Contrôle Final du Module Analyse Numérique
Session de Janvier 2016. De : 10h30 à 12h

Exercice 1 ***(4 pt.)*** *Donner la décomposition LU de la matrice A suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système $Ax = b$ où $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 ***(6 pt.)*** *On donne la fonction $f(x) = x^2 + x - 1$, on veut approcher son zéro positif $x_{exacte} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803$.*

1. *En partant de $a_0 = 0.5$ et $b_0 = 1$. Donner les deux premiers intervalles obtenus en utilisant la méthode, de dichotomie et de Lagrange et préciser l'erreur dans chaque itération.*
2. *En prenant $x_0 = 1$, donner les deux premières itérations obtenues en utilisant la méthode de Newton et préciser l'erreur dans chaque itération.*

Exercice 3 ***(4 pt.)*** *Donner le polynôme interpolant la fonction f aux points $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(1, -1)$ et $(2, 5)$ en utilisant*

1. *la base de Lagrange*
2. *la méthode des fraction divisées de Newton*

Exercice 4 ***(6 pt.)*** *Soit* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

1. *Rappeler les formules composites du point milieu, des trapèzes et de simpson ainsi que l'erreur commise dans chacune des méthodes,*
2. *Combien faut-il de subdivisions de $[0, 1]$ pour évaluer I à 10^{-3} près en utilisant la méthode de Simpson*
3. *Donner la valeur approchée de I, par la méthode de Simpson composite en utilisant la subdivision $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.*
4. *Quelle est alors l'ordre de l'erreur commise ?*

Corrigé du contrôle Final du Module Analyse Numérique Session de Janvier 2016. De : 10h30 à 12h

---

Corrigé de l'exercice 1 ***(4 pt.)*** *On suivant l'algorithme on obtient*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(1)} = L_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & 4 \end{pmatrix},$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = L_2 A^{(1)} = L_2 L_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\textbf{\textit{(1 pt.)}} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ \textit{et } U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \textbf{\textit{(1 pt.)}}$$

On a bien,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = LU$$

Pour résoudre le système $Ax = b$, on résout le système échelonné $Ly = b$ et $Ux = y$ successivement. Donc,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 & = 3 \\ 2y_1 + y_2 & = 5 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 & = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = -6 \end{cases} \quad \textbf{\textit{(1 pt.)}}$$

Puis,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 & = 3 \\ 4x_2 + x_3 & = -1 \\ 6x_3 & = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases} \quad \textbf{\textit{(1 pt.)}}$$

Finalement on a bien

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 2 *On pose $f(x) = x^2 + x - 1$*

1. *Pour la première itération de la dichotomie, on pose $a_0 = 0.5$ et $b_0 = 1$, on a $f(a_0) = f(0.5) = -0.25 < 0$ et $f(b_0) = f(1) = 1 > 0$. On calcule $f(\frac{a_0+b_0}{2}) = f(0.75) = (0.75)^2 + 0.75 - 1 = 0.3125 > 0$. On pose $a_1 = a_0 = 0.5$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2} = 0.75$.* ***(0.5 pt.)***
   On a alors $0.5 < x_{exacte} < 0.75$ l'erreur est donc inférieure à $0.75 - 0.5 = 0.25$ ***(0.5 pt.)***
   Pour la deuxième itération de la dichotomie, on calcule $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = f(0.625) = (0.625)^2 + 0.625 - 1 = 0.015625 > 0$. On pose $a_2 = a_1 = 0.5$ et $b_2 = \frac{a_0+b_0}{2} = 0.625$. ***(0.5 pt.)***

On a alors $0.5 < x_{exacte} < 0.625$ *l'erreur est donc inférieure à* $0.625 - 0.5 = 0.125$ ***(0.5 pt.)***
Pour la première itération de Lagrange, on a $a_0 = 0.5$ *et* $b_0 = 1$*, on pose* $c_0 = a_0 - \frac{b_0-a_0}{f(b_0)-f(a_0)} f(a_0)$*, donc* $c_0 = 0.5 - \frac{1-0.5}{f(1)-f(0.5)} f(0.5) = 0.5 - \frac{0.5}{1-0.25}(-0.25) = \frac{2}{3}$ *or* $f(c_0) = f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{9} > 0$ *. On pose alors* $a_1 = a_0 = 0.5$ *et* $b_1 = c_0 = \frac{2}{3}$. ***(0.5 pt.)***
On a alors $\frac{1}{2} < x_{exacte} < \frac{2}{3}$ *l'erreur est donc inférieure à* $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \approx 0.166666$ ***(0.5 pt.)***
Pour la deuxième itération de, on pose $c_1 = a_1 - \frac{b_1-a_1}{f(b_1)-f(a_1)} f(a_1) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{f(\frac{2}{3})-f(\frac{1}{2})} f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{36}}(-\frac{1}{4}) = \frac{8}{13}$ *or* $f(\frac{8}{13}) = -\frac{1}{169} < 0$ *on pose alors* $a_2 = c_1 = \frac{8}{13}$ *et* $b_2 = b_1 = \frac{2}{3}$. ***(0.5 pt.)***
On a alors $\frac{8}{13} < x_{exacte} < \frac{2}{3}$ *l'erreur est donc inférieure à* $\frac{2}{3} - \frac{8}{13} = \frac{2}{39} \approx 0.051282$ ***(0.5 pt.)***

