

Chapitre 1

ELECTROSTATIQUE DES MILIEUX DIÉLECTRIQUES

ETUDE MACROSCOPIQUE DES DIÉLECTRIQUES

1. INTRODUCTION. DÉFINITION DES DIÉLECTRIQUES

Les diélectriques sont des milieux *isolants et neutres*. Ils sont constitués d'atomes ou de molécules autours desquels gravitent des électrons. Ces derniers ne peuvent pas quitter les atomes et sont appelés *charges liées* ou *charge structurelles*. On notera donc que les diélectriques ne possèdent pas de charges libres contrairement aux conducteurs.

En présence d'un champ électrique, les seuls mouvements possibles sont de minuscules déplacements en sens contraires des charges négatives (électrons) et des charges positives (protons). Nous soulignons que ces déplacements sont très faibles par rapport aux dimensions atomiques (moins de $1\text{\AA}$). De tels déplacements induisent *des dipôles électriques induits* au sein du diélectrique.

Un diélectrique se comporte comme un ensemble de dipôles électriques qui s'orientent dans le sens du champ électrique extérieur. On dit que le diélectrique est *polarisé* par le champ.

Il existe des diélectriques (gazeux ou liquides) au sein desquels les atomes ou les molécules possèdent un moment dipolaire permanent (même en absence d'un champ électrique extérieur). Les molécules ou les atomes sont dit *polaires*.

Notons que lorsqu'un diélectrique creux est placé dans un champ électrique, l'expérience montre que le champ électrique n'est pas nul dans la cavité. Ceci prouve que le champ électrique traverse l'isolant d'où l'appellation "*diélectrique*" (dia : à travers).

La comparaison des propriétés des diélectriques et des conducteurs (métaux, électrolytes, gaz ionisés) permet de remonter aux constats suivants : les conducteurs sont des milieux qui possèdent *des charges libres* de se déplacer sous l'action d'un champ électrique. Ce déplacement est largement supérieur aux dimensions atomiques. D'autre part, lorsque l'équilibre électrostatique est réalisé, le champ électrique est nul à l'intérieur du conducteur. Par opposition aux diélectriques, le champ électrique ne pénètre pas à l'intérieur d'un conducteur.

C'est là une vision simplifiée des diélectriques car il existe des diélectriques qui sont constitués non pas de molécules, mais d'ions qui peuvent interagir avec un grand nombre d'autres ions.

2. ETUDE MACROSCOPIQUE DES DIÉLECTRIQUES

2.1. VECTEUR POLARISATION ÉLECTRIQUE $\mathbf{P}$

Considérons un diélectrique polarisé. On ne se préoccupe pas pour l'instant de la cause de la polarisation. Soit $\mathbf{p}$ le moment dipolaire moyen par molécule (ou atome ou encore ion). Du point de vue macroscopique, un élément de volume $d\tau$ du diélectrique polarisé est équivalent

(à grande distance par rapport aux dimensions de la molécule) à un dipôle dont le moment dipolaire $d\mathbf{p}$ est la somme vectorielle des moments élémentaires des molécules contenus dans le volume $d\tau$.

On en déduit que du point de vue macroscopique, un diélectrique polarisé se comporte comme une distribution volumique de dipôles dans le vide. Cette distribution est caractérisée, en un point Q , par le vecteur moment électrique par unité de volume ou **vecteur polarisation** (densité volumique de moments dipolaires électriques) :

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \quad (1)$$

Unité : le module $||\mathbf{P}||$ s'exprime en *coulomb par mètre carré* $\left(\frac{C}{m^2}\right)$.

Généralement, $\mathbf{P}$ dépend du point $Q(x', y', z')$ dans le milieu et du temps. Dans le cas où $\mathbf{P}$ est indépendant du point Q , on dit que la polarisation est **uniforme**.

REMARQUE

Dans le cas des diélectriques non polaires, si N est le nombre de molécules par unité de volume alors le vecteur polarisation électrique s'écrit :

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} \quad (2)$$

2.2. POTENTIEL ET CHAMP ÉLECTRIQUE CRÉÉS PAR UN DIÉLECTRIQUE POLARISÉ EN UN POINT EXTÉRIEUR

Considérons un diélectrique de volume τ limité par la surface S . Soit $\mathbf{P}$ le vecteur polarisation en un point $Q(x', y', z')$ du diélectrique. Chaque élément de volume $d\tau$ se comporte comme un dipôle élémentaire $d\mathbf{p} = \mathbf{P}d\tau$ (figure 1).

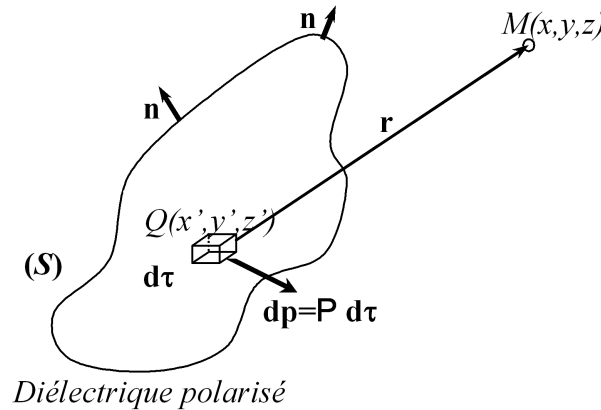


FIGURE 1

2.2.1. POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE CRÉÉ PAR UN DIÉLECTRIQUE POLARISÉ

En utilisant l'expression du potentiel créé par un dipôle (voir annexe et TD), le potentiel dV créé en un point éloigné $M(x, y, z)$ extérieur vaut :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{p} \cdot \overrightarrow{QM}}{QM^3} \quad \overrightarrow{QM} = \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\tau \quad d\tau = dx' dy' dz' \quad (4)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\mathbf{P} \cdot \vec{\nabla}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\tau = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\mathbf{P} \cdot \vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\tau \quad (5)$$

