

Chapitre 3

MAGNÉTOSTATIQUE DES MILIEUX MAGNÉTIQUES

ETUDE MACROSCOPIQUE DES MILIEUX MAGNÉTIQUES

1. INTRODUCTION.

Les corps magnétiques sont connus depuis l'Antiquité (la magnétite : Fe_3O_4). Des corps peuvent acquérir une aimantation soit par frottement contre un aimant naturel ou par application d'un champ magnétique. On parle alors d'une *aimantation induite*. Le fer doux en est un exemple. D'autre corps peuvent présenter une aimantation même en absence de champ magnétique. On parle d'une *aimantation permanente*. L'acier est un bon exemple.

Historiquement, les premières explications du magnétisme ont été entamée au début du 19ème siècle :

- Expérience d'Oersted (1819) : un courant électrique crée un champ magnétique ;
- En 1825, Ampère tente d'interpréter le magnétisme de la matière en assimilant les molécules (ou les atomes) à des boucles de courants appelées *courants particuliers*.

Au début du 20ème siècle, la mécanique quantique a montré que l'origine du magnétisme dans la matière est lié à deux phénomènes :

- Les mouvement orbitaux des électrons autour des atomes sont assimilables à des petites boucles de courant (dipôles magnétiques) donnant ainsi un magnétisme dit "*orbital*" ;
- d'autre part, chaque électron possède un *moment intrinsèque* donnant un magnétisme dit de "*spin*".

D'un point de vu macroscopique, une substance aimantée se comporte alors comme une répartition en volume de boucles de courants (dipôles magnétiques) placées dans le vide. Cette hypothèse est appelée "Approximation dipolaire".

2. ETUDE MACROSCOPIQUE DES MILIEUX AIMANTÉS

2.1. VECTEUR AIMANTATION

Considérons un milieu aimanté de volume τ et de surface S . Chaque élément de volume $d\tau$ est équivalent à un dipôle magnétique de moment $d\mathbf{m}$.

Le vecteur aimantation est défini par le moment magnétique par unité de volume :

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{d\tau} \quad (1)$$

Unité du module $||\mathbf{M}||$ est "Ampère/mètre" puisque $||d\mathbf{m}||$ est en " $A \cdot m^2$ ".

2.2. POTENTIEL VECTEUR ET CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN MILIEU AIMANTÉ

2.2.1. A L'EXTÉRIEUR DU MILIEU AIMANTÉ

Soit $\mathbf{M}(Q)$ le vecteur aimantation en $Q(x', y', z')$. Le moment dipolaire magnétique du volume élémentaire $d\tau$ en Q est :

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M}(Q) d\tau \quad (2)$$

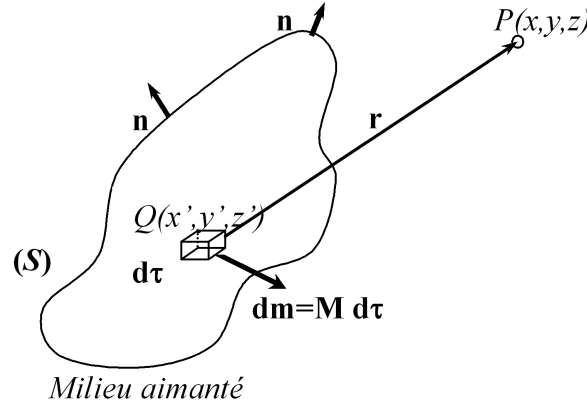


FIGURE 1

Le potentiel vecteur créé par $d\mathbf{m}$ en $P(x, y, z)$ est :

$$d\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}}{r^3} \quad \overrightarrow{QP} = \mathbf{r} \quad \text{et} \quad \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \vec{\nabla}_Q \left(\frac{1}{r} \right) = -\vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{r} \right) \quad (3)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\mathbf{M} \wedge \vec{\nabla}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\tau \quad d\tau = dx' dy' dz' \quad (4)$$

Le potentiel vecteur créé par tout le volume τ du milieu aimanté en un point $P(x, y, z)$ extérieur est :

$$\mathbf{A}(P) = \iiint_{\tau} \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\mathbf{M} \wedge \vec{\nabla}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\tau \quad (5)$$

Or pour une fonction scalaire f et une fonction vectorielle $\mathbf{A}$ on a l'identité :

$$\vec{\nabla} \wedge (f\mathbf{A}) = f\vec{\nabla} \wedge \mathbf{A} + \vec{\nabla}(f) \wedge \mathbf{A} \quad (\text{ou} \quad \mathbf{rot}(f\mathbf{A}) = f \mathbf{rot} \mathbf{A} + \mathbf{grad}(f) \wedge \mathbf{A}) \quad (6)$$

En posant $f = \frac{1}{r}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{M}$, l'équation (5) devient :

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} -\vec{\nabla}_Q \wedge \left(\frac{\mathbf{M}}{r} \right) d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{\nabla}_Q \wedge \mathbf{M}}{r} d\tau \quad (7)$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} -\mathbf{rot} \left(\frac{\mathbf{M}}{r} \right) d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\mathbf{rot} \mathbf{M}}{r} d\tau$$

On a par ailleurs :

$$\iiint_{\tau} \mathbf{rot} \mathbf{A} d\tau = \iint_S d\mathbf{S} \wedge \mathbf{A} \quad (8)$$

S étant la surface qui délimite le volume τ . $d\mathbf{S}=dS\mathbf{n}$ où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface S et orienté vers l'extérieur du milieu aimanté.

