MT40 Automne 2002

Examen final du 23 janvier 2003

Durée : deux heures

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

NB : Tout résultat intermédiaire pourra être admis afin de permettre la résolution d'une question ultérieure.

Exercice 1 (Une méthode du point fixe d'ordre trois)**.**
Soit g la fonction définie par

$$g(x) = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^3}, \tag{1}$$

où a, b et c sont trois réels.

1. Montrer que si l est un réel strictement positif, alors les conditions

$$g(l) = l, \quad g'(l) = 0, \quad g''(l) = 0, \tag{2}$$

sont équivalentes au système linéaire suivant

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } M = \begin{pmatrix} l^4 & l^2 & 1 \\ l^4 & -l^2 & -3 \\ 0 & l^2 & 6 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

2. Montrer que

$$\det M = -8l^6. \tag{4}$$

et que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 6l^2 \\ -l^4 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

3. Pour toute la suite, on choisit $A > 0$, $l = \sqrt{A}$ et
$$g(x) = \frac{1}{8}\left(3x + \frac{6A}{x} - \frac{A^2}{x^3}\right), \tag{6}$$
et on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ et $x_0 > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une constante K telle que, pour tout h assez petit,
   $$g(l+h) = g(l) + Kh^3 + o(h^3). \tag{7}$$
   (b) Déduire de (7) que, si x_0 est assez proche de l, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{A}$ avec un ordre de convergence égal à 3.
   (c) L'ordre de convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\sqrt{A}$ peut-il être égal à 4 ?
4. *Simulations numériques*
   (a) Calculer les premiers itérés de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $A = 2$ et $x_0 = 1$, puis $x_0 = 1000$. On pourra comparer les résultats avec les résultats fournis par la méthode de Newton pour la recherche de $\sqrt{A}$.
   (b) Reprendre la question 4a en choisissant $A = 997$ et $x_0 \in \{1, 30\}$. Conclure.

Exercice 2 (Interpolation et intégration d'équations différentielles)**.**
Notations
Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ et n un entier naturel donné. On pose pour tout $i \in \mathbb{N}$: $x_{n-i} = x_n - ih$.
Soit m un entier naturel donné et F une fonction numérique, supposée définie et suffisamment régulière sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant les réels x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-m} ; on notera pour simplifier les écritures :
$$\forall j \in \{n-m, ..., n\} \quad F_j = F(x_j).$$
Soit p_m le polynôme d'interpolation de F sur $\{x_{n-m}, x_{n-m+1}, ..., x_n\}$.

1. *Outils intermédiaires*
   (a) Pour tout i élément de $\{0, ..., m\}$ on considère l'opérateur Δ^i défini par $\Delta^0(F_j) = F_j$ pour tout $j \in \{n-m, ..., n\}$ et :
   $$\forall i \in \{1, ..., m\} \quad \forall j \in \{n-m, ..., n-i\} \qquad \Delta^i(F_j) = \Delta^{i-1}(F_{j+1}) - \Delta^{i-1}(F_j).$$
   Déterminer en fonction de F_n, F_{n-1}, F_{n-2} et F_{n-3} les réels $\Delta^1(F_{n-1})$, $\Delta^2(F_{n-2})$, $\Delta^3(F_{n-3})$.
   (b) On considère la propriété $\mathcal{P}(i)$ définie pour tout i élément de $\{0, ..., m\}$par :
   $$\mathcal{P}(i) : \quad F[x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-i}] = \frac{1}{i!h^i}\Delta^i(F_{n-i}).$$
   Démontrer $\mathcal{P}(i)$ par récurrence.
2. *Détermination formelle de p_m*
   (a) Dresser la table des différences divisées de F relative au support des points $\{x_{n-m}, x_{n-m+1}, ..., x_n\}$ écrits dans cet ordre.
   (b) Fournir alors l'expression formelle de $p_m(x)$ en utilisant la diagonale montante de la table obtenue à la question précédente.

3. *Utilisation pour la résolution d'un problème différentiel*

On considère, pour f suffisamment régulière, le problème différentiel (E) donné par :

$$\begin{aligned} &\forall x \in [a,b]\,, \quad y'(x) = f\big(x, y(x)\big), \\ &y(a) = y_0 \end{aligned}$$

Les notations adoptées en début d'exercice restent valides ; on pose $x_0 = a$ et $x_N = b$.

(a) Montrer que pour tout x_n convenable, on a :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\big(x, y(x)\big)\,dx.$$

(b) On considère alors la suite $(y_n)_{m \leq n \leq N}$ des valeurs approchées des $(y\,(x_n))_{m \leq n \leq N}$, définie par :

$$y_0, y_1, ..., y_m \quad \text{et} \quad \forall n \in \{m, ..., N-1\} \quad y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_m(x)\,dx\,;$$

p_m désigne le polynôme d'interpolation de la fonction F qui, pour tout $i \in \{n-m, ..., n\}$, vérifie

$$F(x_i) = f(x_i, y_i).$$

Expliquer brièvement le choix de la définition de la suite (y_n).

Qu'a-t-elle d'original par rapport aux suites étudiées en cours ?

(c) Montrer que si $m = 0$, on retrouve la suite des itérés d'Euler.

(d) On pose $s = (x - x_n)/h$. Montrer qu'on peut écrire :

$$\forall n \in \{m, ..., N-1\} \quad y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^{m} \gamma_i \Delta^i(F_{n-i}),$$

où les γ_i sont des réels dont on prouvera l'existence et dont on fournira l'écriture sans toutefois les calculer.

(e) Pour $m = 3$, on admet qu'on trouve :

$$\gamma_0 = 1; \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}; \quad \gamma_2 = \frac{5}{12}; \quad \gamma_3 = \frac{3}{8}.$$

En utilisant les résultats de 1a, montrer qu'on peut écrire :

$$\forall n \in \{3, ..., N-1\} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(55F_n - 59F_{n-1} + 37F_{n-2} - 9F_{n-3}\right).$$