utbm
université de technologie
Belfort-Montbéliard

MT40 — Automne 2001

Examen final du 14 janvier 2002

Durée : deux heures

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

Dans les deux exercices, on peut admettre tout résultat antérieur pour poursuivre.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

Exercice 1 (Étude du schéma numérique de Gragg).
On étudie, dans cet exercice, la résolution numérique du problème différentiel avec condition de Cauchy

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ \forall t \in [0,T], \quad u'(t) = f\big(t, u(t)\big). \end{cases} \tag{1}$$

u_0 est un réel donné et f est de classe C^∞ sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ et vérifie l'hypothèse de Lipschitz

$$\forall t \in [0,T], \quad \forall y, z \in \mathbb{R}, \quad |f(t,y) - f(t,z)| \leq L\,|y - z|\,.$$

Pour cela, on utilise la méthode de Gragg ; on considère $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = T/N$, $t_n = nh$, pour $n \in \{0, ..., N\}$ et on définit les approximations U_n de $u(t_n)$ par

$$\begin{cases} U_0 = u_0, \\ U_1 = u_0 + hf(0, u_0), \\ \forall n \in \{1, ..., N-1\}, \quad U_{n+1} = U_{n-1} + 2hf(t_n, U_n)\,. \end{cases} \tag{2}$$

On admet que u est de classe C^∞ et on considère, pour $k \in \{2, 3\}$,

$$M_k = \max_{t \in [0,T]} \left| u^{(k)}(t) \right|.$$

1°) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que, si l'on considère les *erreurs de consistance* définies par

$$\varepsilon_0 = u\,(t_1) - u(0) - hf\,(0, u(0))\,,$$
$$\forall n \in \{1, ..., N-1\}, \quad \varepsilon_n = u\,(t_{n+1}) - u(t_{n-1}) - 2hf\big(t_n, u(t_n)\big),$$

alors, on a

$$|\varepsilon_0| \leq \frac{h^2}{2} M_2,$$

$$\forall n \in \{1, ..., N-1\}, \quad |\varepsilon_n| \leq \frac{h^3}{3} M_3.$$

2°) On note *l'erreur de convergence* définie par

$$\forall n \in \{0, ..., N\}, \quad v_n = |u(t_n) - U_n|.$$

Montrer que

$$\forall n \in \{1, ..., N-1\}, \quad v_{n+1} \leq v_{n-1} + 2hLv_n + |\varepsilon_n|. \tag{3}$$

3°) On **admet** *un lemme de Gronwall discret* suivant : Si θ_0, θ_1,...,θ_N α_1, ...,α_{N-1} sont des réels positifs ou nuls vérifiant

$$\forall n \in \{1, ..., N-1\}, \quad \theta_{n+1} \leq \theta_{n-1} + 2hL\theta_n + \alpha_n,$$

alors,

$$\forall n \in \{2, ..., N\}, \quad \theta_n \leq e^{(n-1)hL} \sqrt{\theta_0^2 + \theta_1^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e^{(n-i-1)hL}.$$

Déduire de ce résultat et de (3) que le schéma numérique (2) est convergent d'ordre deux, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que pour tout N,

$$\forall n \in \{0, ..., N\}, \quad |u(t_n) - U_n| \leq Ch^2.$$

On pourra d'abord montrer le résultat intermédiaire suivant

$$\forall n \in \{2, ..., N\}, \quad v_n \leq \frac{M_2}{2} h^2 e^{TL} + \frac{M_3}{3} h^3 \frac{e^{TL} - 1}{e^{hL} - 1}. \tag{4}$$

4°) *Application numérique*

On donne u_0 et f définis par

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ \forall t \in [0, 1], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(t, x) = x - 1. \end{cases} \tag{5}$$

Calculer la solution exacte u de (1).

5°) Calculer pour $N = 5$ et $N = 10$, les valeurs des solutions approchées $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$, définies par le schéma numérique (2).

6°) Déduire des deux questions précédentes les valeurs exactes de

$$w_N = \max_{0 \leq n \leq N} |u(t_n) - U_n|,$$

pour $N = 5$ et $N = 10$. Est-ce conforme aux résultats attendus ?

Exercice 2.

La méthode proposée dans cet exercice a été implémentée avec succès en milieu industriel (Peugeot) pour évaluer la période d'un signal périodique, dont on ne connaissait qu'un échantillonnage.

On considère a un réel quelconque et une fonction f, C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la condition suivante : il existe une constante M telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n)}(t)| \leq M. \tag{6}$$

1°) Dans cette question, on cherche à évaluer numériquement

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ où } x \in]a, a+2[. \tag{7}$$

a)

* Montrer que l'on peut fournir une valeur approchée de $A(x)$ par méthode de Gauss-Legendre.

* Grâce à un changement de variable, fournir l'évaluation conventionnelle de $A(x)$ qui sera effectivement évaluée par méthode Gaussienne.

b) On se propose de calculer $A(x)$ à ε près ($\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$) et on souhaite déterminer le nombre de points de support nécessaires. On note E_{n+1} l'erreur théorique commise.

b1) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |E_{n+1}| \leq MK^{2n+3} \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}, \tag{8}$$

où K est une constante appartenant à $[0, 1[$.

b2) On pose

$$u_n = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}. \tag{9}$$

* Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

* Montrer que cette suite tend vers zéro. Pour cette question, on pourra utiliser la formule de Stirling : quand n tend vers l'infini,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \tag{10}$$

b3) En déduire un algorithme *recherche-nbpoints* ($\varepsilon \to n_0$), qui à partir de ε de $\mathbb{R}_+^*$, fournit le plus petit entier n_0 tel que

$$|u_{n_0}| \leq \varepsilon. \tag{11}$$

On montrera que cet algorithme fournit toujours une solution.

2°) On considère désormais f définie par

$$f(t) = \alpha \sin(\omega t + \phi),$$

où les réels α, ω et ϕ existent mais ne sont pas nécessairement connus explicitement car on travaille en général sur des données discrètes dans les applications ; f peut représenter, par exemple, un signal (connu sur $]a, a+2[$).

On note T la période de f. On suppose de plus que

$$\omega < 1.$$

a) Montrer que f vérifie la condition (6).

b) Montrer que T est le plus petit réel de $]a, a+2[$ tel que $A(x) = 0$ (A définie par (7)).

c) En déduire le plan d'une méthode, utilisant les acquis de MT40 nettement cités, fournissant la valeur de T de façon approchée.