Le passage de l'équation (4) à l'équation (5) est justifié puisque :

$$\vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{r} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (6)$$

et

$$\vec{\nabla}_Q \left(\frac{1}{r} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x'} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y'} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z'} \mathbf{k} \right) \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (7)$$

Le potentiel créé par tout le volume τ du diélectrique en un point $M(x, y, z)$ extérieur est :

$$V(M) = \iiint_{\tau} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\mathbf{P} \cdot \vec{\nabla}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\tau \quad (8)$$

Or pour une fonction scalaire f et une fonction vectorielle $\mathbf{A}$ on a l'identité :

$$\vec{\nabla} \cdot (f\mathbf{A}) = f\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \vec{\nabla}(f) \quad (\text{ou} \quad \text{div}(f\mathbf{A}) = f\text{div}\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad}(f)) \quad (9)$$

En posant $f = \frac{1}{r}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{P}$, l'équation (8) devient :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \vec{\nabla}_Q \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} -\frac{\vec{\nabla}_Q \cdot \mathbf{P}}{r} d\tau \quad (10)$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \text{div} \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} -\frac{\text{div}\mathbf{P}}{r} d\tau \quad (11)$$

D'après le théorème de Green Ostrogradski (théorème de la divergence) on a :

$$\iiint_{\tau} \text{div}\mathbf{A} d\tau = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (12)$$

S étant la surface qui délimite le volume τ . $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface S et orienté vers l'extérieur du diélectrique.

On obtient finalement :

$$V(M) = \iint_S \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}}{4\pi\epsilon_0 r} + \iiint_{\tau} \frac{-\text{div}\mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0 r} d\tau \quad (13)$$

C'est le potentiel créé en un point extérieur par les dipôles du diélectrique polarisé.

REMARQUE : *Milieux diélectriques uniformément polarisés*

Le calcul direct du potentiel à l'aide de l'équation (4) devient simple puisque la polarisation $\mathbf{P}$ est indépendante des coordonnées de Q qui sont les variables d'intégration. L'équation (8) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} V(M) &= \iiint_{\tau} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\tau \\ &= \mathbf{P} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\mathbf{r}}{r^3} d\tau \right) \\ &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}^*(M) \end{aligned}$$

Où $\mathbf{E}^*(M)$ est un champ électrique fictif qui serait créé par une **densité de charge volumique unité** répartie dans le volume τ du diélectrique.

Si le diélectrique présente des géométries possédant des symétries particulières (exemple : sphère, barreau cylindrique ...), on utilise cette expression pour calculer le potentiel $V(M)$ et le champ électrique $\mathbf{E}(M)$ créé par le diélectrique (Voir TD).

2.2.2. LES DENSITÉS DE CHARGES LIÉES OU CHARGE DE POLARISATION ρ_{pol} ET σ_{pol} .

On constate qu'à l'extérieur du diélectrique, le potentiel créé par le diélectrique polarisé (équation 13) est la somme de deux potentiel créés par **deux distributions de charges fictives** placées dans le vide (ϵ_0) :

- Une distribution volumique de densité :

$$\rho_{pol} = -\text{div } \mathbf{P} = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) \quad (14)$$

- Une distribution surfacique de densité :

$$\sigma_{pol} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (15)$$

On peut donc écrire l'équation (13) sous la forme :

$$V(M) = \iint_S \frac{\sigma_{pol} \cdot dS}{4\pi\epsilon_0 r} + \iiint_{\tau} \frac{\rho_{pol} d\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (16)$$

On obtient l'équivalence suivante :

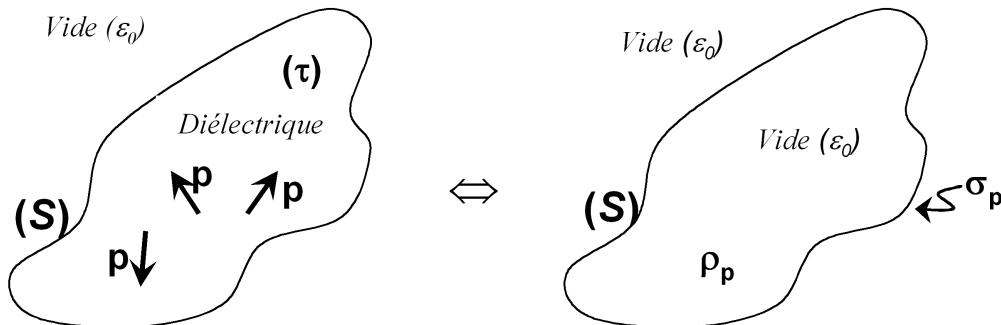


FIGURE 7

REMARQUE

1) On sait que le diélectrique est globalement neutre. En effet, la charge totale Q_{tot} est :

$$\begin{aligned} Q_{tot} &= \iiint_{\tau} \rho_{pol} d\tau + \iint_S \sigma_{pol} dS \\ &= \iiint_{\tau} -\text{div } \mathbf{P} d\tau + \iint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \\ &= 0 \quad (\text{théorème de la divergence}) \end{aligned}$$

2) Si le diélectrique est chargé par l'apport de charges étrangères à sa structure que l'on appelle *charges libres* avec des densités ρ_l et σ_l , le potentiel total s'écrit :

$$V(M) = \iint_S \frac{\sigma_{pol} + \sigma_l}{4\pi\epsilon_0 r} dS + \iiint_{\tau} \frac{\rho_{pol} + \rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} d\tau \quad (17)$$

3) Si la polarisation est uniforme $\mathbf{P} = \overrightarrow{cte}$ on a :

$$\rho_{pol} = -\text{div } \mathbf{P} = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{pol} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \neq 0$$

Seules les charges de polarisation de surface subsistent.

