Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse numérique L3- Automne 2015

Série d'exercices n°6/6
Équations différentielles

Exercice 1. Schéma d'Euler explicite.
On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_0+T] \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

où $t_0, T\ x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ sont donnés.
On suppose de plus qu'il existe $L > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|.$$

1. Donner le schéma d'Euler explicite à pas de temps constant correspondant à ce problème.
2. Jusqu'à quel ordre ce schéma est-t-il convergent ?
3. Applications :
   pour les deux problèmes suivants :

   $$\text{A.}\begin{cases} x'(t) &= t\sin(x(t)), \quad t \in [0,T], \\ x(0) &= \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad \text{et B.}\begin{cases} x'(t) &= t^2 + x + 1, \quad t \in [1,T], \\ x(1) &= 1. \end{cases}$$

   (a) Écrire le schéma d'Euler explicite en prenant un pas de temps constant.
   (b) Écrire les 2 premières itérations en prenant comme pas de temps $h = 0.1$.
   (c) Est-ce que ce schéma converge vers chacune des solutions de ces problèmes ?

Exercice 2. Schémas explicites du point milieu et schéma des trapèzes (Heun).
On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_0+T] \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

où $t_0, T\ x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ sont donnés.
On suppose de plus qu'il existe $L > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|.$$

1. Construire le schéma du point milieu explicite à pas de temps constant correspondant à ce problème.
2. Construire le schéma des trapèzes explicite à pas de temps constant correspondant à ce problème.
3. Jusqu'à quel ordre ces schéma sont-ils convergents ?

<u>Exercice 3.</u> Schéma d'Euler implicite.
On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t,x(t)), \quad t \in [t_0, t_0+T] \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

où $t_0, T\ x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ sont donnés.
On suppose de plus qu'il existe $L > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|.$$

1. Le schéma d'Euler explicite à pas de temps constant est-il A-stable ?
2. Écrire le schéma d'Euler implicite en prenant un pas de temps constant.
3. Ce schéma d'Euler implicite à pas constant est-il A-stable ?

<u>Exercice 4.</u> Asymptotique, raideur & schéma implicite.
Soit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+,\ x'(t) = -ax(t) + b), \tag{1}$$

1. (a) Donner explicitement x.
   (b) Quel est le comportement de $x(t)$ quand $t \to +\infty$?
2. Soit $h > 0$ un pas de temps.
   (a) Écrire explicitement le schéma d'Euler explicite à pas constant h pour (1).
   On notera $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n\,h)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des temps d'approximation, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs approchées correspondantes.
   (b) Donner explicitement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Quelle condition doit satisfaire h pour que, quel que soit x_0, x_n tende quand $n \to +\infty$ vers $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$?
   (d) On suppose cette condition satisfaite.
   Exprimer en fonction de a le nombre minimal de temps d'approximation impliqués dans un calcul approché de $x_{|[0,10]}$.
   Quel est ce nombre lorsque $a = 100$?
   (e) Répondre à $(a) - (c)$ en remplaçant le schéma d'Euler explicite par le schéma d'Euler implicite.

<u>Exercice 5.</u> Problèmes Hamiltoniens : l'oscillateur harmonique.
Soit $(x_0, p_0) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = p_0, \quad \text{et} \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+,\ x''(t) + x(t) = 0)\,. \tag{2}$$

1. On introduit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,p) \mapsto \frac{1}{2}(x^2+p^2)$.

(a) Montrer que la réduction d'ordre appliquée à (2) conduit au problème de Cauchy

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(0) \;=\; \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(t) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_p H(x(t),p(t)) \\ -\partial_x H(x(t),p(t)) \end{pmatrix}\right). \quad (3)$$

(b) Montrer que si (x, p) résout (3) alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ H(x(t), p(t)) = H(x_0, p_0)\,.$$