On obtient finalement :

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{M} \wedge \mathbf{n}}{r} dS + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{\mathbf{rot} \mathbf{M}}{r} d\tau \quad (9)$$

Posons $\mathbf{J}_m = \mathbf{rot} \mathbf{M}$ et $\mathbf{J}_m^s = \mathbf{M} \wedge \mathbf{n}$

On obtient :

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{J}_m^s}{r} dS + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{\mathbf{J}_m}{r} d\tau \quad (10)$$

L'équation (10) traduit le fait que le potentiel vecteur créé par le milieu aimanté est équivalent au potentiel vecteur créé par une distribution de courants fictifs placés dans le vide (μ_0) caractérisée :

- dans le volume τ par une densité volumique : $\mathbf{J}_m = \mathbf{rot} \mathbf{M}$;
- sur la surface (S) par une densité surfacique : $\mathbf{J}_m^s = \mathbf{M} \wedge \mathbf{n}$.

REMARQUE

1) Comme $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$, on en déduit :

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{J}_m^s \wedge \mathbf{r}}{r^3} dS + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{\mathbf{J}_m \wedge \mathbf{r}}{r^3} d\tau \quad (11)$$

Le champ magnétique créé par le milieu aimanté en un point extérieur est la somme du champ créé par une distribution de courant volumique $\mathbf{J}_m = \mathbf{rot} \mathbf{M}$ et une distribution de courant surfacique $\mathbf{J}_m^s = \mathbf{M} \wedge \mathbf{n}$.

2) Si $\mathbf{J}_m$ et $\mathbf{J}_m^s$ présentent des symétries, on peut utiliser le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétique (cf TD).

3) Si le milieu aimanté contient des courants libres vrais $\mathbf{J}_\ell$ et $\mathbf{J}_\ell^s$ (dûs aux charges libres), le champ magnétique devient :

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{(\mathbf{J}_m^s + \mathbf{J}_\ell^s) \wedge \mathbf{r}}{r^3} dS + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{(\mathbf{J}_m + \mathbf{J}_\ell) \wedge \mathbf{r}}{r^3} d\tau \quad (12)$$

4) *Cas d'une aimantation uniforme* : (voir l'exemple de la sphère uniformément aimantée en TD)

Dans ce cas, $\mathbf{M}$ est uniforme en tout point Q du corps aimanté. L'équation (5) devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M} \wedge \iiint_\tau \frac{\mathbf{r}}{r^3} d\tau \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M} \wedge \mathbf{E}^*(P) \end{aligned} \quad (13)$$

Où $\mathbf{E}^*(P)$ est un champ électrique fictif qui serait créé par une densité de charge volumique uniforme égale à $4\pi\epsilon_0$ répartie dans le volume τ .

2.2.2. A L'INTÉRIEUR DU MILIEU AIMANTÉ.

En tout point intérieur (du milieu aimanté) règne un champ magnétique microscopique $\mathbf{B}_{micro}$ dû aux particules chargées en mouvement et les particules possédant un moment magnétique intrinsèque.

$\mathbf{B}_{micro}$ varie rapidement dans l'espace (au voisinage des atomes) et dans le temps. On définit un champ macroscopique $\mathbf{B}$ comme moyenne spatiale du champ microscopique : $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}_{micro} \rangle$.

Si $\mathbf{J}_{micro}$ est la densité de courant vrai (dûe aux particules liées en mouvement) on a :

$$\text{rot } \mathbf{B}_{micro} = \mu_0 \mathbf{J}_{micro} \quad (14)$$

En effectuant une moyenne spatiale, on obtient alors :

$$\text{rot } \langle \mathbf{B}_{micro} \rangle = \mu_0 \langle \mathbf{J}_{micro} \rangle \quad (15)$$

Or $\text{rot } \mathbf{M} = \langle \mathbf{J}_{micro} \rangle$ d'où :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{M} \quad (16)$$

D'autre part, le potentiel vecteur est partout continu et garde la même forme (équation 9) à l'intérieur du milieu aimanté.

2.3. EQUATIONS DE LA MAGNÉTOSTATIQUE EN PRÉSENCE D'UN MILIEU AIMANTÉ

2.3.1. VECTEUR EXCITATION MAGNÉTIQUE $\mathbf{H}$

Dans le cas où il existe des courants de charges libres (courants vrais) de densité $\mathbf{J}_\ell$, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{tot} = \mu_0 \mathbf{J}_\ell + \mu_0 \mathbf{J}_m \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}_m = \text{rot } \mathbf{M} \quad (17)$$

$$\Rightarrow \text{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_\ell$$

$$\text{On pose} \quad \mathbf{H} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \Rightarrow \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_\ell \quad (18)$$

$\mathbf{H}$ est appelé *vecteur excitation magnétique*.

Unité de $\|\mathbf{H}\| \equiv \text{Ampère/mètre (A/m)}$ comme $\|\mathbf{M}\|$.

Les équations (de Maxwell) de la magnétostatique en présence de milieux magnétiques s'écrivent :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_\ell \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (19)$$

2.3.2. RELATIONS DE PASSAGE À LA SURFACE DE SÉPARATION DE DEUX MILIEUX MAGNÉTIQUES

On se propose de déterminer les relations entre les composantes des champ $\mathbf{B}$ (ou $\mathbf{H}$) de part et d'autre de la surface de séparation (S) de deux milieux différents (1) et (2).