4) *Signification physique de ρ_{pol} et σ_{pol} :*

On peut montrer que les *charges de polarisation*, de densités ρ_{pol} et σ_{pol} ne sont pas seulement des “*charges fictives*” obtenues avec des équivalences mathématiques. Elles correspondent bien à *des densités réelles* qui résultent des excédents locaux (en volume et en surface) de charges liées du fait de la polarisation.

2.2.3. CHAMP ÉLECTRIQUE CRÉÉ PAR LE DIÉLECTRIQUE POLARISÉ.

Pour calculer le champ électrique, on utilise l'équivalence évoquée dans le paragraphe précédent. Ainsi on a :

- chaque élément de charge “ $\rho_{pol} d\tau$ ” contenue dans l'élément de volume $d\tau$ crée en M un champ électrique élémentaire $\frac{\rho_{pol} d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$ où $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ est le vecteur unitaire dirigé de l'élément de volume $d\tau$ vers le point M ;

- chaque élément de charge “ $\sigma_{pol} dS$ ” contenue dans l'élément de surface dS crée en M un champ électrique élémentaire $\frac{\sigma_{pol} dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$ où $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ est le vecteur unitaire dirigé de l'élément de surface dS vers le point M .

Le champ électrique à l'extérieur du diélectrique est donc donné par l'expression suivante :

$$\mathbf{E}(M) = \iint_S \frac{\sigma_{pol} dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r + \iiint_{\tau} \frac{\rho_{pol} d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (18)$$

REMARQUE

1) Si on connaît le potentiel $V(M)$ créé par le diélectrique polarisé, on peut tout simplement utiliser la relation $\mathbf{E}(M) = -\vec{\nabla}_M V(M)$ pour calculer l'expression de $\mathbf{E}$.

2) Si on introduit des charges libres dans le diélectrique, l'expression de $\mathbf{E}$ devient :

$$\mathbf{E}(M) = \iint_S \frac{(\sigma_{pol} + \sigma_l) dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r + \iiint_{\tau} \frac{(\rho_{pol} + \rho_l) d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (19)$$

2.3. CHAMP ÉLECTRIQUE À L'INTÉRIEUR DU DIÉLECTRIQUE.

A l'intérieur du diélectrique, le champ électrique varie rapidement à la fois en fonction du temps et de la position. En effet, l'agitation thermique des molécules produit des fluctuations au cours du temps du champ en un point donné. D'autre part, le champ n'est pas le même sur la surface des noyaux.

De ce fait, on parle du **champ électrique macroscopique $\mathbf{E}$** qui est en fait la valeur moyenne dans l'espace et dans le temps de ce champ. Pour calculer ce champ en un point M du diélectrique, considérons la figure 8 qui représente une petite sphère imaginaire de rayon R centrée en M . Le diélectrique est donc représenté par la sphère de volume τ'' (de surface S'') et le volume τ' (de surface extérieure S').

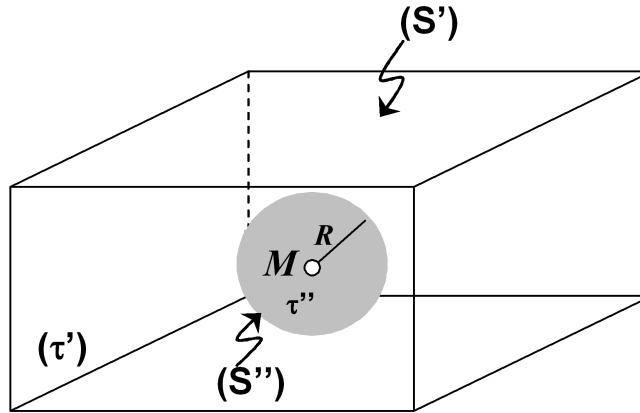


FIGURE 8

Ainsi le champ macroscopique créé en M par les dipôles du diélectrique est la somme de deux termes $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}''$:

$\mathbf{E}'$ étant le champ créé par les molécules (dipôles) éloignées extérieures à S'' ;

$\mathbf{E}''$ est le champ créé par les molécules (dipôles) situées à l'intérieures de S'' et qui sont proches de M .

