

Examen final du 23 janvier 2004

Durée : deux heure(s)

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

Exercice 1 (Intégration gaussienne).

On cherche dans cet exercice à évaluer numériquement par une méthode gaussienne l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 r(x)w(x)dx, \quad (1)$$

où le poids w est défini sur $[0, 1[$ par

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}. \quad (2)$$

1. Montrer que la fonction w est intégrable sur $(0, 1)$.
2. **Lemmes techniques** (que l'on pourra admettre)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx. \quad (3)$$

- (a) Montrer, en faisant un changement de variable, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_{-1}^1 (1-u^2)^n du. \quad (4)$$

- (b) En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}. \quad (5)$$

- (c) Calculer I_0 et en déduire I_1 , I_2 , I_3 et I_4 .

- (d) On rappelle que le produit scalaire considéré est défini par

$$\forall u, v \in C^0([0, 1]), \quad \langle u, v \rangle = \int_0^1 \frac{u(x)v(x)}{\sqrt{1-x}} dx. \quad (6)$$

Montrer que si P et Q sont deux polynômes, si on note le produit

$$PQ = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k,$$

alors

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n \alpha_k I_k. \quad (7)$$

3. En utilisant la relation de récurrence à trois termes vue en cours pour les polynômes orthogonaux, déterminer P_0 , P_1 et P_2 , les trois premiers polynômes orthogonaux pour les poids w sur $(0, 1)$.

Dans cette récurrence, on choisira tous les coefficients α_n égaux à 1, mais on divisera chacun des polynômes obtenus par sa valeur en 0, de façon à avoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 1. \quad (8)$$

On pourra utiliser, pour simplifier les calculs, les résultats de la question 2d.

4. Pour toute la suite, on considère les polynômes de Legendre, vus en cours et notés $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les polynômes orthogonaux, relatifs au poids $w = 1/\sqrt{1-x}$.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists \beta_n \in \mathbb{R}^*, \quad P_n(x) = \beta_n L_{2n}(\sqrt{1-x}). \quad (9)$$

(b) En déduire, en utilisant la normalisation (8), que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(x) = L_{2n}(\sqrt{1-x}). \quad (10)$$

5. On se donne maintenant la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 r(x) w(x) dx \approx \sum_{i=0}^n W_i r(x_i). \quad (11)$$

(a) **Question facultative**

Comment pourriez-vous, en utilisant (10), calculer les points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et les poids $(W_i)_{0 \leq i \leq n}$ de la formule (11) ?

(b) **Applications numériques**

On vous donne les $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et les $(W_i)_{0 \leq i \leq n}$ pour quelques valeurs de n (voir tableau 1 page ci-contre).

Déterminer une approximation des intégrales suivantes

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^2 w(x) dx, \\ J &= \int_0^1 x^7 w(x) dx, \\ K &= \int_0^1 \sqrt{x+1} w(x) dx, \end{aligned}$$

en utilisant (11) pour $n \in \{0, \dots, 3\}$.

Quelles sont les valeurs exactes de I et de J ?

x_i	W_i
	$n = 0$
0.66666 66666 6667	2.00000 00000 0000
	$n = 1$
0.88441 28900 0295	1.30429 03097 2509
0.25844 42528 5419	0.69570 96902 7491
	$n = 2$
0.94306 08840 3299	0.93582 78691 4538
0.56280 21472 4891	0.72152 31460 9628
0.13050 06050 8174	0.34264 89847 5834
	$n = 3$
0.96635 17319 3249	0.72536 75667 5672
0.72381 56861 2754	0.62741 32917 5577
0.36532 25237 6536	0.44476 20689 0675
0.77843 39150 794 10^{-1}	0.20245 70725 8075

TAB. 1 – Quelques valeurs de $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et les $(W_i)_{0 \leq i \leq n}$ pour $n \in \{0, \dots, 3\}$.

On donne la valeur exacte de K :

$$\int_0^1 \sqrt{x+1} w(x) dx = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Commentez !

Exercice 2 (Équation non linéaire).

On considère l'équation (E) donnée par :

$$(E) : f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0.$$

On se propose d'étudier les solutions réelles de (E) numériquement grâce à la méthode de Newton.

1. *Étude de la fonction f*

- (a) Etudier les variations de f sur \mathbb{R} .
- (b) En déduire l'existence de trois solutions réelles pour (E) , notées dans l'ordre croissant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
- (c) Fournir une représentation graphique de f dans un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- (d) Etudier le signe de f sur \mathbb{R} .

2. *Étude de la convergence de la suite des itérés de Newton*

- (a) Soit x_0 un réel ; définir la suite (x_n) des itérés de Newton de x_0 associée à (E) .
- (b) *Étude de (x_n) pour x_0 élément de $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$*
 - (i) On choisit x_0 dans $]-\infty, \alpha_1[$.
 - Montrer que la suite (x_n) est monotone et convergente ; en déduire que sa limite est α_1 .
 - Peut-on conclure quant à la convergence de (x_n) si x_0 est choisi dans $[\alpha_1, -1[$?
 - (ii) On choisit x_0 dans $]1, +\infty[$.
 - Conclure quant à la convergence de (x_n) en utilisant et adaptant l'étude conduite sur $]-\infty, -1[$.

(c) **Question facultative**

Étude de la convergence de la suite des itérés de Newton pour x_0 élément de $]-1, 1[$

- (i) On considère l'intervalle $[0, b]$ avec b élément de $]\alpha_2, 1[$
 - En utilisant le théorème de condition suffisante de convergence de la suite (x_n) proposé en cours, montrer que la convergence vers α_2 est assurée pour tout choix de x_0 dans $[0, b]$ si b vérifie :

$$b > \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad |F(b)| < b \quad \text{avec} \quad F(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$
- (ii) Etudier les variations de F sur $[0, 1]$.
- (iii) En déduire une méthode de détermination d'un b_0 maximal dans $]\alpha_2, 1[$ garant de la convergence de la suite (x_n) vers α_2 , au sens du critère considéré.
- (iv) Comment terminer l'étude ?

Corrigé

Le corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez.tiscali.fr/>