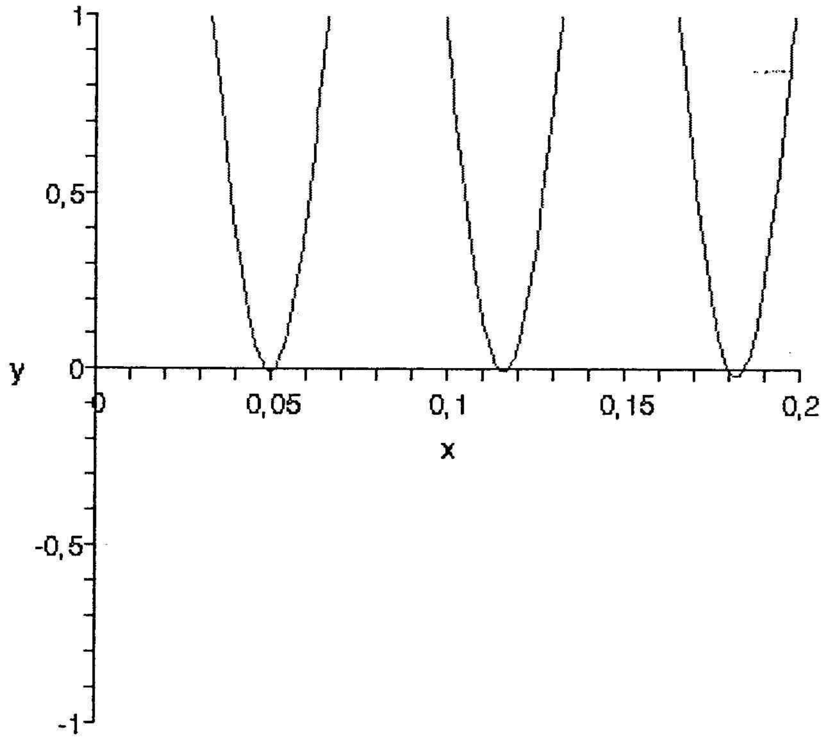
$$\alpha_1 \in]x_1, x_{12}[=]\pi/95, 3\pi/190[,\ \alpha_2 \in]x_{12}, x_2[=]3\pi/190, 2\pi/95[,\ \alpha_3 \in]x_3, x_{34}[=]3\pi/95, 7\pi/190[,$$
$$\alpha_4 \in]x_{34}, x_4[=]7\pi/190, 4\pi/95[,\ \alpha_5 \in]x_5, x_{56}[=]5\pi/95, 11\pi/190[,\ \alpha_6 \in]x_{56}, x_6[=]11\pi/190, 6\pi/95[.$$

Les intervalles trouvés ne sont pas obligatoires, ils peuvent varier d'un étudiant à un autre. Par exemple, on peut trouver

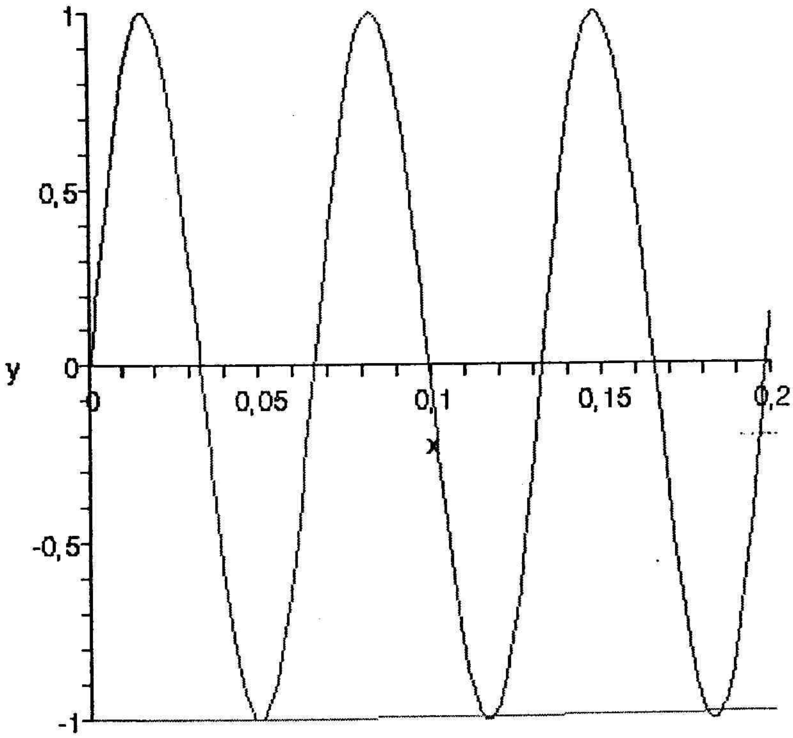
x	$f(x)$
4.5×10^{-2}	9.3126506×10^{-2}
5×10^{-2}	$-5.4357277 \times 10^{-4}$
5.5×10^{-2}	0.1270191
0.11	0.1391014
0.115	$-4.1453009 \times 10^{-3}$
0.12	7.3446095×10^{-2}
0.175	0.1907674
0.18	$-3.9778312 \times 10^{-4}$
0.185	2.6296590×10^{-2}