2. *Pour la méthode de Newton, la suite est donnée par* $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_0 = 1$ *donné. Donc la première itération donne* $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $x_1 = \frac{2}{3}$ ***(0.5 pt.)*** *et* $e_1 = |x_1 - x_{exacte}| = 0.0486326$ ***(0.5 pt.)***
la deuxième itération $x_2 x_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{2}{3} - \frac{1/9}{7/3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{21} = \frac{13}{21} \approx 0.619047$ ***(0.5 pt.)*** *et* $e_2 = |x_2 - x_{exacte}| = 0.00101$ ***(0.5 pt.)***

Corrigé de l'exercice 3 1. *Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré* n *sur l'ensemble des* $n+1$ *points* $(x_i, y_i)_{i=0}^{i=n}$ *s'écrit*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \left(y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{j=n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \quad \textbf{\textit{(0.5 pt.)}}$$

Ici $n = 3$ *on a alors,*
$L_1(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6}$ ***(0.25 pt.)***
$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2}$ ***(0.25 pt.)***
$L_3(x) = \frac{x(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2))} = -\frac{x^3 - x^2 - 2x}{2}$ ***(0.25 pt.)***
$L_4(x) = \frac{x(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{x^3 - x}{6}$ ***(0.25 pt.)***
le polynôme d'interpolation est donné par
$P_3(x) = -L_1(x) - L_2(x) - L_3(x) + 5L_2(x) = x^3 - x - 1$ ***(0.5 pt.)***

2. *Pour la méthode des fractions divisées de Newton on a*
$P_3(x) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)(x-0) + a_3(x+1)(x-0)(x-1)$ *on dresse le tableau suivant,*
C'est à dire que $P_3(x) = -1 + x(x+1)(x-1) = x^3 - x - 1$ ***(2 pt.)***

x	$f(x)$			
-1	$\boxed{-1} = a_0$			
0	-1	$\dfrac{-1-(-1)}{0-(-1)} = \boxed{0} = a_1$		
1	-1	$\dfrac{-1-(-1)}{1-0} = 0$	$= \dfrac{0-0}{1-(-1)} = \boxed{0} = a_2$	
2	5	$\dfrac{5-(-1)}{2-1} = 6$	$\dfrac{6-0}{2-0} = 3$	$\dfrac{3-0}{2-(-1)} = \boxed{1} = a_3$

Corrigé de l'exercice 4 1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $h = \frac{b-a}{n}$, on pose $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_k = x_0 + kh$ et $\overline{x}_k = \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}$, pour $1 \leq k \leq n$. Pour évaluer $\int_a^b f(x)\,dx$, on utilise l'une des méthodes numériques usuelles suivantes* ***la formule composite du point milieu*** *est donnée par*

$$I_{PM}^c(f) = h \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k), \quad \textbf{\textit{(0.5 pt.)}}$$

Si en plus f est de classe C^2 l'erreur commise est estimée par

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - I_{PM}^c(f) \right| \leq (b-a)\frac{h^2}{24} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \quad \textbf{\textit{(0.5 pt.)}}$$

la formule composite des trapèzes *est donnée par*

$$I_T^c(f) = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1} + f(x_k)), \quad \textbf{\textit{(0.5 pt.)}}$$

Si en plus f est de classe C^2 l'erreur commise est estimée par

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - I_T^c(f) \right| \leq (b-a)\frac{h^2}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \quad \textbf{\textit{(0.5 pt.)}}$$

et ***la formule composite de Simpson*** *est donnée par*

$$I_S^c(f) = \frac{h}{6} \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_{k-1} + 4f(\overline{x_k}) + f(x_k) \right], \quad \textbf{\textit{(0.5 pt.)}}$$

Si en plus f est de classe C^4 l'erreur commise est estimée par

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - I_S^c(f) \right| \leq \frac{h^4}{2880} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \quad \textbf{\textit{(0.5 pt.)}}$$

2. *Pour évaluer I à 10^{-3} près par la méthode de Simpson composite il suffit que l'erreur commise soit inférieure à 10^{-3}.*

Or dans ce cas $(b-a) = 1$*, et* $f^{(4)}(x) = -\frac{24}{(1+x^2)^3} + \frac{144x+48}{(1+x^2)^4} - \frac{96}{(1+x^2)^5}$ *donc* $\max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| \leq 312$.

Pour avoir l'erreur désirée on devrait avoir

$$h^4 \leq \frac{2880}{312} \times 10^{-3} \Rightarrow h \leq 0.31$$

Il suffit de prendre $h = \frac{1}{4}$ *pour obtenir la précision voulue. On aura donc besoin de* 4 *points de subdivisions pour cette méthode.* ***(1 pt.)***

3. *La valeur approchée de* I*, par la méthode de Simpson composite en utilisant la subdivision* $x_0 = 0$*,* $x_1 = \frac{1}{2}$ *et* $x_2 = 1$ *est donnée par* $h = \frac{1}{2}$
   $I_S^c(f) = \frac{h}{6}\left(f(0) + f(1) + 2f(\frac{1}{2}) + 4\left(f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})\right)\right)$
   C'est à dire que, $I_S^c(f) = \dfrac{1}{12}\left(1 + \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{5}{4} + 4\left(\dfrac{16}{17} + \dfrac{16}{25}\right)\right) = 0.86039$ ***(1 pt.)***
4. *la valeur exacte de* I *est* $\dfrac{\pi}{4}$*, l'erreur commise donc est* $|I - I_S^c(f)| = |\dfrac{\pi}{4} - 0.86039| \leq 0.075$ ***(1 pt.)***