2.3.1. CHAMP ÉLECTRIQUE $\mathbf{E}'$ DÛ AUX DIPÔLES ÉLOIGNÉS.

Utilisons les distributions de charges de polarisation de densités ρ_{pol} et σ_{pol} . Les charges de polarisations accumulées dans le volume τ' et sur les surfaces S' et S'' créeront un champ en M :

$$\mathbf{E}'(M) = \iiint_{\tau'} \frac{\rho_{pol} d\tau'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r + \iint_{S'} \frac{\sigma_{pol} dS'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r + \iint_{S''} \frac{\sigma_{pol} dS''}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (20)$$

On montre (cf TD) que le troisième terme vaut :

$$\iint_{S''} \frac{\sigma_{pol} dS''}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (21)$$

2.3.2. CHAMP ÉLECTRIQUE $\mathbf{E}''$ DÛ AUX DIPÔLES PROCHES

Avec une bonne approximation, on peut considérer que la polarisation électrique $\mathbf{P}$ est uniforme dans la petite sphère. On montre (cf TD) que dans ce cas :

$$\mathbf{E}'' = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \quad (22)$$

On en déduit d'après ce qui précède le champ macroscopique total en M :

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}' + \mathbf{E}'' = \iiint_{\tau'} \frac{\rho_{pol}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\tau'}{r^2} \mathbf{e}_r + \iint_{S'} \frac{\sigma_{pol}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dS'}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (23)$$

Si $\tau = \tau' \cup \tau''$ est le volume total du diélectrique, on peut écrire :

$$\iiint_{\tau} \frac{\rho_{pol}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\tau}{r^2} \mathbf{e}_r = \iiint_{\tau'} \frac{\rho_{pol}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\tau'}{r^2} \mathbf{e}_r + \iiint_{\tau''} \frac{\rho_{pol}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\tau''}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (24)$$

En effet, $\iiint_{\tau''} \frac{\rho_{pol}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\tau''}{r^2} \mathbf{e}_r = 0$ qui est en fait le champ créé par la charge contenue dans la sphère S'' au point M (centre de la sphère S'').

L'expression (23) du champ en un point M à l'intérieur du diélectrique devient :

$$\mathbf{E}(M) = \iiint_{\tau} \frac{\rho_{pol}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\tau}{r^2} \mathbf{e}_r + \iint_{S'} \frac{\sigma_{pol}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dS'}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (25)$$

C'est bien l'expression déjà établit à l'extérieur du diélectrique (équation (18)).

“Finalement, pour calculer le champ électrique créé par un diélectrique polarisé que ça soit à l'intérieur ou à l'extérieur, on peut remplacer le diélectrique par une distribution volumique de charge “ $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} = -\text{div} \mathbf{P}$ ” et une distribution de surface “ $\sigma_{pol} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ ” toute deux placées dans le vide (ε_0)”.

REMARQUE

Si le diélectrique est chargé par l'apport de charges étrangères à sa structure, appelées *charges libres* de densités ρ_l et σ_l , le champ créé en chaque point est donné par :

$$\mathbf{E}(M) = \iiint_{\tau} \frac{(\rho_{pol} + \rho_l)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\tau}{r^2} \mathbf{e}_r + \iint_{S'} \frac{(\sigma_{pol} + \sigma_l)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dS'}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (26)$$

2.4. EQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTROSTATIQUE EN PRÉSENCE DE DIÉLECTRIQUES

2.4.1. VECTEUR DÉPLACEMENT ÉLECTRIQUE $\mathbf{D}$

Dans le cas des diélectriques polarisés contenant des charges libres (de densité ρ_l), le théorème de Gauss est décrit sous sa forme locale par l'équation :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{pol} + \rho_l}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{\rho_l}{\varepsilon_0} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_l \quad \text{ou} \quad \operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_l$$

$$\text{On pose} \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho_l \quad (28)$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (29)$$

$\mathbf{D}$ est appelé *vecteur déplacement électrique*.

Le module $\|\mathbf{D}\|$ s'exprime comme $\|\mathbf{P}\|$ en *Coulomb par mètre carré* (C/m^2)

En appliquant le théorème de la divergence à l'équation (28), on obtient le théorème de Gauss sous sa forme intégrale :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{D} \, d\tau = \iiint_{\tau} \rho_l \, d\tau = Q_l \quad (30)$$

Où Q_l est la charge libre contenue dans S .

L'équation (30) traduit *le théorème de Gauss* sous sa forme intégrale :

“Le flux du vecteur déplacement $\mathbf{D}$ à travers une surface fermée est égal à la somme des charges libres contenues à l'intérieur de cette surface”.

Le théorème de gauss (équation (30)) permet de calculer $\mathbf{D}$. Notons que ce calcul fait intervenir uniquement les charges libres.

REMARQUE

1) Méthodes de calcul de $\mathbf{D}$ ou $\mathbf{E}$

Il existe trois méthodes de calcul :

- La méthode directe en considérant une distribution de dipôle $\mathbf{P}$. On calcul V ensuite $\mathbf{E}$ et puis $\mathbf{D}$;
- On utilise les charges de polarisation ρ_{pol} et σ_{pol} ;
- On applique le théorème de Gauss au vecteur $\mathbf{D}$.

2) Le champ électrique créé par un diélectrique polarisé dérive d'un potentiel : $\mathbf{E} = -\vec{\nabla}V$.
On en déduit qu'en tout point :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \vec{\nabla} \wedge \mathbf{E} = \vec{0} \quad (31)$$

3) Pour un diélectrique polarisé et non chargé ($\rho_l = 0$ et $\sigma_l = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$). On dit que $\mathbf{D}$ est à *flux conservatif*.

2.4.2. CONDITIONS DE CONTINUITÉ À LA SURFACE DE SÉPARATION DE DEUX MILIEUX

On se propose de déterminer les relations entre les valeurs des champ $\mathbf{E}$ (ou $\mathbf{D}$) de part et d'autre de la surface de séparation (S) de deux milieux différents.