ou

x	$f(x)$
1.653468×10^{-2}	1.999863
4.960405×10^{-2}	-1.231015×10^{-3}
8.267342×10^{-2}	1.996577
0.1157428	-6.720781×10^{-3}
0.1488122	1.988865
0.1818815	-1.667953×10^{-2}
0.2	1.129673107



Fonction $x \mapsto \sin(95x) + \sqrt{1 - x^2}$



Fonctions $x \mapsto \sin(95x)$ et $x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$

Ces valeurs sont données à titre indicatif, l'essentiel est de trouver six changements de signe de f;

0.5 pt par racine **(3 pts = 0.5 × 6)**

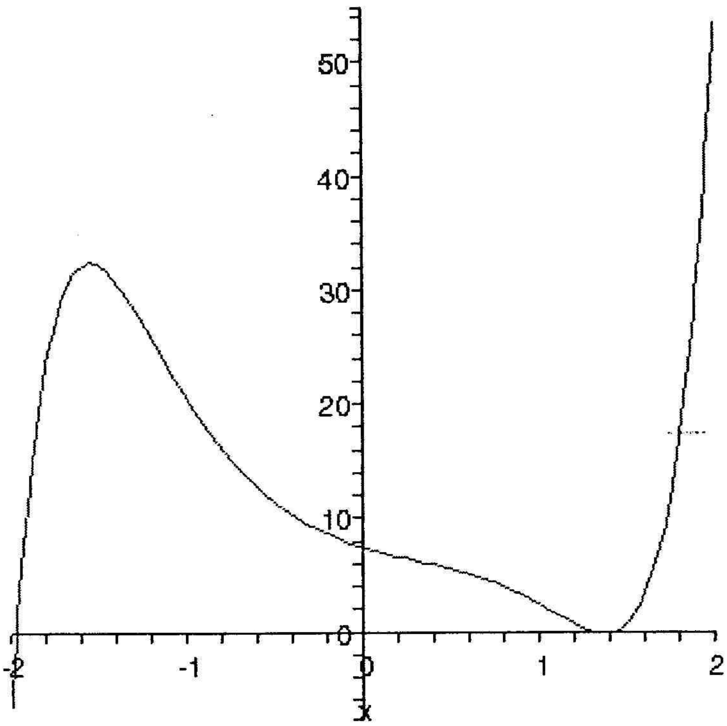
3.2. On choisit quelques points pour esquisser le tracé du graphe de $x \mapsto g(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7.54$ et voir son intersection avec l'axe des x. Les intervalles disjoints localisant les trois racines dans $[-2, +2]$ ne sont pas uniques. On donne ici quelques exemples de valeurs de g.

x	$g(x)$
-2	-6.46
-1	20.54
0	7.54
1	2.54
1.4	-0.0671296
2	53.54

x	$g(x)$
-1.98	-2.032232
-1.97	4.1663412×10^{-2}
1.31	1.4865808×10^{-2}
1.32	$-2.2617916 \times 10^{-2}$
1.41	$-3.3593133 \times 10^{-2}$
1.42	1.0408521×10^{-2}

x	$g(x)$
-2	-6.46
-1.9	12.1918061
1.25	0.345480957
1.35	$-9.704093516 \times 10^{-2}$
1.45	0.2111227414

On trouve 3 racines de $g(x) = 0$ dans $[-2, +2]$.