On suppose que la surface de séparation contient des courants surfaciques libres vrais de densité $\mathbf{J}_\ell^s$.

a. CONTINUITÉ DE LA COMPOSANTE NORMALE DE $\mathbf{B}$

Appliquons le théorème de Gauss sur un cylindre de hauteur $2h$ infiniment petite et dont les deux bases ont des surfaces respectives S_{b1} (du côté du milieu (1)) et S_{b2} (du côté du milieu (2)) figure 2. S_{b1} et S_{b2} sont considérées petites de sorte que B_{1n} et B_{2n} soient constants sur les deux bases. Notons que $S_b = S_{b1} = S_{b2}$.

Le théorème de la divergence permet d'écrire :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \implies \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Le flux sortant du vecteur $\mathbf{B}$ à travers la surface du cylindre est :

$$\begin{aligned} \phi &= \oint_S \overbrace{\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}^{d\phi} \\ &= \iint_{S_{b2}} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_{b2} + \iint_{S_{b1}} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_{b1} + \phi_{\text{latéral}} \\ &= B_{2n} S_{b2} - B_{1n} S_{b1} + \phi_{\text{latéral}} \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{et} \quad \phi_{\text{latéral}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\implies B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad \text{ou} \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0 \quad (20)$$

Il y a continuité de la composante normale de $\mathbf{B}$ à la traversée d'une surface de séparation entre deux milieux.

b. DISCONTINUITÉ DE LA COMPOSANTE TANGENTIELLE DE $\mathbf{H}$

D'une manière générale, on a : $\text{rot } \mathbf{H} = \vec{\nabla} \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J}_\ell$ où $\mathbf{J}_\ell$ désigne la densité de courant volumique libre.

D'après le théorème de Stokes :

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J}_\ell \cdot d\mathbf{S} \quad C \text{ contour fermé s'appuyant sur } S$$

Considérons comme contour C un rectangle $ABCD$ de longueur L , parallèle à la surface de séparation, suffisamment faible (de sorte que $\mathbf{H}$ soit pratiquement constant sur L) et de largeur ℓ infiniment petite (de sorte qu'on reste au voisinage de la surface de séparation)(figure 3).

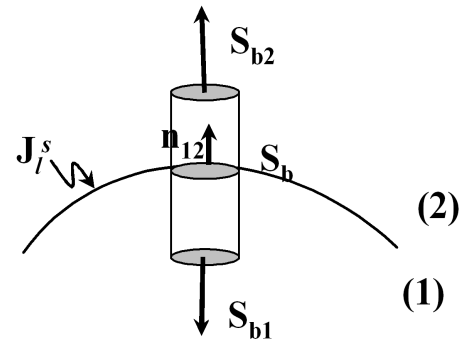


FIGURE 2

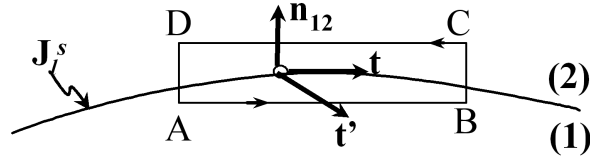


FIGURE 3

Soient $\mathbf{t}$ et $\mathbf{t}'$ deux vecteurs unitaires orthogonaux tangents à la surface de séparation. On notera que $\mathbf{t}'$ est perpendiculaire à la surface du rectangle $ABCD$.

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{AB} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} + \underbrace{\int_{BC} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{DA} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}_{=0 \text{ car } BC=DA=\ell \rightarrow 0} \\
 &= H_{1t} L - H_{2t} L \\
 &= \iint_S \mathbf{J}_\ell \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \int_L \mathbf{J}_\ell^s \cdot d\mathbf{l}' \quad \text{avec } d\mathbf{l}' = dl \mathbf{t}' \\
 &= \mathbf{J}_\ell^s \cdot \mathbf{t}' L
 \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{t}' = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_{12}$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
 H_{1t} - H_{2t} &= (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{J}_\ell^s \cdot (\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_{12}) \\
 &= (\mathbf{n}_{12} \wedge \mathbf{J}_\ell^s) \cdot \mathbf{t}
 \end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbf{H}_{1t} - \mathbf{H}_{2t} = \mathbf{n}_{12} \wedge \mathbf{J}_\ell^s \quad (21)$$

REMARQUE

1) si $\mathbf{J}_\ell^s = \vec{0}$ (pas de courant surfacique libre), on a : $\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}$. La composante tangentielle de $\mathbf{H}$ est continue.

2) On peut aussi écrire l'équation (21) sous la forme :

$$\mathbf{n}_{12} \wedge (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_\ell^s \quad (22)$$

2.4. AIMANTATION INDUITE. LES MILIEUX MAGNÉTIQUES PARFAITS

2.4.1. AIMANTATION INDUITE.

Un corps soumis à un champ magnétique $\mathbf{B}$ extérieur acquiert une aimantation $\mathbf{M}$. C'est le phénomène *d'aimantation induite*.

On distingue deux classes de matériaux magnétiques :

— *i)* des substances pour lesquelles l'aimantation induite $\mathbf{M}$ est faible.

- Pour certains, $\mathbf{M}$ est de même sens que $\mathbf{B}$. Ce sont les corps *paramagnétiques*.

- Pour d'autre, $\mathbf{M}$ est de sens opposé à $\mathbf{B}$. Ce sont les corps *diamagnétiques*.

Pour tout ces corps, $\mathbf{M}$ dépend linéairement de $\mathbf{B}$.