2. Soit $h > 0$ un pas de temps.
   (a) Écrire explicitement le schéma d'Euler explicite à pas constant h pour (3).
   On notera $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n\,h)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des temps d'approximation, et $((x_n, p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs approchées correspondantes.
   (b) Donner explicitement $(H(x_n, p_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Qu'arrive-t-il à $\|(x_n, p_n)\|$ quand $n \to +\infty$?
   (d) Répondre à $(a) - (c)$ en remplaçant le schéma d'Euler explicite par le schéma d'Euler implicite.
3. On définit $H_{num} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $(x, p, h) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + p^2 + h\,xp)$.
   Soit $h > 0$ un pas de temps.
   (a) Montrer que, pour tout $(x, p, h) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, alors

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}h\right)\, H(x,p) \;\le\; H_{num}(x,p,h) \;\le\; \left(1 + \tfrac{1}{2}h\right)\, H(x,p)\,.$$

   (b) Justifier que le schéma implicite

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_n \\ p_n \end{pmatrix} + h\,\begin{pmatrix} p_n \\ -x_{n+1} \end{pmatrix}\right). \quad (4)$$

   est bien défini. Ce schéma est appelé *schéma d'Euler symplectique*.
   (c) Montrer que la suite ainsi construite vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ H_{num}(x_n, p_n, h) = H_{num}(x_0, p_0, h)\,.$$

   (d) Montrer que le schéma d'Euler symplectique à pas constant est convergent et au moins d'ordre 1.

Ex : Etude d'Euler explicite

$\phi(t,x,h) = f(t,x)$ donc Euler explicite est évidemment consistant

De +, si f vérifie (L) alors ϕ vérifie la condition suffisante de stabilité et donc (S) converge.

De +, $\frac{\partial \phi}{\partial h}(t,x,h) = 0 \neq \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + f(t,x)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$
et donc Euler explicite est d'ordre 1.

Autre exemple : point milieu

$$x_{n+1} = x_n + h f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n)\right)$$

On a : $\phi(t,x,h) = f\left(t + \frac{h}{2}; x + \frac{h}{2} f(t,x)\right)$

$\phi(t,x,h) = f(t(h), x(h))$, $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $1 = \frac{dt}{dh}$, $\frac{dx}{dh} = f/2$

donc $\phi(t,x,0) = f(t,x) \longrightarrow$ consistant d'ordre 1

et $\frac{\partial \phi}{\partial h}(t,x,h) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} f(t,x)\right) + \frac{1}{2} f(t,x) \frac{\partial f}{\partial x}\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} f(t,x)\right)$

donc $\frac{\partial \phi}{\partial h}(t,x,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + f(t,x)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right) \rightarrow$ consistant d'ordre 2

On peut montrer que $\frac{\partial^2 \phi}{\partial h^2}(t,x,0) \neq \frac{1}{2} D^2 f(t,x)$ (à faire)
donc le point milieu n'est pas d'ordre 3

stabilité : si f vérifie (L), $\forall t \in [t_0, t_0+T]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, $\forall h \leq h_{max}$

$$\begin{aligned}
\|\phi(t,x,h) - \phi(t,y,h)\| &= \left\|f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} f(t,x)\right) - f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t,y)\right)\right\| \\
&\leq L\left\|x + \frac{h}{2} f(t,x) - y - \frac{h}{2} f(t,y)\right\| \\
&= L\left\|x - y + \frac{h}{2}\left(f(t,x) - f(t,y)\right)\right\| \\
&\leq L\left(\|x-y\| + \frac{h}{2} L \|x-y\|\right) \\
&= L\left(1 + \frac{h}{2} L\right)\|x-y\| \\
&\leq L\left(1 + \frac{h_{max}}{2} L\right)\|x-y\|
\end{aligned}$$

Donc ϕ vérifie la condition suffisante de stabilité.
Donc le schéma de point milieu est convergent et d'ordre 2

Point milieu

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial h^2} = \frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{\partial \phi}{\partial h}\right](t,x,h)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{\partial f}{\partial t}\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}f(t,x)\right) + f(t,x)\frac{\partial f}{\partial x}\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}f(t,x)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}f(t,x)\right) + \frac{f(t,x)}{2}\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} f\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}f(t,x)\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}f(t,x)\right] + \frac{f(t,x)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}f(t,x)\right)\right]$$

en $h=0$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial h^2}(t,x,0) = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t,x) + f\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}f(t,x) + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t,x) + f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right]$$

$$\neq \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} + f\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

donc la méthode est consistante d'ordre 2.