Fonction $x \mapsto x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7.54$

Il faut trouver trois changements de signe de g
0.25 pt par racine **(0.75 pts = 0.25 × 3)**

3.3. $x \mapsto h(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et change de signe comme l'indique la table

x	0	1	2	4	5	9	10
$h(x)$	24	-15	8	24	-120	-111	264

Donc $\exists \alpha_1 \in]0,1[$, $\exists \alpha_2 \in]1,2[$, $\exists \alpha_3 \in]4,5[$, $\exists \alpha_4 \in]9,10[$ tels que $f(\alpha_i) = 0$, $i = 1,2,3,4$, avec $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$. **(0.75 pt)**

3.4. $h(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$, $h'(x) = 4\left(x^3 - 12x^2 + 36x - 24\right)$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)} = \dfrac{72x_n^2 - 32x_n^3 + 3x_n^4 - 24}{4\left(36x_n - 12x_n^2 + x_n^3 - 24\right)} \\ x_0 = 0.5 \vee x_0 = 1.5 \vee x_0 = 4.5 \vee x_0 = 9.5 \end{cases}, \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

n	$x_n \to \alpha_1$	$x_n \to \alpha_2$	$x_n \to \alpha_3$	$x_n \to \alpha_4$
0	0.5	1.5	4.5	9.5
1	0.2764085	1.772059	4.537162	9.399695
2	0.3204643	1.745897	4.536621	9.395081
3	0.3225431	1.745761	4.536620	9.395071
4	0.3225477	1.745761	4.536620	9.395071
5	0.3225477	1.745761	4.536620	9.395071

0.25 pt par racine **(1 pt = 0.25 × 4)**

4. Soit m le nombre de chiffres après la virgule de la représentation de x, p le premier chiffre cette représentation, E_a l'erreur absolue et E_r l'erreur relative. On a

$x = a_1a_2\ldots a_{n-m}.b_1b_2\ldots b_m\ldots,\qquad fl(x) = a_1a_2\ldots a_{n-m}.b_1b_2\ldots b_m,\qquad a_1 = p \geq 1,\qquad n > 1$

$E_a \leq 0.5 \times 10^{-m}$,

donc

$x \geq p \times 10^{n-m-1}$ **(1 pt)**

$x > p \times 10^{n-m-1} - 0.5 \times 10^{-m}$, **(1 pt)**

donc

$$E_r < \frac{0.5 \times 10^{-m}}{p \times 10^{n-m-1} - 0.5 \times 10^{-m}} = \frac{0.5}{p \times 10^{n-1} - 0.5} = \frac{1}{2p \times 10^{n-1} - 1} < \frac{1}{p \times 10^{n-1}} \qquad \textbf{(1 pt)}$$

car

$2p \times 10^{n-1} - 1 > p \times 10^{n-1}$ pour tout $n > 1$ **(1 pt)**

Ecole Nationale Préparatoire aux Etudes d'Ingéniorat
Analyse Numérique. 3ème Année. 2005/2006
Epreuve de Synthèse
22 Mai 2006. Durée 02h

Exercice 1 : 05 pts = 2 + 1 + 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 17 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer la factorisation de Doolittle $A = LU$, $L_{ii} = 1$.
2) En déduire la factorisation $A = LDL^T$, $L_{ii} = 1$.
3) Montrer que A est définie positive et déduire de 2) sa factorisation de Cholesky $A = RR^T$.

Exercice 2 : 05 pts = 2 + 1 + 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 6 & -5 \\ 0 & 2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le système triangulaire $A^{(3)}x = y^{(3)}$ obtenu à la 3ème étape d'élimination de Gauss.
2) Déterminer la factorisation $A = LU$, $L_{ii} = 1$.
3) Montrer que $y^{(3)} = L^{-1}y$, en déduire L^{-1} à partir de 1).

Exercice 3 : 05 pts = 1 + 1 + 2 + 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ -6 & 4 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Triangulariser le système $Ax = b$ par la méthode de Gauss ordinaire.
2) Pour quelles valeurs de α la matrice A admet-elle une factorisation $A = LU$, $L_{ii} = 1$. Déterminer cette factorisation.
3) Résoudre le système $Ax = b$ par cette factorisation.
4) Que représente x pour la matrice A^{-1}. Justifier !

Exercice 4 : 05 pts = 2 + 1 + 1 + 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$.

La triangularisation gaussienne de A est équivalente à la multiplication de A par un certain de nombre de matrices inversibles E_k, $k = 1, 2, 3$.
1) Déterminer ces matrices E_k, $k = 1, 2, 3$.
2) En déduire la factorisation $A = LU$ de Doolittle.
3) Résoudre le système $Ax = b$ par cette factorisation.