—ii) des substances qui présentent une très forte aimantation induite $\mathbf{M}$. Ce sont les corps ferromagnétiques. La relation entre $\mathbf{M}$ et $\mathbf{B}$ est complexe. Toutefois, il y a linéarité entre $\mathbf{M}$ et $\mathbf{B}$ pour les faibles champs magnétiques.

2.4.2. MILIEUX MAGNÉTIQUES LINÉAIRES, HOMOGÈNES ET ISOTROPES (*l.h.i.*)

a. SUSCEPTIBILITÉ ET PERMÉABILITÉ MAGNÉTIQUE.

Un milieu magnétique est linéaire, homogène et isotrope si en tout point du milieu l'aimantation $\mathbf{M}$ est proportionnelle à $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (23)$$

Où χ_m est la susceptibilité magnétique du milieu.

χ_m est une constante positive ou négative sans dimension.

Par ailleurs, on a :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi_m \mathbf{H} \implies \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1 + \chi_m)}$$

On pose

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (24)$$

μ_r est un coefficient sans dimension appelé *perméabilité relative*.

On obtient alors :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (25)$$

$\mu = \mu_0 \mu_r$ est la perméabilité (absolue) du milieu magnétique. Son unité est Henry/mètre (H/m) comme μ_0 .

REMARQUE

1) Les équations (23) et (25) donnent :

$$\mathbf{M} = \chi_m \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (26)$$

2) Dans le cas de la matière condensée (liquide ou solides) à la température ambiante, les ordres de grandeurs de χ_m sont :

—i) Pour les matériaux diamagnétiques (exemple : Bismuth, graphite, eau ...), χ_m est négative très faible de l'ordre de $\chi_m \simeq -10^{-5}$.

—ii) pour les matériaux paramagnétiques (exemple : Al , $FeCl_3$...), χ_m est positive faible de l'ordre de $\chi_m \simeq 10^{-3}$.

—iii) Pour les matériaux ferromagnétiques, à bas champs magnétiques $\chi_m = 10^3$ à 10^6 très élevée !

3) Pour les matériaux paramagnétiques et diamagnétiques :
 $|\chi_m| \ll 1 \Rightarrow \mu_r \simeq 1$ et $\mu \simeq \mu_0 \Rightarrow \mathbf{B} \simeq \mu_0 \mathbf{H}$ et $\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \mathbf{B}$.

b. RELATION ENTRE LES DENSITÉS DE COURANTS LIBRE $\mathbf{J}_\ell$ ET ÉQUIVALENTE $\mathbf{J}_m = \text{rot } \mathbf{M}$

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_m &= \text{rot } \mathbf{M} = \text{rot}(\chi_m \mathbf{H}) \\ &= \chi_m \underbrace{\text{rot } \mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\ell} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathbf{J}_m = (\mu_r - 1) \mathbf{J}_\ell \quad (27)$$

On remarque que pour un milieu magnétique *l.h.i.*, si $\mathbf{J}_\ell = \vec{0}$ (pas de courant libre), alors $\mathbf{J}_m = \vec{0}$ (pas de courants volumique d'aimantation).

c. RÉFRACTION DES LIGNES DES CHAMPS $\mathbf{B}$ ET $\mathbf{H}$ (CAS OÙ $\mathbf{J}_\ell = \vec{0}$)

Considérons deux milieux magnétiques (1) et (2) *l.h.i.* de perméabilités μ_1 et μ_2 dépourvus de courants libres.

$\text{div } \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}$ il y a continuité de la composante normale de $\mathbf{B}$

$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}$ il y a continuité de la composante tangentielle de $\mathbf{H}$

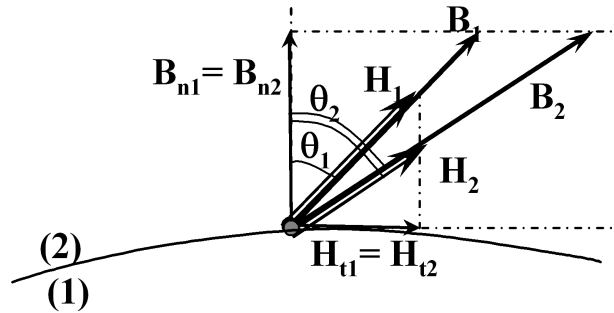


FIGURE 4

En tenant comptes des notations de la figure 4, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \overbrace{B_1 \cos \theta_1}^{B_{1n}} = \overbrace{B_2 \cos \theta_2}^{B_{2n}} \\ \overbrace{H_1 \sin \theta_1}^{H_{1t}} = \overbrace{H_2 \sin \theta_2}^{H_{2t}} \end{cases} \quad (28)$$

$$\text{D'où } \underbrace{\frac{H_1}{B_1}}_{1/\mu_1} \text{tg } \theta_1 = \underbrace{\frac{H_2}{B_2}}_{1/\mu_2} \text{tg } \theta_2 \Rightarrow \frac{\text{tg } \theta_1}{\text{tg } \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (29)$$

On dit qu'il y a réfraction des lignes des champs $\mathbf{H}$ et $\mathbf{B}$.

REMARQUE

◇ Dans le cas où le milieu (1) est un paramagnétique (ou ferromagnétique) et le milieu (2) est le vide $\mu_2 = \mu_0$, on a :

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_1}{\mu_0} > 1 \implies \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} > 1 \quad \text{d'où} \quad \theta_1 > \theta_2$$

Les lignes de $\mathbf{B}$ (ou $\mathbf{H}$) se rapprochent de la normale du côté du vide.