Exercice:

1. On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t\sin(x) & t \in [0,T] \\ x(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

a. Écrire le schéma d'Euler progressif pour ce problème, en prenant un pas de temps constant

b. Faire 2 itérations en prenant comme pas de temps $h = 0,1$.

Sol:

(a) $x_{n+1} = x_n + h f(t_n, x_n)$ où $f(t_n, x_n) = t_n \sin(x_n)$ ici

$= x_n + h\, t_n \sin(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

(b) $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + 0.1\, t_0 \sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \simeq 1.57$

$x_2 = \frac{\pi}{2} + 0.1 \cdot t_1 \sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + 0.1 \cdot 0.1 \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{1} \quad t_1 = t_0 + h = 0 + 0.1$

$= \frac{\pi}{2} + 0.01$

$\simeq 1.58$

2. Même exercice avec $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t^2 + x + 1 & t \in [1,T] \\ x(1) = 1 \end{cases}$

a. $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h[t_n^2 + x_n + 1] & \forall n \in \mathbb{N} \\ x_0 = 1 \end{cases}$

b. $x_1 = 1 + 0.1(t_0^2 + 2) = 1 + 0.1(1^2 + 2) = 1.3$

$x_2 = 1.3 + 0.1(t_1^2 + 2.3) = 1.3 + 0.1((1.1)^2 + 2.3) = 1.3 + 0.1(1.21 + 2.3)$

$= 1.3 + 0.1(3.51) = 1.3 + 0.351 = 1.651$

3. Dans les 2 exercices précédents, le schéma converge-t-il vers le problème de Cauchy?

On a vu qu'Euler progressif est consistant avec n'importe quel problème de Cauchy (puisque pour Euler " $\phi(t,x,h) = f(t,x)$.

De +, on a vu qu'il est stable si f est Lipschitzienne.

Pour 1) $\forall t \geq 0, \ \forall x,y \in \mathbb{R} \quad |f(t,x) - f(t,y)| = |t\sin(x) - t\sin(y)|$

$= t|\sin(x) - \sin(y)| = t|\cos(c)||x-y|$ où c est compris entre x et y d'après le théorème des accroissements finis

(Rapel: si f est C^0 sur $[a,b]$, f dérivable sur $]a,b[$

alors $\exists c \in]a,b[$ t.q. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ici: $f(x) = \sin x$
$f'(x) = \cos x$
$a = x$ et $b = y$ $\qquad \cos c = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

Donc $|f(t,x) - f(t,y)| \leq t|x-y| \leq T|x-y|$

Donc Euler progressif converge vers le problème de Cauchy sur $[0,T]$

pour (2) $\forall t>0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R} \quad |f(t,x)-f(t,y)| = |t^2+x+1-t^2-y-1| = |x-y|$

Donc Euler progressif converge vers le problème de Cauchy sur $[1,T]$

4. On considère le schéma suivant où h est le pas de temps supposé constant

$$\tilde{x}_n = x_n + h f(t_n, x_n)$$
$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n,x_n) + f(t_{n+1}, \tilde{x}_n)\right)$$

méthode d'Euler Heun (méthode des trapèzes)

a. Mettre ce schéma sous la forme générale d'un schéma explicite à un pas. (donner ϕ)

b. En supposant que f est assez régulière, montrer que le schéma est consistant d'ordre au moins 2

c. En supposant que f vérifie la propriété (L) de Lipschitz, montrer que le schéma est stable

solution

a. $x_{n+1} = x_n + h \cdot \frac{1}{2}\left(f(t_n,x_n) + f(t_n+h, x_n+hf(t_n,x_n))\right)$
$= x_n + h\,\phi(t_n, x_n, h)$

où $\phi(t,x,h) = \frac{1}{2}\left(f(t,x) + f(t+h, x+hf(t,x))\right)$

b. $\phi(t,x,0) = \frac{1}{2}\left(f(t,x) + f(t,x)\right) = f(t,x)$

donc le schéma est consistant d'ordre au moins 1

$$\frac{\partial \phi}{\partial h}(t,x,h) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t+h, x+hf(t,x)) + f(t,x)\frac{\partial f}{\partial x}(t+h, x+h)\right)$$

Donc $\frac{\partial \phi}{\partial h}(t,x,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + f(t,x)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right)$

$$= \frac{1}{2} Df(t,x)$$

Donc le schema est consistant d'ordre au moins 2.