Corrigé Synthèse Analyse Numérique 2005/2006

Exercice 1 : 05 pts = 2 + 1 + 2

1) $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 17 \end{pmatrix}$, $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 17 \end{pmatrix}$, $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = U$,

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{(3)} = U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

2) A symétrique $\Rightarrow A = LU = LDL^T$, où $D = diag\{1,4,9,16\}$, $D^{1/2} = diag\{1,2,3,4\}$.

3) $\Delta_1 = 1 > 0,\ \Delta_2 = 2 > 0,\ \Delta_3 = 3 > 0,\ \Delta_4 = 24 > 0$, donc A est S.D.P

$A = RR^T$, où $R = LD^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : 05 pts = 2 + 1 + 2

1) Soit $\tilde{A} = (A|b)$, $\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & y_1 \\ -1 & 3 & -3 & 2 & y_2 \\ 1 & -3 & 6 & -5 & y_3 \\ 0 & 2 & -5 & 9 & y_4 \end{pmatrix}$, $\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & y_1 + y_2 \\ 0 & -2 & 5 & -5 & -y_1 + y_3 \\ 0 & 2 & -5 & 9 & y_4 \end{pmatrix}$,

$\tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -y_1 - y_2 + y_4 \end{pmatrix}$, $\tilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -y_1 + y_3 + y_4 \end{pmatrix}$.

$\tilde{A}^{(3)} = (A^{(3)}|y^{(3)})$, donc $A^{(3)}x = y^{(3)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \\ y_2 + y_3 \\ -y_1 + y_3 + y_4 \end{pmatrix}$

2) $A = LU$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3) $Ax = y \Leftrightarrow LUx = y \Leftrightarrow Ux = L^{-1}y$ et $A^{(3)}x = y^{(3)} \Leftrightarrow Ux = y^{(3)}$, donc $y^{(3)} = L^{-1}y$

D'après 1) $y^{(3)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \\ y_2 + y_3 \\ -y_1 + y_3 + y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} y$, d'où $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : 05 pts = 1 + 1 + 2 + 1

1) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -6 & 4 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & \alpha & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha - 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$,

$\tilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. On a $A^{(3)}x = b^{(3)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

2) $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque, $A = LU$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/4 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

3) $Ly = b \Rightarrow y = (1, 2, 0, -1/2)^T$ et $Ux = y \Rightarrow x = (4/3, 1, 0, -1)^T$.

4) $x = (4/3, 1, 0, -1)^T$ est la 1ère colonne de A^{-1} car $b = e^1$ et $Ax = e^1 \Leftrightarrow x = A^{-1}e^1$ et $A^{-1}e^1$ est la 1ère colonne de A^{-1}.

Exercice 4 : 05 pts = 2 + 2 + 1

1) $\begin{cases} A^{(1)}x = b^{(1)} \Leftrightarrow E_1Ax = E_1b \\ A^{(2)}x = b^{(2)} \Leftrightarrow E_2A^{(1)}x = E_2b^{(1)} \\ A^{(3)}x = b^{(3)} \Leftrightarrow E_3A^{(2)}x = E_3b^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^{(1)} = E_1A \\ A^{(2)} = E_2A^{(1)} = E_2E_1A \\ A^{(3)} = E_3A^{(2)} = E_3E_2E_1A \end{cases}, \begin{cases} b^{(1)} = E_1b \\ b^{(2)} = E_2E_1b \\ b^{(3)} = E_3E_2E_1b \end{cases}$

$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}$.

Si on raisonne par coefficients, i.e. on considérant une matrice de transformation T_k pour chaque coefficient à éliminer, il faudra déterminer 6 matrice T_k, $k = \overline{1,6}$ telles que $T_3T_2T_1 = E_1$, $T_5T_4 = E_2$, $T_6 = E_3$. Ces matrices T_k sont données par

$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $T_5 = I$, on a en réalité 5 matrices T_k, $k = \overline{1,6}$, $k \neq 5$ telles que $T_3T_2T_1 = E_1$, $T_4 = E_2$, $T_6 = E_3$. Les inverses des T_k sont simples à déterminer

$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$T_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$. $L = T_1^{-1}T_2^{-1}T_3^{-1}T_4^{-1}T_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $U = A^{(3)} = E_3E_2E_1A \Rightarrow A = LU$; $L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $Ly = b \Rightarrow y = (4, -2, 2, -1/2)^T$, $Ux = y \Rightarrow x = (1, 1, -1, -1)^T$.

