Utbm mt40 Examen final Automne 2006

Nb: On rédigera les exercices sur des feuilles séparées.

Exercice 1 *Intégration gaussienne*

On considère les intégrales I_1 et I_2 définies par:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

1.1 Démontrer que I_1 et I_2 existent et peuvent être calculées par méthode gaussienne. Laquelle?

1.2 On choisit, pour cette question, d'utiliser une méthode d'intégration gaussienne à trois points.

a) Déterminer le support d'intégration $\{x_0, x_1, x_2\}$. Que représente ce support, géométriquement?

b) *Valeurs approchées de* I_1 et I_2

Fournir une valeur approchée V_1 de I_1 et une valeur approchée V_2 de I_2.

c) *Erreur de méthode*

- Montrer que la valeur approchée V_1 est exacte.
  Cette propriété de I_1se généraliserait-elle avec un plus grand nombre de points de support?
- Fournir une majoration de la valeur absolue de l'erreur de méthode commise dans l'évaluation de I_2.
  En déduire un intervalle contenant certainement I_2.

1.3 Fournir une table qui, en fonction de l'entier naturel n élément de $\{1, ..., 5\}$, fournit un majorant de $|E_n|$, où E_n désigne l'erreur de méthode commise en intégration gaussienne à n points, dans l'évaluation de I_2.

Nb: On s'attachera à trouver une relation liant les majorants de $|E_n|$ et $|E_{n+1}|$, en vue d'une informatisation éventuelle du traitement de cette question.

Exercice 2 *Equations non linéaires*

Soit A un réel élément de $I =]1, +\infty[$. On considère l'équation (E) : $f(x) = 0$, où f est définie par $f(x) = x^2 - A$.

L'objet de l'exercice est de déterminer une valeur approchée de la solution positive de (E) par l'intermédiaire d'une équation "approchée".

2.1 *Existence et unicité de solution sur I*

- Etudier f sur I et montrer que (E) admet une solution unique, notée l, dans I.
- Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère du plan.

2.2 *Equation approchée de* (E)

Soit α, β deux éléments donnés, distincts ou non, de I.

a) Déterminer le polynôme p_1 qui interpole f sur le support $\{\alpha, \beta\}$.

b) On définit l'équation approchée $(E_{\alpha\beta})$ de (E), relative au support $\{\alpha, \beta\}$, par :

$$(E_{\alpha\beta}) : \quad p_1(x) = 0.$$

b1) Montrer que si $\alpha \neq \beta$, $(E_{\alpha\beta})$ s'écrit:

$$(E_{\alpha\beta}) : \quad \alpha^2 - A + (\beta + \alpha)(x - \alpha) = 0.$$

Résoudre l'équation $(E_{\alpha\beta})$.

b2) Montrer que si $\alpha = \beta$, $(E_{\alpha\beta})$ s'écrit:

$$(E_{\alpha\beta}) : \quad \alpha^2 - A + 2\alpha(x - \alpha) = 0.$$

Nb: On rappelle que dans ce cas $f[\alpha, \alpha] = f'(\alpha)$.

Résoudre l'équation $(E_{\alpha\beta})$.

2.3 *Deux cas particuliers importants*

a) Soit x_0 et x_1 deux éléments distincts de I.

- Soit $n = 1$; on pose $\alpha = x_n$ et $\beta = x_{n-1}$. On note l_a la solution de $(E_{\alpha\beta})$ trouvée en 2.2b1).
  - Fournir l'expression de l_a en fonction de x_n et x_{n-1}.
  - Que représente géométriquement l_a par rapport à la corde $(M_n M_{n-1})$, où M_n et M_{n-1}désignent les points de la courbe (C) d'abscisses respectives x_n et x_{n-1}?
  - On définit alors x_{n+1} par: $x_{n+1} = l_a$.
- Soit alors $n = 2$; on itère le processus décrit ci-dessus, puis on fait de même pour tout n. Montrer qu'on définit ainsi la suite des itérés de Lagrange relatifs à l'équation (E).

b) Soit x_0 un élément de I.

- Soit $n = 0$; on pose $\alpha = x_n$ et $\beta = x_n$. On note l_a la solution de $(E_{\alpha\beta})$ trouvée en 2.2b2.).
  - Fournir l'expression de l_a en fonction de x_n.
  - Que représente géométriquement l_a par rapport à la tangente en M_n à la courbe représentative (C) de f, où M_n désigne le point de (C) d'abscisse x_n? En déduire que l_a est dans I. et vérifie $l_a \geq l$.
  - On définit alors x_{n+1} par: $x_{n+1} = l_a$.
- Soit alors $n = 1$; on itère le processus décrit ci-dessus et de même, pour tout n. Montrer qu'on définit ainsi la suite des itérés de Newton relatifs à l'équation (E).

c) En déduire que les itérations de Lagrange et de Newton sont des cas particuliers d'un même processus.

2.4 *Vitesse de convergence*

On considère désormais la suite (x_n), initialisée par x_0 [resp^t $\{x_0, x_1\}$], définie pour n de $\mathbf{N}$ [resp^t $\mathbf{N}^*$] par : $x_{n+1} = l_a$ où l_a est solution de $(E_{\alpha\beta})$: $p_1(x) = O$, sachant que p_1 interpole f sur le support $\{\alpha, \beta\}$ égal à $\{x_n, x_n\}$ [resp^t $\{x_n, x_{n-1}\}$].

On pose pour tout n de $\mathbf{N}$: $e_n = l - x_n$.

a) En utilisant l'expression de l'erreur de méthode en interpolation polynômiale, montrer que:

$$e_{n+1} = -\frac{f[\alpha, \beta, l]}{f[\alpha, \beta]}(l - \alpha)(l - \beta)$$

b) En déduire, sachant que ζ_n désigne un réel de I:

- qu'en méthode de Newton (vu $\{\alpha, \beta\} = \{x_n, x_n\}$) on a:

$$e_{n+1} = -\frac{1}{f'(\zeta_n)} (e_n)^2 = -\frac{1}{2x_n} (e_n)^2 .$$

- qu'en méthode de Lagrange (vu $\{\alpha, \beta\} = \{x_n, x_{n-1}\}$) on a:

$$e_{n+1} = -\frac{1}{f'(\zeta_n)} e_n e_{n-1} = -\frac{1}{2\zeta_n} e_n e_{n-1}$$

c) *Performances comparées des méthodes de Newton et Lagrange*

On suppose avoir établi que la suite (x_n) converge vers l.

- Montrer que la convergence en méthode de Newton est quadratique.
- Montrer qu'en méthode de Lagrange la convergence est d'ordre $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or.

  Indication: on cherchera des réels p et k tels que :$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c_n \left(\frac{|e_n|}{|e_{n-1}|^p}\right)^k$.