On peut montrer qu'il n'est pas d'ordre 3.

c. Pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall h \leq h_{max}$

$$|\phi(t,x,h) - \phi(t,y,h)| = \frac{1}{2}\left| f(t,x) + f(t+h, x+hf(t,x)) - f(t,y) - f(t+h, y+hf(t,y))\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\left| f(t,x) - f(t,y)\right| + \left|f(t+h, x+hf(t,x)) - f(t+h, y+hf(t,y))\right|\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(L|x-y| + L|x+hf(t,x) - y + hf(t,y)|\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[L|x-y| + L|x-y| + L.h|f(t,x) - f(t,y)|\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[2L|x-y| + L^2.h|x-y|\right]$$

$$\leq \left(L + \frac{L^2 h_{max}}{2}\right)|x-y|$$

Donc le schema est stable.

Définition : On dit que le schéma est A-stable si et seulement si ce schéma appliqué au problème (TLS) donne une solution x_n vérifiant $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ quel que soit $L>0$ et quel que soit le pas de temps constant h.

(on dit aussi INCONDITIONNELLEMENT stable)

Remarques :

1. Un schéma A-stable est donc un schéma qui peut traiter les problèmes de n'importe quelle raideur sans condition sur le pas de temps.
2. La stabilité d'un schéma décrit la façon dont les erreurs s'accumulent sur un intervalle de temps borné $[t_0, t_0+T]$.
La A-stabilité décrit la façon dont les erreurs faussent le comportement de la solution pour $t \to +\infty$

Euler explicite est-il A-stable ?

Appliqué au (TLS) Euler progressif donne

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - hL\, x_n = (1-Lh)\, x_n & n \in \mathbb{N} \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n = (1-Lh)^n x_0$ donc

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ssi $|1-Lh|<1$ càd $-1<1-Lh<1$ (tjs vrai car L et $h>0$)

càd ssi $-2<-Lh$

" $Lh<2$ donc $h<\frac{2}{L}$

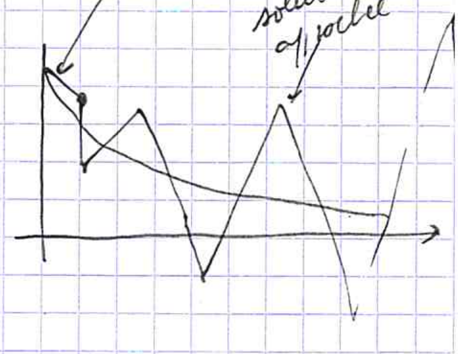
Donc Euler progressif n'est pas A-STABLE.

Il faut prendre h très petit si le problème est très raide.

Si on ne le fait pas $(1-Lh)^{2n} \to +\infty$

et $(1-Lh)^{2n+1} \to -\infty$

On obtient alors des (TRÈS FORTES !) oscillations.



De même, tous les schémas de RUNGE-KUTTA explicites ont des conditions sur le pas de temps dépendant de la raideur du problème. Ils ne sont donc pas A-STABLES.

A cause de cela, on a introduit d'autres schémas A-STABLES (mais plus difficiles à coder).