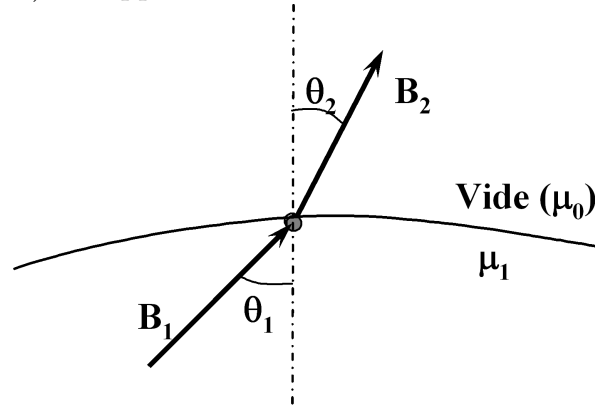


FIGURE 5

◇ Si le milieu magnétique est ferromagnétique, on a :

$$\mu_1 \gg \mu_0 \implies \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\mu_0}{\mu_1} \simeq 0 \implies \theta_2 \simeq 0$$

Les lignes des champs sont perpendiculaires à la surface du milieu ferromagnétique.

c. CHAMP DÉMAGNÉTISANT

Si on place un milieu magnétique (dépourvu de courants libres), dans un champ magnétique extérieur $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$, le champ magnétique effectif dans le milieu est donné par :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d \quad (30)$$

$\mathbf{H}_d$ est le champ démagnétisant créé par l'aimantation $\mathbf{M}$ du milieu.

Dans le cas des milieux *l.h.i.*, $\mathbf{H}_d$ est de même direction que $\mathbf{M}$ mais de sens opposé (ceci est à l'origine de son appellation "champ démagnétisant").

$$\mathbf{H}_d = -D \mathbf{M} \quad D > 0 \text{ est le facteur démagnétisant} \quad (31)$$

Exemple (voir Travaux dirigés)

Dans le cas d'une sphère uniformément aimantée, on a : $\mathbf{H}_d = -\frac{\mathbf{M}}{3}$.

3. ENERGIE MAGNÉTIQUE D'UN MILIEU AIMANTÉ

Considérons un milieu magnétique en présence d'un courant libre réel de densité $\mathbf{J}_\ell$. L'énergie potentielle magnétique emmagasinée dans le volume τ de ce milieu magnétique est :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \mathbf{J}_\ell \cdot \mathbf{A} \, d\tau \quad \mathbf{A} : \text{potentiel vecteur} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \underbrace{\mathbf{J}_\ell}_{\text{rot } \mathbf{H}} \cdot \mathbf{A} \, d\tau \quad \text{car } \mathbf{J}_\ell = \vec{0} \text{ loin du volume } \tau \end{aligned}$$

On a l'identité $\text{div}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b}$. On obtient :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \mathbf{H} \cdot \underbrace{\text{rot } \mathbf{A}}_{\mathbf{B}} \, d\tau - \frac{1}{2} \underbrace{\iiint_{\text{espace}} \text{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{H}) \, d\tau}_{\Downarrow \text{Th. Ostrogradski}} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, d\tau - \frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{A} \wedge \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

S est la surface délimitant l'espace. On choisit une sphère de rayon r que l'on fera tendre vers l'infini.

Pour r très éloigné ($r \rightarrow \infty$), le milieu magnétique est équivalent à un dipôle magnétique. Or pour un dipôle magnétique, on montre que $\mathbf{A}(r) \simeq \frac{1}{r^2}$ et $\mathbf{H}(r) \simeq \frac{1}{r^3}$.

$$\text{Comme } dS \simeq r^2 \implies (\mathbf{A} \wedge \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \simeq \frac{1}{r^3} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

L'énergie magnétique du milieu est :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, d\tau \quad (32)$$

Nous pouvons alors définir la densité d'énergie magnétique en présence d'un milieu aimanté par :

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (33)$$

CAS PARTICULIER : MILIEU MAGNÉTIQUE PARFAIT (*l.h.i.*)

$$\text{On a } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \implies W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{\mu} \, d\tau \quad (34)$$

On en déduit la densité d'énergie magnétique pour un milieu magnétique *l.h.i.* :

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (35)$$

Application : Solénoïde très long contenant un milieu magnétique l.h.i.

Pour un solénoïde très long (vide) de longueur ℓ et contenant N spires, le champ magnétique est uniforme à l'intérieur et vaut : $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{e}_z$ ($\vec{e}_z$ est un vecteur unitaire porté par l'axe de révolution du solénoïde).

Si on introduit une substance paramagnétique (par exemple), celle-ci va s'aimanter avec une aimantation uniforme $\mathbf{M} = M \vec{e}_z$ sous l'action de $\mathbf{B}_0$. $\mathbf{M}$ va créer à son tour un champ magnétique $\mathbf{B}_{int}^m = \mu_0 \mathbf{M}$ (voir *Travaux dirigés*).

Le champ magnétique total est :

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{tot} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{int}^m = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M} \\ &= \mathbf{B}_0 + \mu_0 \chi_m \mathbf{H}_{tot} \\ &= \mathbf{B}_0 + \mu_0 \left(\mu_r - 1 \right) \frac{\mathbf{B}_{tot}}{\mu_0 \mu_r}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathbf{B}_{tot} = \mu_r \mathbf{B}_0 \quad \text{Le champ magnétique est multiplié par un facteur } \mu_r$$

L'énergie emmagasinée dans le solénoïde de volume V est :

$$W = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}_{tot}^2}{\mu} V = \mu_r \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}_0^2}{\mu_0} V}_{W_0}$$

Or $W_0 = \frac{1}{2} L_0 I^2$ et $W = \frac{1}{2} L I^2$ avec $L_0 = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$ étant l'inductance propre du solénoïde vide et S la surface d'une spire du solénoïde.

