

Examen médian du 16 novembre 2005

Durée : deux heure(s)

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes. On pourra admettre tout résultat.

Exercice 1 (Interpolation).

On considère la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $[1, 2]$; on la note F .

1. *Interpolation linéaire de F sur le support $\{1, 2\}$*

(a) Déterminer la fonction polynôme P_1 qui interpole F sur le support $\{1, 2\}$.

(b) Soit E la fonction définie par : $E(x) = F(x) - P_1(x)$. Étudier les variations de E sur $[1, 2]$.

2. On considère la fonction, notée f , dérivée de F sur $[1, 2]$.

(a) Déterminer la fonction polynôme p_1 qui interpole f sur le support $\{1, 2\}$.

(b) Soit e la fonction définie par : $e(x) = f(x) - p_1(x)$. Etudier les variations de e sur $[1, 2]$.

3. Comparer les valeurs absolues des erreurs d'interpolation linéaire de F et de f . Discuter brièvement.

Exercice 2 (Intégration numérique).

Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

1. *Méthode de quadrature (élémentaire sur $[a, b]$).*

On considère n un entier non nul, $n + 1$ réels $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ vérifiant $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, et $n + 1$ réels quelconques $(W_i)_{0 \leq i \leq n}$. On appelle formule de quadrature, une formule d'intégration approchée du type

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n W_i f(x_i). \quad (1)$$

- (a) Rappeler brièvement pourquoi la formule (1) est exacte pour tous les polynômes de degré au plus n si et seulement si les coefficients $(W_i)_{0 \leq i \leq n}$ vérifient une relation qui les définissent de façon unique en fonction des $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$.
- (b) Dans le cas où $a = -1$ et $b = 1$, la formule d'intégration numérique à $n + 1$ points de Gauss-Legendre est-elle une formule de quadrature du type (1) ?
- (c) On considère les polynômes de Lagrange $(l_i)_{0 \leq i \leq n}$:

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}. \quad (2)$$

- (i) Montrer que si la formule de quadrature du type (1) est exacte pour les polynômes de degré au plus n , alors

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad W_i = \int_a^b l_i(x) dx. \quad (3)$$

- (ii) Réciproquement, montrer que (3) implique que la formule de quadrature du type (1) est exacte pour les polynômes de degré au plus n .

2. On suppose désormais que les points x_i sont définis par

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad x_i = a + \tau i, \quad \text{où } \tau = \frac{b - a}{n}. \quad (4)$$

Dans ce cas, la formule de quadrature (1) est appelée formule de Newton-Cotes (fermée).

Quelles formules d'intégrations usuelles (élémentaires) retrouve-t-on pour $n \in \{1, 2\}$?

3. *Erreur d'intégration.*

Dans toute cette question, nous supposons f de classe C^{n+1} sur $[a, b]$.

- (a) Montrer que les si x_i sont définis par (4) et les w_i sont définis par (3) alors l'erreur d'intégration E_n vérifie

$$E_n = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n W_i f(x_i) = \int_a^b f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \psi_n(x) dx, \quad (5)$$

où

$$\psi_n(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j). \quad (6)$$

(b) Sans faire de calcul, prévoir l'expression de l'erreur pour $n \in \{1, 2\}$.

(c) Montrer que

$$|E_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| (b-a)^{n+2}. \quad (7)$$

(d) La majoration (7) est-elle cohérente avec les résultats de la question 3b ? Commentez !

4. Question facultative

Méthode composée.

On admettra l'expression suivante de l'erreur E_n : pour tout n , il existe une constante M_n qui ne dépend que des points x_i telle que si n est pair et f de classe C^{n+2} sur $[a, b]$:

$$E_n = \frac{M_n}{(n+2)!n^{n+3}} (b-a)^{n+3} f^{(n+2)}(\xi), \text{ où } \xi \in [a, b], \quad (8)$$

et si n est impair et f de classe C^{n+1} sur $[a, b]$:

$$E_n = \frac{M_n}{(n+1)!n^{n+2}} (b-a)^{n+2} f^{(n+1)}(\xi), \text{ où } \xi \in [a, b]. \quad (9)$$

On cherche maintenant à intégrer de façon numérique une fonction f de classe C^{n+2} (respectivement de classe C^{n+1}) si n est pair (respectivement si n est impair) sur un intervalle $[A, B]$. Soit N un entier naturel non nul. On pose $h = (B - A)/N$ et

$$\forall k \in \{0, \dots, N\}, \quad X_k = A + kh. \quad (10)$$

(a) Quelle est l'expression de l'approximation de $\int_A^B f(x)dx$ en utilisant la méthode composée fondée sur la méthode élémentaire de Newton-Cotes (1)-(4) ?

(b) Quelle est l'expression de l'erreur commise ?

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/>