MT40 Automne 2004

Examen final du 19 janvier 2005

Durée : deux heure(s)

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera l'exercice 1 sur (au moins) une copie et les exercices 2 et 3 sur une autre.

Exercice 1 (Intégration gaussienne)**.**
On considère un réel a strictement positif et l'intégrale I_a définie par :

$$I_a = \int_{-a}^{a} \frac{e^X}{\sqrt{a^2 - X^2}} dX.$$

(1) Justifier l'existence de I_a.

(2) Choix d'une méthode numérique pour le calcul de I_a

  (a) Peut-on utiliser une méthode de Simpson ? Expliquer brièvement pourquoi.

  (b) *Ecriture de I_a sous forme conventionnelle*
  On pose $x = X/a$. Effectuer le changement de variable indiqué et montrer que I_a s'écrit :

$$I_a = \int_{-1}^{1} \frac{e^{ax}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

  (c) Montrer que I_a peut être calculée par méthode gaussienne. Justifier soigneusement la méthode retenue.

(3) Mise en oeuvre de l'intégration gaussienne à quatre points

  (a) Fournir en fonction de a une valeur approchée de I_a par la méthode retenue à 4 points.

  (b) Majorer en fonction de a la valeur absolue de l'erreur de méthode commise lors de cette intégration.

  (c) Application numérique
  Fournir les résultats numériques des deux questions précédentes pour $a = 1/10$.

(4) Généralisation

On choisit de calculer I_a par intégration gaussienne à $n + 1$ points.

  (a) Fournir en fonction de a et n la valeur approchée de I_a obtenue.

(b) En déduire le plan d'un algorithme $calcul1\,(a, n \to I_a)$.

(c) Indiquer le plan de l'étude qui permettrait d'améliorer l'algorithme précédent pour conduire à une version $calcul2\,(a, \varepsilon \to I_a)$ garantissant à l'utilisateur que la valeur absolue de l'erreur de méthode commise soit inférieure au réel strictement positif ε.

Exercice 2 (Équations non linéaires)**.**
Soient A un réel strictement positif et la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \frac{1}{8}\left(3x + \frac{6A}{x} - \frac{A^2}{x^3}\right). \tag{1}$$

(1) Calculer $g\left(\sqrt{A}\right)$, $g'\left(\sqrt{A}\right)$ et $g''\left(\sqrt{A}\right)$. En déduire que, si x_0 appartient à $\mathbb{R}_+^*$ et si la suite des itérés $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ est convergente, alors l'ordre de convergence est égal à 3.

(2) L'ordre de convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\sqrt{A}$ peut-il être égal à 4 ?

(3) (a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$. On montrera que la dérivée de g est du signe de $x^2\left(x^2 - A\right)^2$.

(b) Étudier le signe de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela, on pourra factoriser $5x^2 - 6Ax + A^2$.

Pour toute la suite, on notera $\sqrt{A}$ et α les deux points fixes de g.

(c) Sur $\mathbb{R}_+^*$, quel est l'unique zéro, noté β, de g ?

(d) Fournir dans le même repère une allure de la courbe représentative de g et le tracé de la droite d'équation $y = x$.

(4) Nous cherchons maintenant à étudier la convergence de la suite des itérés de x_0, si x_0 appartient à $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Grâce aux résultats des questions 3a, 3b et 3c, montrer que, si x_0 appartient à l'intervalle $]\alpha, \sqrt{A}[$ ou $]\sqrt{A}, +\infty[$, alors la suite des itérés converge vers $\sqrt{A}$.

(b) Que se passe-t-il si x_0 est égal à α ou $\sqrt{A}$?

(c) Est-il simple d'étudier la convergence de la suite des itérés si x_0 appartient à l'intervalle $]0, \alpha[$? Quels sont les problèmes qui peuvent s'y poser ?

(5) *Question bonus*

On fera des simulations numériques pour $A = 5$ et pour les valeurs suivantes :

$$x_0 \in \left\{1;\ 4;\ 0{,}1;\ 10^{10};\ \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3} \times 5}\right\}, \tag{2}$$

et on commentera les résultats obtenus. Conclure.

Exercice 3 (Équations différentielles)**.**
Dans cet exercice, on étudie l'équation différentielle qui gouverne le système mécanique suivant : un point matériel de masse $m = 1$ et d'abscisse $x(t)$ est relié à un ressort de raideur k, est soumis à une force extérieure $f(t)$ et à une force de frottement égale à $-c\dot{x}(t)$ (voir figure 1 page ci-contre).

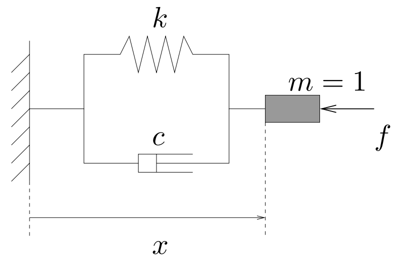

FIG. 1. un système mécanique à un degré de liberté.

Le principe fondamental de la dynamique conduit à l'équation suivante

$$\forall t \in [0, T], \quad \ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \tag{3a}$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \tag{3b}$$

(1) Écrire le système (3) sous la forme

$$\forall t \in [0, T], \quad \dot{X}(t) = F(t, X(t)), \tag{4a}$$

avec les conditions initiales

$$X(0) = X_0. \tag{4b}$$

Dans ce système F, X et X_0 désignent des grandeurs vectorielles.

(2) Justifier sommairement l'existence et l'unicité de la solution de (4), si f est «suffisamment régulière».

(3) Écrire les schémas d'Euler et de Runge-Kutta 2 pour l'équation différentielle (4). On conservera le formalisme utilisé dans (4).

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez.tiscali.fr/`