On obtient la nouvelle expression de l'inductance propre :

$$L = \mu_r L_0 \quad (36)$$

L'introduction de la substance magnétique permet d'augmenter l'inductance du solénoïde.

4. FORCES EXERCÉES SUR UN MILIEU AIMANTÉ PAR UN CHAMP MAGNÉTIQUE NON UNIFORME

Considérons un matériau magnétique d'aimantation $\mathbf{M}$. Chaque élément de volume $d\tau$ est équivalent à un dipôle magnétique $d\mathbf{m} = \mathbf{M} d\tau$.

Si on place ce matériau dans un champ magnétique extérieur inhomogène $\mathbf{B}_0$, chaque dipôle sera soumis à la force (*voir cours magnétostatique*) :

$$d\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_0) = \text{grad}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0) d\tau$$

$$\text{soit} \quad d\mathbf{F}_x = \left(\mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial x} \right) d\tau, \quad d\mathbf{F}_y = \left(\mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial y} \right) d\tau, \quad d\mathbf{F}_z = \left(\mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial z} \right) d\tau$$

La densité volumique de force (*force par unité de volume*) est :

$$f_x = \frac{d\mathbf{F}_x}{d\tau} = \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial x}, \quad f_y = \frac{d\mathbf{F}_y}{d\tau} = \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial y}, \quad f_z = \frac{d\mathbf{F}_z}{d\tau} = \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial z} \quad (37)$$

◇ CAS D'UN MILIEU (*l.h..i.* DIA- OU PARAMAGNÉTIQUE)

Pour ces corps, on a $\mu_r \simeq 1$ et $\mathbf{M} \simeq \chi_m \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}$
d'où

$$f_x = \frac{\chi_m}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial x} = \frac{1}{2\mu_0} \chi_m \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{B}_0^2)$$

On obtient alors l'expression finale de la densité volumique de force :

$$\mathbf{f} = \chi_m \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{B}_0^2}{2\mu_0} \right) \quad (38)$$

- Pour les corps paramagnétiques $\chi_m > 0 \Rightarrow$ ils sont attirés vers les régions des forts champs magnétiques.
- Pour les corps diamagnétiques $\chi_m < 0 \Rightarrow$ ils sont attirés vers les régions des faibles champs magnétiques.

5. AIMANTATION PERMANENTE. CORPS FERROMAGNÉTIQUES.

Les corps ferromagnétiques peuvent acquérir une aimantation $\mathbf{M}$ très importante dans un champ magnétique extérieur et conserver cette aimantation lorsque ce champ disparaît.

Pour ces substances, $\mathbf{M}$ n'est pas proportionnelle au vecteur excitation $\mathbf{H}$. On définit tout de même l'excitation magnétique de ces matériaux par :

$$\chi_m(H) = \frac{\|\mathbf{M}\|}{\|\mathbf{H}\|} = \frac{M}{H} \quad \chi_m \text{ dépend de } H \quad (39)$$

Les corps ferromagnétiques sont caractérisés par une très grande susceptibilité magnétique $\chi_m = 10^3$ à 10^6 .

5.1. COURBES DE PREMIÈRE AIMANTATION.

Considérons un barreau de substance ferromagnétique qui n'a jamais été aimanté (ou bien qui a été désaimanté). Plaçons-le dans un champ extérieur $\mathbf{H}$ que l'on fait varier lentement à partir de zéro.

Le barreau acquiert une aimantation $\mathbf{M}$ que l'on mesure à chaque instant en fonction de l'excitation $\mathbf{H}$. La courbe obtenue est appelée "*courbe de première aimantation*".

Cette courbe admet une asymptote horizontale. La limite atteinte M_s est appelée "*aimantation à saturation*" (figure 6). Cette valeur limite est spécifique du corps ferromagnétique.

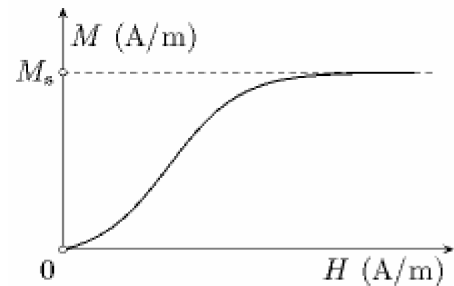


FIGURE 6

On peut aussi tracer $B = \|\mathbf{B}\|$ en fonction de $H = \|\mathbf{H}\|$. Pour un barreau ferromagnétique, du fait de la géométrie les vecteurs $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{M}$ sont colinéaires. On peut alors écrire :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \implies B = \mu_0 (H + M)$$

La courbe $B(H)$ se déduit de celle de $M(H)$ en ajoutant la variation linéaire $\mu_0 H$ (figure 7)

Pour les fortes valeurs de H , $M \rightarrow M_s$ et $B \simeq \mu_0 (H + M_s)$ qui est l'équation d'une droite dont l'ordonnée à l'origine est $B_s = \mu_0 M_s$.