Le plus simple est:

__Euler IMPLICITE__ (= Euler RETROGRADE)

Pour chaque $n \geq 1$ on approche $\frac{dx}{dt}(t_n) = f(t_n, x(t_n))$

par $\frac{x_n - x_{n-1}}{h_{n-1}} = f(t_n, x_n)$ c'est à dire

$$x_n = x_{n-1} + h_n f(t_n, x_n) \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

On l'écrit plutôt:

$$x_{n+1} = x_n + h_n f(t_{n+1}, x_{n+1}) \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

Ce schéma est dit IMPLICITE parce qu'"il y a du x_{n+1} à droite"; à chaque itération le schéma définit une équation qu'il faut résoudre pour trouver x_{n+1}.

Mais Euler implicite est A-stable:

appliqué au (TLS) il donne

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - hL\, x_{n+1}, & n \in \mathbb{N} \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad x_{n+1}(1 + hL) = x_n$ donc

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + hL} x_n$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad x_n = \left(\frac{1}{1+hL}\right)^n x_0$

Or pour tout $h > 0$, pour tout $L > 0$ $\quad \frac{1}{1+hL} < 1$ donc $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Euler implicite est A-stable. Mais est-il convergent?

Exercice *4*. **Asymptotique, raideur & schéma implicite.**

Soit $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$ et $x_0 \in \mathbf{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad (\forall t \in \mathbf{R}_+,\ x'(t) = -ax(t) + b), \tag{1}$$

1. (a) Les solutions du problème homogène sont données par, pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, $x(t) = e^{-at}x(0)$. D'après la formule de Duhamel la solution de (1) est donc

$$x\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,, \quad t \mapsto e^{-at}\,x_0\ +\ \int_0^t e^{-a(t-s)}b\,\mathrm{d}s = x_0\,e^{-at}\ +\ \frac{b}{a}\,(1 - e^{-at})\,.$$

ou

Si $x : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ est dérivable, le problème (1) se récrit en termes de $y : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $t \mapsto e^{at}x(t)$ comme

$$y(0) = x_0 \quad \text{et} \quad (\forall t \in \mathbf{R}_+,\ y'(t) = e^{at}b), \tag{2}$$

puisque, dans ce cas, pour tout t, on a

$$y'(t) = e^{at}(x'(t) + ax(t))\,.$$

Or la solution y du problème (2) est donnée par, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$y(t)\ =\ x_0 + \int_0^t e^{as}b\,\mathrm{d}s = x_0\ +\ \frac{b}{a}\,(e^{at} - 1)\,.$$

La solution du problème (1) est donc

$$x\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,, \quad t \mapsto e^{-at}\,x_0\ +\ \int_0^t e^{-a(t-s)}b\,\mathrm{d}s = x_0\,e^{-at}\ +\ \frac{b}{a}\,(1 - e^{-at})\,.$$

ou

En cherchant une solution constante de l'équation différentielle on trouve

$$0\ =\ -a\,\frac{b}{a}\ +\ b\,.$$

En soustrayant, le problème (1) se récrit donc

$$x(0) - \frac{b}{a} = x_0 - \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \left(\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \left(x - \frac{b}{a}\right)'(t) = -a\,\left(x - \frac{b}{a}\right)(t)\right)\,.$$

La solution de (1) est donc donnée par, pour tout $t \in \mathbf{R}^+$,

$$x(t) - \frac{b}{a} = e^{-at}\left(x_0 - \frac{b}{a}\right)$$

c'est-à-dire

$$x(t) = \frac{b}{a} + e^{-at}\left(x_0 - \frac{b}{a}\right)\,.$$

(b) On a, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$x(t) = \Big(x_0 - \frac{b}{a}\Big) e^{-at} + \frac{b}{a} \qquad \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \qquad \frac{b}{a}\,.$$

2. Soit $h > 0$ un pas de temps.

(a) Notons $(t_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n\,h)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des temps d'approximation. Le schéma d'Euler explicite définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'approximations aux temps $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$x_0 = x_0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbf{N}\,,\ x_{n+1} = x_n \ + \ h(-a x_n + b))$$

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $x_{n+1} = (1 - ah)x_n + hb$. La formule de Duhamel donne donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} x_n &= (1-ah)^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1-ah)^{n-k}\, hb \\ &= (1-ah)^n x_0 + hb\, \frac{1^n - (1-ah)^n}{1-(1-ah)} \\ &= (1-ah)^n \left(x_0 - \frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a} \end{aligned}$$

car $1 - ah \neq 1$ puisque $ah > 0$.

