Nb: On rédigera les exercices sur des feuilles séparées. On pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

1.1 *Interpolation sur le support* $\{-1, 0, 1\}$

a) Déterminer la fonction polynôme p_{21} qui interpole f sur $\{-1, 0, 1\}$.

b) En déduire l'expression de la fonction e_1 définie par $e_1 = |f - p_{21}|$.

c) Donner le tableau des variations de la fonction e_1 sur $[-1, 1]$.

1.2 *Interpolation sur le support* $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, *appelés points de Tchebychev*

a) Déterminer la fonction polynôme p_{22} qui interpole f sur $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

b) En déduire l'expression de la fonction e_2 définie par $e_2 = |f - p_{22}|$.

c) Donner le tableau des variations de la fonction e_2 sur $[-1, 1]$.

1.3 *Comparaison des interpolations*

a) Représenter graphiquement dans le même repère du plan, les fonctions e_1 et e_2.

b) Quel résultat annoncé en cours retrouvez-vous dans ce cas singulier ?

Exercice 2

Soit n de $\mathbb{N}^*$, x_0 de $\mathbb{R}$ et h de $\mathbb{R}^{+*}$donnés.On note $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes de degré au plus trois et $(f_k)_{0 \le k \le 3}$ sa base canonique.

2.1 Soit Δ l'application de $\mathcal{P}_3$ dans $\mathcal{P}_3$ définie par:

$$\forall p \in \mathcal{P}_3 \qquad \Delta(p) = q \quad \text{avec} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad q(x) = p(x + h) - p(x).$$

De plus, pour tout i de $\mathbf{N}$ on définit Δ^i pour tout p de $\mathcal{P}_3$ par:

$$\Delta^0 (p) = id\,(p) = p; \quad \Delta^2 (p) = \Delta (\Delta (p)) \qquad \text{et plus généralement} \quad \Delta^i = \Delta \circ \Delta^{i-1} \quad \text{si} \quad i\rangle 0.$$

a) Montrer que Δ est une application linéaire, c'est-à-dire que:

$$\forall (p_1, p_2) \in \mathcal{P}_3^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \Delta(p_1 + p_2) = \Delta(p_1) + \Delta(p_2) \quad \text{et} \quad \Delta(\lambda.p_1) = \lambda\Delta(p_1).$$

b) Que dire de Δ^i ?

c) Déterminer l'image par Δ de la base $(f_k)_{0 \le k \le 3}$, c'est-à-dire pour tout k élément de $\{0, .., 3\}$ la fonction $\Delta (f_k)$.

.../...

2.2 *Lien de Δ avec les polynômes d'interpolation*

Soit p une fonction quelconque de $\mathcal{P}_3$.

a) Montrer que $\Delta^3(p)$ est une fonction constante.

b) On pose pour tout j de $\mathbb{N}$: $x_j = x_0 + jh$ et on suppose connaître les valeurs de p en x_0, x_1, x_2, x_3.

b1) Déterminer en fonction des $(p(x_i))_{0\leq i\leq 3}$, le vecteur $(d\,[i])_{0\leq i\leq 3}$ avec $d\,[i] = \left(\Delta^i(p)\right)(x_0)$.

b2) Montrer que pour tout couple (i,j) de $\{0,1,2,3\} \times \mathbf{N}^*$ on a:

$$\left(\Delta^i(p)\right)(x_j) = \left(\Delta^i(p)\right)(x_{j-1}) + \left(\Delta^{i+1}(p)\right)(x_{j-1}).$$

b3) Comment se construit la "table " (a_{ij}) avec $a_{ij} = \left(\Delta^i(p)\right)(x_j)$?

2.3 *Sous les notations et hypothèses antérieures,*

a) Ecrire un algorithme *valeur* $(d, k \rightarrow val)$ qui à partir du vecteur d des quatre valeurs $d\,[i] = \left(\Delta^i(p)\right)(x_0)$ fournit le vecteur *val* des k valeurs de la fonction polynôme p en les réels $x_{3+1}, x_{3+2}, ..., x_{3+k}$.

b) Quel est l'intérêt d'un tel algorithme ?

c) Evaluer l'ordre de grandeur du temps d'exécution de cet algorithme.