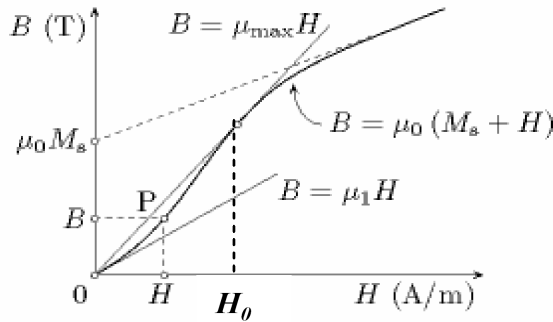


FIGURE 7

REMARQUE

Le tableau suivant regroupe quelques valeurs de M_s pour certains corps ferromagnétiques.

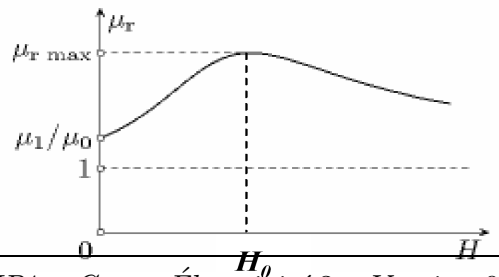
	Fer	Acier trempé	Nickel	Cobalt
$M_s(\text{A/m})$ à 300K	$1,7 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^6$	$0,48 \cdot 10^6$	$1,3 \cdot 10^6$

Notons que Lorsque la température T augmente, l'agitation thermique détruit l'ordre magnétique et M_s décroît. Pour $T > T_c$ appelée "température de Curie", l'aimantation disparaît et le matériau devient paramagnétique. Ainsi, une des méthodes pour désaimanter un corps ferromagnétique est de le chauffer jusqu'à une température supérieure à T_c .

5.2. VARIATION DE μ_r (OU χ_m) AVEC H .

On a $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{B}{H}$. En se basant sur cette équation, la courbe de $\mu_r(H)$ s'obtient à partir de la courbe de première aimantation $B(H)$ (voir figure 7) .

Pour un point $P(H, B)$ donné de la figure 7, $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ s'obtient à partir de la pente μ de la droite (OP). μ_r croît très vite à partir d'une valeur initiale $\mu_{r1} = \frac{\mu_1}{\mu_0}$, passe par un maximum $\mu_{r\max}$ puis décroît pour tendre vers 1 aux grandes valeurs de H (figure 8). La valeur initiale μ_1 n'est pas nulle et elle est différente de μ_0 . Elle varie considérablement selon les matériaux. En général, on indique la valeur de μ_1/μ_0 (exemple : aciers durs $\mu_1/\mu_0 = 40$, fer commercial 300).



REMARQUE

On a

$$\left. \frac{d\mu_r}{dH} \right|_{H_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(\left[-\frac{B}{H^2} \right]_{H_0} + \left[\frac{1}{H} \frac{dB}{dH} \right]_{H_0} \right) = 0$$

C'est à dire

$$B(H_0) = H_0 \left[\frac{dB}{dH} \right]_{H_0}$$

H_0 s'obtient (à partir de la courbe de première aimantation) en traçant la droite passant par l'origine et qui passe tangente à la courbe de première aimantation au point de coordonnées (H_0, B_0) (voir figure 7).

5.3. CYCLE D'HYSTÉRÉSIS

Augmentons H jusqu'à une valeur H_m correspondant à une aimantation M_m (correspondant à B_m). Supposons que l'on diminue lentement le champ H . On remarque que $M(H)$ (ou $B(H)$) obtenue ne repasse pas par la première courbe de première aimantation (figure 9).

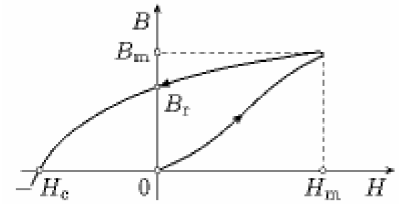


FIGURE 9

Pour $H = 0$, le milieu ferromagnétique reste aimanté avec une aimantation M_r appelée “aimantation rémanente”. Le champ magnétique a alors la valeur $B_r = \mu_0 M_r$ appelée *champ rémanent*.

Pour désaimanter le corps ferromagnétique, il faut appliquer une excitation $-H_c$ (de sens opposé à l'excitation H de première aimantation). H_c est appelée “excitation coercitive”.

En faisant varier H entre H_m et $-H_m$ (quelques aller-retour), l'aimantation $M(H)$ ou $B(H)$ décrit une courbe fermée appelée “cycle d'hystérésis”.