Considérons le cas général de deux milieux (1) et (2) portant des densités de charges volumiques libres ρ_{l1} et ρ_{l2} . On suppose que la surface de séparation contient une charge surfacique σ_l .

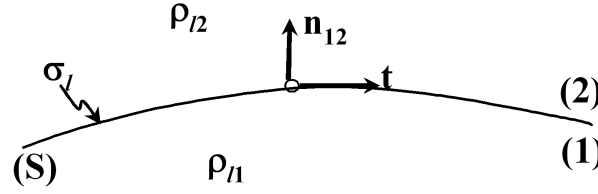


FIGURE 9

On se place au voisinage de la surface de séparation. Dans le milieu (1) $\mathbf{D}_1 = D_{1n} \mathbf{n}_{12} + D_{1t} \mathbf{t}$ et dans le milieu (2) $\mathbf{D}_2 = D_{2n} \mathbf{n}_{12} + D_{2t} \mathbf{t}$.

2.4.2.1. DISCONTINUITÉ DE LA COMPOSANTE NORMALE DU VECTEUR DÉPLACEMENT $\mathbf{D}$

Appliquons le théorème de Gauss sur un cylindre de hauteur $2h$ infiniment petite et dont les deux bases ont des surfaces respectives S_{b1} (du côté du milieu (1)) et S_{b2} (du côté du milieu (2)) figure 10. S_{b1} et S_{b2} sont considérées petites de sorte que D_{1n} et D_{2n} soient constants sur les deux bases. Soit $Q_l = \sigma_l S_b$ la charge libre à l'intérieur du cylindre. Notons que $S_b = S_{b1} = S_{b2}$.

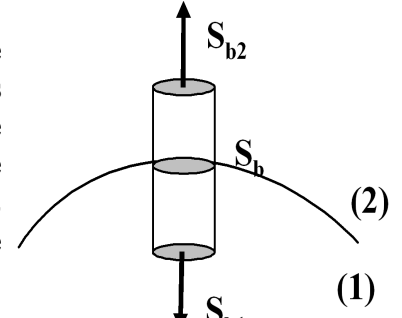


FIGURE 10

Le flux sortant du vecteur $\mathbf{D}$ à travers la surface du cylindre est :

$$\begin{aligned} \phi &= \oiint_S \overbrace{\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}^{d\phi} \\ &= \iint_{S_{b2}} \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S}_{b2} + \iint_{S_{b1}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S}_{b1} + \phi_{\text{latéral}} \\ &= D_{2n} S_{b2} - D_{1n} S_{b1} + \phi_{\text{latéral}} \end{aligned}$$

Comme

$$\phi = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_l = \sigma_l S_b \quad \text{et} \quad \phi_{\text{latéral}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma_l \quad \text{ou} \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma_l \quad (32)$$

L'équation (32) montre qu'il y a discontinuité de la composante normale du vecteur déplacement $\mathbf{D}$ s'il y a présence de charges libres de surface σ_l .

REMARQUE

En combinant les équations (29) et (32) on obtient :

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma_l \Rightarrow \varepsilon_0 (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} + (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma_l$$

$$\text{comme} \quad \sigma_{pol} = \sigma_{pol 1} + \sigma_{pol 2} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_{12} + \mathbf{P}_2 \cdot (-\mathbf{n}_{12})$$

$$\text{donc} \quad (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{\sigma_l + \sigma_{pol}}{\varepsilon_0} \quad (33)$$

$$\text{ou bien} \quad E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma_l + \sigma_{pol}}{\varepsilon_0}$$

2.4.2.2. CONTINUITÉ DE LA COMPOSANTE TANGENTIELLE DE $\mathbf{E}$

On a $\text{rot } \mathbf{E} = \vec{\nabla} \wedge \mathbf{E} = \vec{0}$. D'après le théorème de Stokes :

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad C \text{ contours fermé s'appuyant sur } S$$

Considérons comme contours C un rectangle $ABCD$ de longueur L , parallèle à la surface de séparation, suffisamment faible (de sorte que $\mathbf{E}$ soit pratiquement constant sur L) et de largeur ℓ infiniment petite (de sorte qu'on reste au voisinage de la surface de séparation chargée)(figure 11).

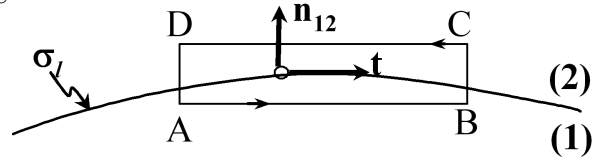


FIGURE 11

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{AB} \mathbf{E}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \int_{CD} \mathbf{E}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 + \underbrace{\int_{BC} \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{DA} \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell}}_{=0 \text{ car } BC=DA=\ell \rightarrow 0} \\ &= E_{1t} L - E_{2t} L \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalement

$$E_{1t} = E_{2t} \implies \text{Il y a continuité de la composante tangentielle de } \mathbf{E} \quad (34)$$

REMARQUE

Une autre écriture équivalente souvent utilisée :

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{t} = 0 \iff (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \wedge \mathbf{n}_{12} = 0 \quad (35)$$

2.5. MILIEUX DIÉLECTRIQUES PARFAITS (linéaires, homogènes et isotropes-**l.h.i.**-)

Considérons un diélectrique parfait, c'est-à-dire :

◇ **linéaire** : en chaque point du milieu, chaque composante cartésienne du vecteur polarisation est une forme linéaire des composantes du vecteur champ électrique au point considéré. Cela se traduit par l'équation :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (36)$$

◊ **homogènes** : mêmes constituants chimiques en tout point du milieu. Dans ce cas, les coefficients k_{lm} ne dépendent pas du point considéré, pour un repère cartésien déterminé.