ou

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $x_{n+1} = (1 - ah)x_n + hb$. En cherchant une solution constante de la relation de récurrence on trouve

$$\frac{b}{a} \ = \ (1-ah)\,\frac{b}{a} \ + \ hb\,.$$

En soustrayant, le schéma se récrit donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x_{n+1} - \frac{b}{a} \ = \ (1-ah)\left(x_n - \frac{b}{a}\right)\,.$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x_n \ = \ \frac{b}{a} \ + \ (1-ah)^n \left(x_0 - \frac{b}{a}\right)\,.$$

(c) Pour tout x_0, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \frac{b}{a}$ si et seulement si la suite $\left((1-ah)^n \left(x_0 - \frac{b}{a}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Vérifions par ailleurs que

$$\left(\forall x_0\,,\ \lim_{n\to+\infty} (1-ah)^n \left(x_0 - \frac{b}{a}\right) = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} (1-ah)^n = 0\right)\,.$$

L'implication $\Leftarrow$ est directe. L'implication $\Rightarrow$ s'obtient en choisissant $x_0 = \frac{b}{a} + 1$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left(\forall x_0\,,\ \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{t\to+\infty} x(t)\right) &\Longleftrightarrow |1-ah| < 1 \\ &\Longleftrightarrow -1 < 1 - ah < 1 \\ &\Longleftrightarrow -2 < -ah < 0 \\ &\Longleftrightarrow 0 < h < \tfrac{2}{a}\,. \end{aligned}$$

.

(d) Discrétisons $[0,10]$ avec $N+1$ points. Alors la taille du pas est $h = \frac{10}{N}$. Pour que la condition soit satisfaite, on doit avoir $\frac{10}{N} < \frac{2}{a}$ soit $N > 5a$. Il faut donc au moins $5a$ pas en temps. Lorsque $a = 100$, on doit effectuer au moins 500 pas.

(e) Le schéma d'Euler explicite définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'approximations aux temps $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$x_0 = x_0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbf{N}\,,\ x_{n+1} = x_n\ +\ h(-ax_{n+1} + b))$$

Remarquons que le schéma est bien défini car $1 + ah \neq 0$ puisque $1 + ah > 0$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $x_{n+1} = \frac{1}{1+ah} x_n + \frac{bh}{1+ah}$. La formule de Duhamel donne donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{1}{1+ah}\right)^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+ah}\right)^{n-k} \frac{bh}{1+ah} \\ &= \left(\frac{1}{1+ah}\right)^n x_0 + \frac{bh}{1+ah} \frac{1^n - \left(\frac{1}{1+ah}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{1+ah}\right)} \\ &= \left(\frac{1}{1+ah}\right)^n x_0 + \frac{b}{a}\left(1 - \left(\frac{1}{1+ah}\right)^n\right) \\ &= \left(\frac{1}{1+ah}\right)^n \left(x_0 - \frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a} \end{aligned}$$

car $\frac{1}{1+ah} \neq 1$ puisque $ah > 0$.

ou

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $x_{n+1} = \frac{1}{1+ah} x_n + \frac{bh}{1+ah}$. En cherchant une solution constante de la relation de récurrence on trouve

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{1+ah}\frac{b}{a} + \frac{bh}{1+ah}\,.$$

En soustrayant, le schéma se récrit donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x_{n+1} - \frac{b}{a} = \frac{1}{1+ah}\left(x_n - \frac{b}{a}\right)\,.$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x_n = \frac{b}{a} + \left(\frac{1}{1+ah}\right)^n \left(x_0 - \frac{b}{a}\right)\,.$$

Comme $a > 0$ et $h > 0$, on a $0 < \frac{1}{1+ah} < 1$. Cela implique que, quel que soit x_0 et la taille du pas $h > 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \frac{b}{a}$.

Exercice 5 Problèmes Hamiltoniens : l'oscillateur harmonique.