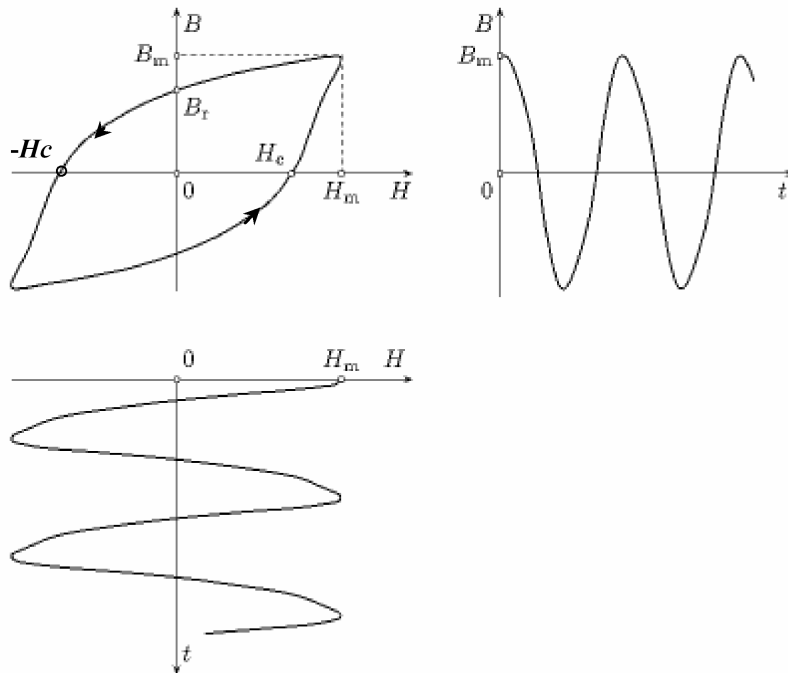


FIGURE 10

Le cycle d'hystérésis dépend de la nature du matériau ferromagnétique.

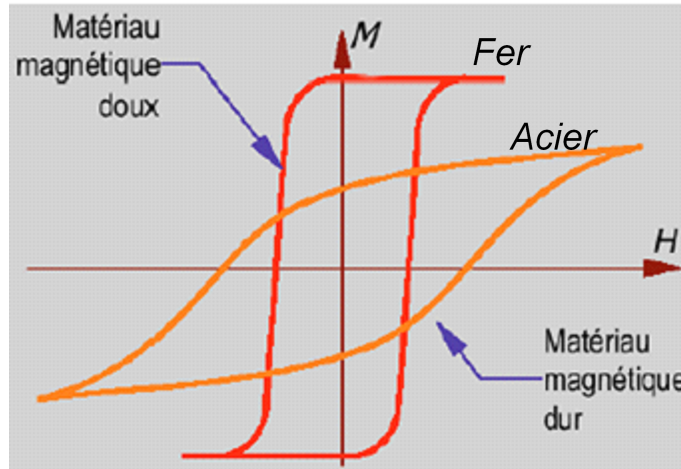


FIGURE 11

5.4. PERTES D'ÉNERGIE PAR HYSTÉRÉSIS

Considérons un barreau ferromagnétique (en Fer par exemple) placé dans un solénoïde, de grande longueur parcouru par un courant d'intensité “ i ” variable à l'aide d'un générateur de *f.e.m.* “ e ” variable.

La loi d'Ohm appliquée à ce circuit donne :

$$\begin{aligned} e &= Ri - e_L \\ &= Ri + \frac{d\phi}{dt} \end{aligned} \quad (40)$$

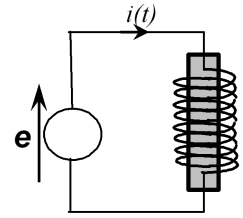


FIGURE 12

Où R est la résistance du solénoïde (fil constituant ce dernier) et ϕ le flux de $\mathbf{B}$ à travers le solénoïde.

Multiplions l'équation (40) par $i dt$: $e i dt = Ri^2 dt + i d\phi$

Intégrons entre l'instant $t = 0$ (où $i = 0$, $H = 0$, $B = B_0$ et $\phi = \phi_0$) et l'instant $t = t_1$ ($i = i_1$, $H = H_1$, $B = B_1$ et $\phi = \phi_1$) :

$$\underbrace{\int_0^{t_1} e i dt}_{W_e} = \underbrace{\int_0^{t_1} Ri^2 dt}_{W_R} + \underbrace{\int_{\phi_0}^{\phi_1} i d\phi}_W$$

W_e désigne l'énergie électrique fournie par le générateur.

W_R est l'énergie dissipée par effet Joule dans R .

W est l'énergie reçue (ou fournie) par le matériau ferromagnétique.

Supposons que le solénoïde est très long, de longueur L contenant n spires (chacune de surface s) par unité de longueur. Une variation du courant i induit une variation dB du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

La variation du flux à travers les spires du solénoïde vaut : $d\phi = n L s dB$

$$W = \int_{\phi_0}^{\phi_1} i d\phi = \int_{\phi_0}^{\phi_1} n \underbrace{Ls}_V i dB \quad V \text{ est le volume du solénoïde}$$

D'autre part, l'excitation magnétique H est donnée par (Théorème d'Ampère) : $H = ni$
D'où

$$W = \int_{\phi_0}^{\phi_1} i d\phi = V \int_{B_0}^{B_1} H dB \quad (41)$$

• si H croît, $dB > 0$ et $dS = HdB > 0$:
 $W_1 = V \int_{B_0}^{B_1} H dB > 0$. Le corps ferromagnétique reçoit l'énergie W_1 du circuit.

• si H décroît, $dB < 0$ et $dS' = HdB < 0$:
 $W_2 = V \int_{B_1}^{B_r} H dB < 0$ ($W_2 < W_1$). Le corps ferromagnétique fournit l'énergie au circuit.

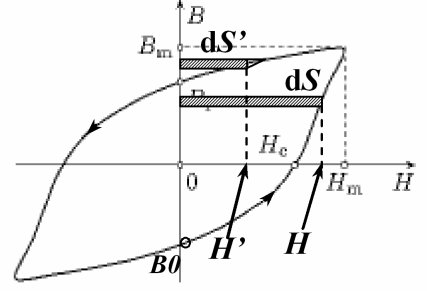


FIGURE 13

Au cours d'un cycle complet, le corps ferromagnétique absorbe une énergie :

$$W = V S \quad (42)$$

S est l'aire du cycle d'hystérésis :

On dit que W est l'énergie perdue par hystérésis.