◊ **isotropes** : mêmes propriétés physiques dans toutes les directions. Les coefficients k_{lm} vérifient : $k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = k$ quelque soit le repère et $k_{lm} = 0$ pour $l \neq m$.

En résumé, en tout point d'un diélectrique parfait (**l.h.i.**) $\mathbf{P}$ et $\mathbf{E}$ sont colinéaires :

$$\mathbf{P} = k \mathbf{E} \quad \text{avec } k \text{ constante positive} \quad (37)$$

REMARQUE

Les diélectriques réels solides s'écartent toujours plus ou moins de cette définition, tandis que les diélectriques gazeux se comportent très sensiblement comme des diélectriques parfaits.

2.5.1. SUSCEPTIBILITÉ ET PERMITTIVITÉ ÉLECTRIQUES

Dans un diélectrique parfait (**l.h.i.**), on pose $k = \varepsilon_0 \chi_e$.

On obtient alors :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (38)$$

χ_e est appelée **susceptibilité diélectrique**. C'est un coefficient sans dimension.

D'autre part :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \mathbf{E}$$

On pose $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$. Ce coefficient sans dimension est appelé **permittivité relative** du diélectrique.

On a alors :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (39)$$

Le coefficient ε est appelé **permittivité** du diélectrique. Il s'exprime en *Farad par mètre* (comme ε_0).

L'expérience montre que pour tous les diélectriques réels, $\varepsilon > \varepsilon_0$. D'où $\varepsilon_0(1 + \chi_e) > \varepsilon_0$ et $1 + \chi_e > 1$ ou $\chi_e > 0$. De ce fait $\mathbf{E}$ et $\mathbf{P}$ ont même sens.

EXEMPLE

Liquide (20°C)	ε_r	Solide	ε_r	Gaz (20°C)	ε_r
Eau	~80,3	Glace	~ 12	Air sec	1,0006
Ethanol	~ 25,1	NaCl cristallisé	~ 6,12	Hydrogène	1,228
Acétone	~ 21,2	Mica	6,9 à 7,3	Oxygène	1,507
Acide acétique	~ 6,15	Papier	2 à 2,8		
		Céramique	10 à 3×10^4		
		Verre	6 à 8		

2.5.2. EQUATIONS GÉNÉRALES

2.5.2.1. CAS OÙ IL Y A DES CHARGES LIBRES

Considérons un diélectrique dans lequel ont été introduites des charges libres de densité volumique ρ_l . Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{rot } \mathbf{E} = \vec{0} \xrightarrow{\text{Théorème de Stokes}} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (40)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_l \xrightarrow{\text{Th. Ostrogradski}} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\tau} \rho_l d\tau = Q_l \quad (41)$$

Les conditions aux limites sont identiques à celles décrites au paragraphe 2.4.2. :

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma_l \quad \text{et} \quad (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \wedge \mathbf{n}_{12} = \vec{0}$$

D'autre part, le potentiel vérifie la relation locale :

$$\Delta V = -\frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho_l - \text{div } \mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\text{comme} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \mathbf{D}$$

$$\text{d'où} \quad \text{div } \mathbf{P} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \text{div } \mathbf{D} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \rho_l$$

Finalement, on obtient **l'équation de Poisson** dans un diélectrique **l.h.i.** :

$$\Delta V = -\frac{\rho_l}{\varepsilon} \quad (42)$$

REMARQUE

on a :

$$\rho_{pol} = -\text{div } \mathbf{P} = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \rho_l \quad (43)$$

$$\rho_{pol} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \rho_l \quad (44)$$

C'est la relation qui existe entre ρ_{pol} et ρ_l pour un diélectrique parfait **l.h.i.** contenant des charges libres.

La densité totale de charge est : $\rho_{tot} = \rho_l + \rho_{pol} = \frac{\rho_l}{\varepsilon_r} < \rho_l$

2.5.2.2. CAS OÙ IL N'Y A PAS DE CHARGES LIBRES

a. CALCUL DES CHARGES DE POLARISATION

Conformément à l'équation (44), On a :

$$\rho_{pol} = 0 \quad (45)$$

Pour un diélectrique *l.h.i.* dépourvu de charges libres, Il n'existe pas de charge de polarisation volumique $\rho_{pol} = 0$.

d'autre part :

$$\begin{aligned}\sigma_{pol} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} \\ \sigma_{pol} &= (\varepsilon - \varepsilon_0) E_n\end{aligned}\quad (46)$$

En absence de charges libres, seules les charges de polarisation de surface apparaissent dans le diélectrique.

b. RÉFRACTION DES LIGNES DU CHAMP $\mathbf{D}$

Considérons deux milieux (1) et (2) (*l.h.i.* de permittivités respectives ε_1 et ε_2) ne contenant pas de charges libres et séparés par une surface S .

En absence de charges libres, les équations deviennent alors :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = \vec{0} \quad \mathbf{div} \mathbf{D} = 0 \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0 \quad \text{et} \quad (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \wedge \mathbf{n}_{12} = \vec{0} \quad (47)$$

Il y a donc continuité de la composante normale de $\mathbf{D}$ et de la composante tangentielle de $\mathbf{E}$ respectivement au niveau de la surface de séparation (S) (figure 12).