Partiel de Rattrapage d'Analyse Numérique
ENPEI 2005/2006

Exercice 1 : 05 pts

Soient les deux équations $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$, $g(x) = x^3 + 2x - 1 = 0$, $x \in [0, 1]$.

1) Montrer que $f(x) = 0$ admet une racine et une seule $\alpha \in [0, 1]$ et $g(x) = 0$ admet une racine et une seule $\beta \in [0, 1]$.

2) Montrer que les itérations $x_{n+1} = 1/(x_n^2 + 1)$ et $x_{n+1} = 1/(x_n^2 + 2)$ convergent respectivement vers α et β pour tout $x_0 \in [0, 1]$.

3) Quel est le nombre d'itérations n_1 à effectuer par $x_{n+1} = 1/(x_n^2 + 1)$; $x_0 = 0.5$ pour avoir
$|x_n - \alpha| \leq 10^{-3}$, $\forall n \geq n_1$
et le nombre d'itérations n_2 à effectuer par $x_{n+1} = 1/(x_n^2 + 2)$; $x_0 = 0.5$ pour avoir
$|x_n - \beta| \leq 10^{-3}$, $\forall n \geq n_2$.

4) Comparer n_1 et n_2 avec le nombre d'itérations N à effectuer par dichotomie pour approcher α et β avec la même précision.

5) Peut-on prévoir d'après 2) que $n_2 < N < n_1$? Justifier.

Exercice 2 : 05 pts

Soit l'équation $f(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6$, $x > 0$

1) Montrer que $f(x) = 0$ admet trois racines α, β, γ strictement positives tels que $0 < \alpha < \beta < \gamma$. Localiser ces racines dans des intervalles du type $[p, p+1]$, $p \in \mathbb{N}$.

2) Quel est le nombre n_0 d'itérations à effectuer par dichotomie pour approcher ces racines à 10^{-3} près.

3) Soit $\varphi(x) = \dfrac{1}{18}\left(6 + 9x^2 - x^3\right)$, $x > 0$. Montrer que l'itération $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers α pour tout x_0 appartenant à l'intervalle $[p, p+1]$ trouvé en 1) contenant α.

4) Quel est le nombre n_1 d'itérations à effectuer par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour avoir $|x_n - \alpha| \leq 10^{-3}$, $\forall n \geq n_1$ sachant que x_0 est le milieu de l'intervalle $[p, p+1]$ trouvé en 1).

5) Comparer n_0 et n_1 et expliquer pourquoi la méthode de dichotomie converge plus vite.

Exercice 3 : 10 pts

Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet quatre racines réelles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

2) Localiser $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ puis en donner des valeurs approchées à 10^{-6} près par l'algorithme de Newton.

3) En posant $x = t + 1/2$ dans $f(x) = 0$, montrer que cette équation se réduit à $t^4 + at^2 + bt + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont à calculer.

4) En utilisant la factorisation $t^4 + at^2 + bt + c = (t^2 + \alpha t + \beta)(t^2 + \lambda t + \mu)$, déterminer le système non-linéaire vérifié par $\alpha, \beta, \lambda, \mu$.

5) Montrer que λ est solution d'une équation polynomiale de degré 6 à trouver.

6) En posant $s = \lambda^2$, montrer qu'on se ramène à une équation polynomiale du 3-ème degré. Montrer que les racines exactes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont données, à l'ordre près, par

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) = 3.520\,147\,021\ldots,$$
$$\alpha_2 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) = -0.284\,079\,043\,8\ldots,$$
$$\alpha_3 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}) = 0.557\,536\,515\,8\ldots,$$
$$\alpha_4 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}) = -1.793\,604\,493\ldots$$

Bonne Chance !

Ecole Nationale Préparatoire aux Etudes d'Ingéniorat
Analyse Numérique. 3ème Année. 2005/2006
Epreuve de Rattrapage

Exercice 1 : 05 pts = 2 + 1 + 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 17 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 38 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 67 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la factorisation de Crout $A = LU,\ U_{ii} = 1$.
2) En déduire la factorisation $A = U^T DU,\ U_{ii} = 1$.
3) Montrer à partir de 2) que $x^T Ax = \sum_{k=1}^{4} a_{kk}^{(k-1)} \varphi_k^2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^4$, où $a_{kk}^{(k-1)},\ k = 1,2,3,4$ sont les pivots de Gauss et $\varphi_k(x),\ k = 1,2,3,4$ sont des formes linéaires indépendantes à déterminer.

