UNIVERSITÉ CHOUAIB DOUKKALI
FACULTÉ DES SCIENCES
EL JADIDA

Année Universitaire 20 ____/ 20____

Nom :
Prénom : Proposition
C.N. E. :
N° d'examen :
Filière : Correction examen Ana-Num (SMP3)
Module : 2014/2015

Ex 1

① $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ -x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 6 \\ 15x_2 - 4x_3 = 22 \\ -x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

2pts

$\Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 6 \\ 15x_2 - 4x_3 = 22 \\ 56x_3 = 112 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 6 \\ 15x_2 - 4x_3 = 22 \\ x_3 = \frac{112}{56} = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \{(2, 2, 2)\}$

② La matrice associée au système linéaire est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Il est clair que A est à diagonale strictement dominante, donc les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent pour tout x_0.

2pts

N.B : Il est formellement interdit de porter sur la copie tout signe particulier à l'exclusion des indications demandées dans le cadre réservé.

③ Méthode de Jacobi

$$M = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & & 0 \\ & 1/4 & \\ 0 & & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$N = E + F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2pts

$$\Rightarrow J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{k+1} = J x^k + D^{-1} b.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{4} x_2^k + \frac{6}{4} \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{4} x_1^k + \frac{1}{4} x_3^k + 1 \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{4} x_2^k + 6/4 \end{cases}$$

EX 2

3pts ① $\sqrt{N}$ est une racine de $f(x) = x^2 - N$

~~Donc~~, la méthode de Newton s'écrit

$$\begin{cases} x_0 = N \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - N}{2x_n} \end{cases} \qquad \left(x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)$$

3pts ② Pour $N = 2$, $x_0 = 2$

$$x_1 = x_0 + \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} \Rightarrow x_1 = 2 + \frac{4-2}{2 \times 2} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = 1,41666667$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 2}{2x_2} = 1,414215686$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - 2}{2x_3} = 1,41421356 2$$

La valeur de x_4 est la même que celle donnée par la calculatrice pour $\sqrt{2}$.

Ex 3

① $f(x,y) = \frac{-y}{x\ln x} + \frac{1}{\ln x}$ sur $[e, 5]$.

Montrons que f est k-lipschitzienne.

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \frac{1}{e}|y_1 - y_2|.$$

2pts

(voir Cours)

$\Rightarrow$ f est k-lipschitzienne alors le problème de Cauchy admet une solution unique.

③

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + h\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + h^2 \varepsilon(h)$$

alors,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\, f(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} f'(x_i, y(x_i)) + h^2 \varepsilon(h)$$

$$= y(x_i) + h\, f(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + f(x_i, y(x_i))\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i))\right] + h^2 \varepsilon(h)$$

3pts

Donc la méthode de Taylor d'ordre 2 est :

$$\begin{cases} y_0 = e \\ y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + f(x_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\right) \end{cases}$$

avec $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{x\ln x}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\left(\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}\right) - \frac{1}{x\ln^2 x}$$

EX4 : Pour que $|E_T(h)| < 10^{-3}$ il suffit que

$$\frac{(b-a)^3}{12\,n^2} \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)| < 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \quad n^2 > \frac{(b-a)^3}{12 \cdot 10^{-3}} \sup|f''(t)|$$

3pts $$\Rightarrow \quad n > \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12} \cdot 10^3 \sup|f''(t)|}$$

$f(t) = e^{-t}\cos t$

$$f'(t) = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$$

$$f''(t) = e^{-t}\cancel{\cos t} + e^{-t}\sin t + e^{-t}\sin t - e^{-t}\cancel{\cos t}$$

$$= 2\,e^{-t}\sin t.$$

Donc il suffit que $n \geq \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{12} \cdot 10^3 \times 2}$

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences, El Jadida
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2014/2015
Filière: SMP 3

Examen: Analyse Numérique
Durée: 45mn

Exercice 1. (6 pts)

On considère le système linéaire suivant:

$$(S)\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ - x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

1. Résoudre le système (S) par la méthode de Gauss.
2. Montrer que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes.
3. Donner l'expression des itérés de la résolution du système (S) par la méthode de Jacobi avec $x^0 = (0,0,0)^T$.

Exercice 2. (6 pts)

1. En utilisant la méthode de Newton, déterminer la suite $(x_n)_n$ telle que $x_0 = N$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{N}$ où N est un entier donné.
2. **Application:** Pour $N = 2$ et $x_0 = 2$, déterminer l'itéré x_4 et le comparer à la valeur donnée par la calculatrice.

Exercice 3. (5 pts)

Soit le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y}{x\ln x} + \dfrac{1}{\ln x} & \text{sur } [e,5] \\ y(e) = e \end{cases}$$

1. Montrer que ce problème admet une solution unique.
2. En utilisant le développement limité de y à l'ordre adéquat, écrire la méthode de Taylor d'ordre 2.

Exercice 4. (3 pts)

Sachant que

$$|e_T(h)| = |I - I_T| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|,$$

calculer le nombre d'intervalles qu'on doit prendre pour obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près de $I = \int_0^{2\pi} e^{-x}\cos(x)\,dx$ par la méthode des trapèzes.