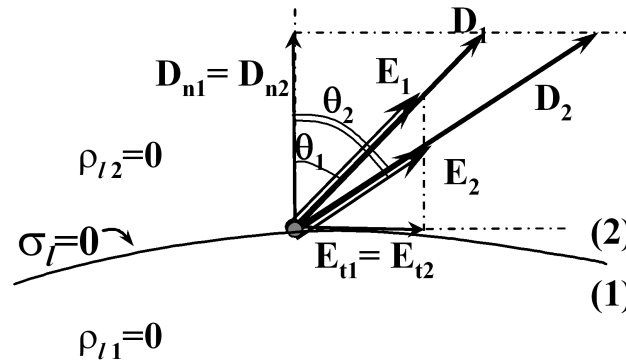


FIGURE 12

En tenant comptes des notations de la figure (12), les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \overbrace{E_1 \sin \theta_1}^{E_{1t}} = \overbrace{E_2 \sin \theta_2}^{E_{2t}} \\ \overbrace{D_1 \cos \theta_1}^{D_{1n}} = \overbrace{D_2 \cos \theta_2}^{D_{2n}} \end{cases} \quad (48)$$

$$\text{D'où} \quad \underbrace{\frac{E_1}{D_1}}_{1/\varepsilon_1} \tan \theta_1 = \underbrace{\frac{E_2}{D_2}}_{1/\varepsilon_2} \tan \theta_2 \implies \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (49)$$

On dit qu'il y a réfraction des lignes du champ $\mathbf{D}$.

REMARQUE

Dans le cas où le milieu (2) est le vide $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$, on a :

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} < 1 \implies \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} < 1 \quad \text{d'où} \quad \theta_2 < \theta_1$$

Les lignes de $\mathbf{D}$ se rapprochent de la normale quand on passe d'un diélectrique au vide.

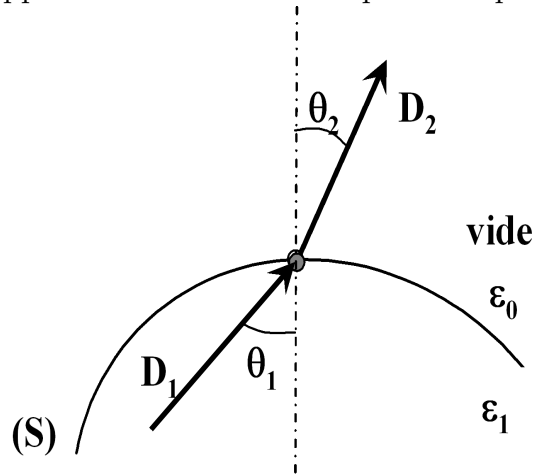


FIGURE 13

2.5.3 CHAMP DÉPOLARISANT

Si un diélectrique parfait (dépourvu de charges libres) est placé dans un champ extérieur $\mathbf{E}_0$, il se polarise et le champ effectif total dans le diélectrique est $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p$.

$\mathbf{E}_p$ est le champ dépolarisant créé par les charges de polarisation.

Dans certains cas $\mathbf{E}_p$ est opposé à la polarisation et vaut : $\mathbf{E}_p = -k \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$. Le coefficient k est appelé *facteur dépolarisant*.

Pour une sphère diélectrique placée dans un champ uniforme (par exemple), on montre (cf. TD) que $\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$.

3. ENERGIE POTENTIELLE ÉLECTROSTATIQUE D'UNE DISTRIBUTION DE CHARGES EN PRÉSENCE D'UN DIÉLECTRIQUE

Définition :

L'énergie électrostatique d'un système isolé chargé ($\mathcal{S}$) est égale au travail des forces extérieures pour apporter par un déplacement réversible les charges de l'infini, où elles sont considérées comme étant isolées les unes des autres, jusqu'à leur position actuelle.

On montre que dans le cas d'une distribution continue de charges ρ_l , cette énergie s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho_l(x, y, z) V(x, y, z) d\tau \quad d\tau = dx dy dz \quad (50)$$

Où V est le potentiel électrostatique. τ est le volume qui contient tous les charges libres du système ($\mathcal{S}$).

S'il y a des diélectriques autour de la distribution de charge ρ_l , l'expression de l'énergie potentielle électrostatique reste la même que celle de l'équation (50).

On remarquera que les charges induites par polarisation (ρ_{pol} et σ_{pol}) dans le diélectrique n'interviennent pas explicitement car elles ne sont pas transportées depuis l'infini, mais créées sur place.

$$\text{On a } \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_\ell \implies W = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} V \operatorname{div} \mathbf{D} \, d\tau$$

Or en dehors des charges libres, on a $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$. L'intégrale peut être étendue à tout l'espace :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} V \operatorname{div} \mathbf{D} \, d\tau = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} V \operatorname{div} \mathbf{D} \, d\tau \quad (51)$$

Utilisons l'identité vectorielle : $\operatorname{div} (V \mathbf{D}) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{grad} V + V \operatorname{div} \mathbf{D}$.

$$\text{Il vient } W = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \operatorname{div} (V \mathbf{D}) \, d\tau - \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{grad} V \, d\tau \quad (52)$$

$$\text{Or } \mathbf{E} = -\mathbf{grad} V \implies W = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \operatorname{div} (V \mathbf{D}) \, d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau \quad (53)$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky (théorème de la divergence), on obtient :

$$W = \frac{1}{2} \oint_S V \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau \quad (54)$$

S est la surface délimitant l'espace.