Exercice 2 : 05 pts = 2 + 1 + 1 + 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 2 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 1 & \alpha/2 & \alpha/3 \\ 1/3 & 2/3 & \alpha/3 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$, où $\alpha, b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$.

1) Triangulariser le système $Ax = b$ par la méthode de Gauss ordinaire et indiquer pour quelles valeurs de α cette triangularisation est possible.
2) En déduire la factorisation $A = LU,\ L_{ii} = 1$.
3) Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle définie positive.
4) Donner alors sa décomposition de Cholesky $A = RR^T$.

Exercice 3 : 04 pts = 2 + 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varepsilon > 0.$

1) Résoudre $Ax = y \in \mathbb{R}^n$. En déduire A^{-1}.
2) Calculer $Cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.

Exercice 4 : 06 pts = 1 + 2 + 1 + 1 + 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est symétrique définie positive.
2) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ de A et les vecteurs propres associés V_1, V_2, V_3, V_4.
   Indication : $\det(A - \lambda I) = \lambda^4 - 12\lambda^3 + 47\lambda^2 - 72\lambda + 36$ et $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$.
3) Si $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3\}$, déterminer $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = P\Lambda P^{-1}$.
4) En déduire $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle $Q^{-1} = Q^T$ et $A = Q\Lambda Q^{-1}$.
5) Quelles sont alors les formes linéaires indépendantes $\psi_k(x),\ k = 1,2,3,4$ vérifiant
   $x^T Ax = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \psi_k^2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^4$.

Bonne Chance !

Corrigé Rattrapage Analyse Numérique 2005/2006

Exercice 1 : 05 pts = 2 + 1 + 2

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 17 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 38 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 67 \end{pmatrix}$, $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 16 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 37 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & 66 \end{pmatrix}$, $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 16 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 36 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 65 \end{pmatrix}$,

$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 16 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 36 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} \Rightarrow A = L'U'$, $L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}$, $U' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 16 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 36 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$.

Il vient : $A = A^T = U'^T L'^T = LU$; $L = U'^T$, $U = L'^T$, $U_{ii} = 1$

2) $A = LU$, $U_{ii} = 1$ et $L = U^T D$ implique $A = U^T D U$; $D = diag\{4, 16, 36, 64\} = diag\left\{a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, a_{44}^{(3)}\right\}$.

3) $x^T A x = x^T U^T D U x = (Ux)^T D (Ux) = \varphi^T D \varphi$; $\varphi = Ux$. Donc

$x^T A x = \sum_{k=1}^{4} a_{kk}^{(k-1)} \varphi_k^2(x) = 4\varphi_1^2(x) + 16\varphi_2^2(x) + 36\varphi_3^2(x) + 64\varphi_4^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$,

$\varphi_1(x) = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{2}$, $\varphi_2(x) = x_2 + \frac{x_3}{4} + \frac{x_4}{4}$, $\varphi_3(x) = x_3 + \frac{x_4}{6}$, $\varphi_4(x) = x_4$.

Les formes linéaires $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, 3, 4$ sont indépendantes, car $\varphi_k(x) = 0$, $k = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow x = 0$.

Exercice 2 : 05 pts = 2 + 1 + 1 + 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 2 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 1 & \alpha/2 & \alpha/3 \\ 1/3 & 2/3 & \alpha/3 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$, où $\alpha, b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$.

1) $A^{(3)}x = b^{(3)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & (\alpha-1)/2 & (\alpha-1)/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha/9+1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 + b_2 \\ -b_2/2 + b_3 \\ -2b_3/3 + b_4 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 1$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 2 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 1 & \alpha/2 & \alpha/3 \\ 1/3 & 2/3 & \alpha/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & (\alpha-1)/2 & (\alpha-1)/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha/9+1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 1$.

3) $(\alpha - 1)/2 > 0$ et $-2\alpha/9 + 1 > 0$, donc $\alpha \in]1, 9/2[$.