Soit $(x_0, p_0) \in \mathbf{R}^2$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = p_0, \quad \text{et} \quad (\forall t \in \mathbf{R}_+,\ x''(t) + x(t) = 0)\,. \tag{3}$$

1. On introduit $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x,p) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + p^2)$.

(a) Soit $x : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. Alors la théorie sur la réduction d'ordre nous donne que x est deux fois dérivable et résout le problème de Cauchy (3) si et seulement si x est dérivable et qu'il existe $p : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ dérivable tel que (x, p) résolve

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(0) \;=\; \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(t) \;=\; \begin{pmatrix} p(t) \\ -x(t) \end{pmatrix}\right).$$

Dans ce cas, rappelons que $p = x'$.

Or, pour tout $(x, p) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}H(x,p) \;=\; x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial p}H(x,p) \;=\; p\,.$$

Le problème de Cauchy (3) est donc équivalent au problème

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(0) \;=\; \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(t) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_p H(x(t), p(t)) \\ -\partial_x H(x(t), p(t)) \end{pmatrix}\right). \tag{4}$$

(b) Supposons que (x, p) est solution de (4). Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(H(x,p)\right)(t) \;=\; \partial_x H(x(t),p(t)) \underbrace{x'(t)}_{\partial_p H(x(t),p(t))} + \partial_p H(x(t),p(t)) \underbrace{p'(t)}_{-\partial_x H(x(t),p(t))} \;=\; 0\,.$$

Ainsi, comme $H(x(0), p(0)) = H(x_0, p_0)$, on en déduit

$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ H(x(t), p(t)) = H(x_0, p_0)\,.$$

2. Soit $h > 0$ un pas de temps.

(a) Notons $(t_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n\,h)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des temps d'approximation. Le schéma d'Euler explicite définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'approximations aux temps $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\forall n \in \mathbf{N}\,,\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ p_n \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} p_n \\ -x_n \end{pmatrix}\right).$$

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned} H(x_{n+1}, p_{n+1}) &= \tfrac{1}{2}(x_n^2 + p_n^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\Big((x_n + hp_n)^2 + (p_n - hx_n)^2\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}\Big(x_n^2 + 2hx_np_n + h^2p_n^2 + p_n^2 - 2hx_np_n + h^2p_n^2\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}(1+h^2)(x_n^2 + p_n^2) \\ &= (1+h^2)\ H(x_n, p_n)\,. \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$H(x_n, p_n) = (1+h^2)^n\, H(x_0, p_0)\,.$$

(c) Supposons $(x_0, p_0) \neq (0, 0)$ de sorte que $H(x_0, p_0) = \frac{1}{2}\|(x_n, p_n)\|^2 > 0$. Comme $1 + h^2 > 1$, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} H(x_n, p_n) = +\infty\,.$$

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\|(x_n, p_n)\| = \sqrt{2H(x_n, p_n)}$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \|(x_n, p_n)\| = +\infty\,.$$

Si en revanche $(x_0, p_0) = (0, 0)$, alors $H(x_0, p_0) = 0$ et l'on déduit pour tout $n \in \mathbf{N}$ $H(x_n, p_n) = 0$ donc $\|(x_n, p_n)\| = 0$.

(d) Le schéma d'Euler implicite définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'approximations aux temps $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\forall n \in \mathbf{N}\,,\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ p_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ -x_{n+1} \end{pmatrix}\right).$$

Remarquons que comme

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + h^2 \neq 0$$

le schéma est partout bien défini.