Supposons que la surface S est une sphère de rayon r avec $r \rightarrow \infty$ (tout l'espace). On a alors :

$$V \sim \frac{1}{r}, \quad \|\mathbf{D}\| = \|\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}\| \sim \frac{1}{r^2}, \quad dS \sim r^2 \implies V \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \sim \frac{1}{r} \frac{1}{r^2} r^2 \sim \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

L'expression de l'énergie électrostatique devient alors :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau \quad (55)$$

Cette expression est générale et ne dépend pas du type de diélectrique qui entoure le système de charges libres.

Comme dans le vide, nous pouvons définir *une densité d'énergie électrostatique* :

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (56)$$

CAS PARTICULIER : DIÉLECTRIQUE PARFAIT (*l.h.i.*)

$$\text{On a } \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \implies W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 \, d\tau \quad (57)$$

On en déduit la densité d'énergie électrostatique :

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad (58)$$

REMARQUE

- Dans le vide, la densité d'énergie électrostatique vaut $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$.
- En présence de diélectrique *l.h.i.*, la densité devient :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \varepsilon E^2 &= \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}
 \end{aligned} \tag{59}$$

On remarque que la densité d'énergie électrostatique est la somme de deux termes : le premier terme constitue la densité d'énergie dans le vide (en absence du diélectrique). Le deuxième terme est dû à la présence du diélectrique polarisé.

APPLICATION : Condensateur plan isolé par un diélectrique parfait (*l.h.i.*)

Considérons un condensateur plan rempli de diélectrique parfait. On porte les armatures aux potentiels V_1 et V_2 . Soit " e " la distance séparant les armatures et " S " leur surface.

L'énergie emmagasinée dans le condensateur vaut :

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon E^2 d\tau = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 S e \quad \text{car } E = \frac{V_1 - V_2}{e} \text{ (constant)} \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon S e \left(\frac{V_1 - V_2}{e} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2
 \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de la capacité du condensateur en présence du diélectrique :

$$C = \frac{\varepsilon S}{e} = \varepsilon_r C_0 \tag{60}$$

où $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$ est la capacité du condensateur en absence du diélectrique.

Notons que la présence du diélectrique augmente la capacité du condensateur ($C \gg C_0$), ce qui est très utile dans la pratique.

4. FORCE AGISSANT SUR LES DIÉLECTRIQUES PLACÉS DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE

Soit un dipôle $\mathbf{p}$ placé dans un champ électrique $\mathbf{E}$. Deux cas sont à considérer :

◇ CAS OÙ $\mathbf{E}$ EST UNIFORME

- La force totale agissant sur le dipôle est nulle.
- Le dipôle subit un couple de moment : $\Gamma = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}$

◇ CAS OÙ $\mathbf{E}$ EST NON UNIFORME

La force totale n'est plus nulle. En effet, les extrémités du dipôle sont soumises à des forces différentes.

$$\mathbf{F} = \underbrace{-Q\mathbf{E}}_{\text{force sur } -Q} + \underbrace{Q(\mathbf{E} + d\mathbf{E})}_{\text{force sur } Q}$$

La composante suivant x de la force s'exerçant sur le dipôle vaut :

$$\begin{aligned} F_x &= -Q E_x + Q(E_x + dE_x) \quad \text{avec} \quad dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} \underbrace{dx}_{d\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \underbrace{dy}_{d\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \underbrace{dz}_{d\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} \underbrace{Q d\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}}_{p_x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \underbrace{Q d\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}}_{p_y} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \underbrace{Q d\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}_{p_z} \quad \text{car } \mathbf{p} = Q d\mathbf{r} \end{aligned}$$

D'où

$$F_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} p_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} p_y + \frac{\partial E_x}{\partial z} p_z \quad (61)$$

De même

$$F_y = \frac{\partial E_y}{\partial x} p_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} p_y + \frac{\partial E_y}{\partial z} p_z \quad (62)$$

$$F_z = \frac{\partial E_z}{\partial x} p_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} p_y + \frac{\partial E_z}{\partial z} p_z \quad (63)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) \\ \mathbf{F} &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{E} \end{aligned} \quad (64)$$

C'est la force exercée sur un seul dipôle.

Pour un diélectrique contenant N dipôles par unité de volume, la force par unité de volume du diélectrique (*densité volumique de force*) est :

$$\mathbf{f} = N(\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{E} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{E} \quad (65)$$

CAS D'UN DIÉLECTRIQUE PARFAIT *l.h.i.*

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} \implies \mathbf{f} = (\varepsilon - \varepsilon_0) (\mathbf{E} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{E}$$

La composante de $\mathbf{f}$ suivant x est :

$$f_x = (\varepsilon - \varepsilon_0) \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (66)$$

Pour un champ électrostatique (champ statique indépendant du temps) on a :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = \vec{\nabla} \wedge \mathbf{E} = \vec{0} \implies \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases}$$

Il vient

$$\begin{aligned} f_x &= (\varepsilon - \varepsilon_0) \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\partial}{\partial x} E^2 \end{aligned} \quad (67)$$

Finalement, la force par unité de volume à l'intérieur du diélectrique vaut :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{grad} E^2 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \mathbf{grad} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 \right) \quad (68)$$

Cette force est dirigée vers les régions où l'amplitude de $\mathbf{E}$ augmente et son sens ne change pas si on inverse le sens de $\mathbf{E}$