4) $D^{1/2} = diag\left\{1, 1, \sqrt{(\alpha-1)/2}, \sqrt{(9-2\alpha)/3}\right\}$

$$A = RR^T;\ R = LD^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{(\alpha-1)/2} & 0 \\ 1/3 & 1/3 & \frac{1}{3}\sqrt{2(\alpha-1)} & \sqrt{(9-2\alpha)/3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : 04 pts = 2 + 2

1) $Ax = y \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\varepsilon)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = y_1 \\ x_1 + (1+\varepsilon)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = y_2 \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1+\varepsilon)x_n = y_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+\varepsilon)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = y_1 \\ -\varepsilon x_1 + \varepsilon x_2 = y_2 - y_1 \\ \cdots \\ -\varepsilon x_1 + \varepsilon x_n = y_n - y_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (1+\varepsilon)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = y_1 \\ x_2 = x_1 + (y_2 - y_1)/\varepsilon \\ \cdots \\ x_n = x_1 + (y_n - y_1)/\varepsilon \end{cases}$

La 1ère équation donne :

$y_1 = (1+\varepsilon)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = (1+\varepsilon)x_1 + (n-1)x_1 + (y_2 + y_3 + \ldots + y_n - (n-1)y_1)/\varepsilon$,

donc
$(n+\varepsilon)\,x_1 = ((n-1+\varepsilon)\,y_1 - y_2 - y_3 - \ldots - y_n)\,/\varepsilon$
et alors

$$\begin{cases} x_1 = ((n-1+\varepsilon)\,y_1 - y_2 - y_3 - \ldots - y_n)\,/\,(\varepsilon\,(n+\varepsilon)) \\ x_2 = (-y_1 + (n-1+\varepsilon)\,y_2 - y_3 - \ldots - y_n)\,/\,(\varepsilon\,(n+\varepsilon)) \\ x_3 = (-y_1 - y_2 + (n-1+\varepsilon)\,y_3 - \ldots - y_n)\,/\,(\varepsilon\,(n+\varepsilon)) \\ \ldots \\ x_n = (-y_1 - y_2 - y_3 - \cdots - y_{n-1} + (n-1+\varepsilon)\,y_n)\,/\,(\varepsilon\,(n+\varepsilon)) \end{cases}$$. Donc

$$Ax = y \Leftrightarrow x = A^{-1}y \text{ avec } A^{-1} = \frac{1}{\varepsilon\,(n+\varepsilon)} \begin{pmatrix} n-1+\varepsilon & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1+\varepsilon & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

2) $\|A\|_\infty = n+\varepsilon,\ \|A^{-1}\|_\infty = \dfrac{2\,(n-1)+\varepsilon}{\varepsilon\,(n+\varepsilon)} \Rightarrow Cond_\infty(A) = 1 + \dfrac{2\,(n-1)}{\varepsilon}.$

Exercice 4 : 06 pts = 1 + 2 + 1 + 1 + 1

1) A est symétrique, $\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = 7 > 0,\ \Delta_3 = 24 > 0,\ \Delta_4 = 36 > 0$, donc A est S.D.P

2) $\det(A-\lambda I) = \lambda^4 - 12\lambda^3 + 47\lambda^2 - 72\lambda + 36 = (\lambda-1)\,(\lambda-2)\,(\lambda^2 - 9\lambda + 18)$, donc $\lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = 6$.

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \\ \lambda_4 = 6 \end{cases},\ V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3) $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ P = [V_1, V_2, V_3, V_4] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $\Lambda = P^{-1}AP$.

4) $Q = \left[\dfrac{V_1}{\|V_1\|_2}, \dfrac{V_2}{\|V_2\|_2}, \dfrac{V_3}{\|V_3\|_2}, \dfrac{V_4}{\|V_4\|_2}\right] = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{10} & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} & 0 & -1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ vérifie aussi

$\Lambda = Q^{-1}AQ$ et $Q^T = Q^{-1}$ car les vecteurs colonnes de Q sont orthonormaux 2 à 2.

5) $A = Q\Lambda Q^T \Rightarrow x^T A x = x^T Q \Lambda Q^T x = \left(Q^T x\right)^T \Lambda \left(Q^T x\right) = \psi^T \Lambda \psi = \sum_{k=1}^4 \lambda_k \psi_k^2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^4;$

$\psi = Q^T x$. Donc

$\psi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\left(2\,(x_1 + x_4) - (x_2 + x_3)\right),\ \psi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(x_1 - x_4),\ \psi_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(x_2 - x_3),$

$\psi_4 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\,(x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4).$

Les formes linéaires $\psi_k(x),\ k = 1,2,3,4$ sont indépendantes, car $\varphi_k(x) = 0,\ k = 1,2,3,4 \Rightarrow x = 0.$