Puisque

$$\begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1+h^2}\begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{pmatrix}$$

le schéma se récrit

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\forall n \in \mathbf{N}\,,\ \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{1+h^2} x_n + \frac{h}{1+h^2} p_n \\ p_{n+1} = \frac{1}{1+h^2} p_n - \frac{h}{1+h^2} x_n \end{cases}\right).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a donc

$$\begin{aligned} H(x_{n+1}, p_{n+1}) &= \tfrac{1}{2}(x_{n+1}^2 + p_{n+1}^2) \\ &= \tfrac{1}{2(1+h^2)^2}\left[(x_n + h\,p_n)^2 + (p_n - h\,x_n)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{2(1+h^2)^2}(1+h^2)(x_n^2 + p_n^2) \\ &= \tfrac{1}{1+h^2} H(x_{n+1}, p_{n+1})\,. \end{aligned}$$

On déduit, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$H(x_n, p_n) = \left(\frac{1}{1+h^2}\right)^n H(x_0, p_0)\,.$$

Comme $1 + h^2 > 1$, on a $0 < \frac{1}{1+h^2} < 1$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} H(x_n, p_n) = 0$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \|(x_n, p_n)\| = 0\,.$$

3. On définit $H_{num} : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $(x, p, h) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + p^2 + h\,xp)$.

Soit $h > 0$ un pas de temps.

(a) Pour tout $(x, p, h) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$, on a $|xp| \leq \frac{x^2+p^2}{2} = H(x, p)$ donc

$$H_{num}(x, p, h) = \frac{1}{2}(x^2 + p^2) + \frac{1}{2}hxp \geq H(x, p) - \frac{1}{2}hH(x, p) = \left(1 - \tfrac{1}{2}h\right) H(x, p)$$

et

$$H_{num}(x, p, h) = \frac{1}{2}(x^2 + p^2) + \frac{1}{2}hxp \leq H(x, p) + \frac{1}{2}hH(x, p) = \left(1 + \tfrac{1}{2}h\right) H(x, p)\,.$$

D'où le résultat.

(b) À partir de x_0 le schéma définit (x_n) récursivement par

$$\forall n \in \mathbf{N}\,, \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + hp_n \\ p_{n+1} = p_n - hx_{n+1} \end{cases}$$

c'est-à-dire par

$$\forall n \in \mathbf{N}\,, \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + hp_n \\ hx_{n+1} + p_{n+1} = p_n \end{cases} .$$

Comme

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \neq 0$$

le schéma est partout bien défini.

(c) Puisque

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -h & 1 \end{pmatrix}$$

la relation de récurrence se récrit

$$\forall n \in \mathbf{N}\,, \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + hp_n \\ p_{n+1} = -hx_n + (1-h^2)p_n \end{cases} .$$

On déduit, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} H_{num}(x_{n+1}, p_{n+1}, h) &= \tfrac{1}{2}(x_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 + hx_{n+1}\,p_{n+1}) \\ &= \tfrac{1}{2}\Big[(x_n + hp_n)^2 + \big((1-h^2)p_n - hx_n\big)^2 \\ &\qquad + h(x_n + hp_n)\,\big((1-h^2)p_n - hx_n\big)\Big] \\ &= \tfrac{1}{2}\Big[(1+h^2)x_n^2 + (1-h^2+h^4)p_n^2 + 2h^3 x_n p_n \\ &\qquad + h(-hx_n^2 + (h-h^3)p_n^2 + (1-2h^2)x_n p_n)\Big] \\ &= H_{num}(x_n, p_n, h)\,. \end{aligned}$$

Par récurrence, on conclut donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H_{num}(x_n, p_n, h) = H_{num}(x_0, p_0, h)$

(d) On a déjà récrit le schéma comme un schéma à un pas

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\forall n \in \mathbf{N}\,, \ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ p_n \end{pmatrix} + h\,\Phi(t_n, (x_n, p_n)^T, h)\right) .$$

où le flux numérique est donné par

$$\Phi \ : \ \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^2\,, \quad (t, (x,p)^T, h) \mapsto \begin{pmatrix} p \\ -x - hp \end{pmatrix} .$$

Le flux numérique est Lipschitzchien donc le schéma est stable. Par ailleurs, comme Φ est Lipschitzien et que

$$\forall (t, x, h)\,, \ \Phi(t, (x,p)^T, 0) = \begin{pmatrix} p \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_p H(x,p) \\ -\partial_x H(x,p) \end{pmatrix} ,$$

le schéma est consistant d'ordre au moins 1. On déduit que le schéma est convergent et au moins d'ordre 1.