

Diffusion dans la phase liquide

EXO I:

Démontrer que le coefficient de diffusion d'une molécule sphérique est inversement proportionnel à la racine cubique de sa masse moléculaire.

Corrigé

Nous savons que le coefficient de diffusion est directement proportionnel au coefficient de Boltzmann ; à la température absolue et inversement proportionnel au coefficient de frottement selon la relation suivante :

$$D = \frac{KT}{f} = \frac{KT}{6\pi\eta r} \dots\dots\dots(1)$$

D'autre part, la masse volumique détermine le rapport de la masse au volume :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Les molécules sont supposées sphériques; alors : $V = 4/3 \pi r^3$

$$\Rightarrow \rho = \frac{3m}{4\pi r^3} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} \dots\dots(2)$$

En remplaçant (2) en (1) on obtient :

$$D = \frac{KT}{f} = \frac{KT}{6\pi\eta r} = \frac{KT}{6\pi\eta \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}} \Rightarrow D = \frac{KT}{6\pi\eta \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi\rho}} \sqrt[3]{m}} ; \text{ Soit } \frac{KT}{6\pi\eta \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi\rho}}} = A \Rightarrow D = \frac{A}{\sqrt[3]{m}}$$

EXO II:

Un système à deux compartiments séparés par une membrane. On désire épurer le compartiment (A) de volume (V_A) dans le compartiment (B) de volume (V_B). Le même liquide plasmatique est contenu dans les deux compartiments, sauf que dans (B) sa concentration en urée est nulle.

*Démontrer que $[C_A V_A + C_B V_B = C^{te}]$.

*Calculer la concentration d'équilibre (C_e) en fonction de (M, V_A, V_B).

*Calculer le volume (V_B) Si ($V_A = 40$ l), la concentration initiale en (A) $C_{0A} = 3\text{g / l}$ et on désire obtenir une concentration finale d'équilibre $C_e = 0,3 \text{ g / l}$.

Corrigé

Par définition de la concentration : $C = m / V \Rightarrow C_A = m_A / V_A$ et $C_B = m_B / V_B$
En remplaçant dans l'équation $[C_A V_A + C_B V_B]$ on obtient :

$(m_A / V_A) V_A + (m_B / V_B) V_B = m_A + m_B = M$ (masse totale du système qui constante)

$$C_A V_A + C_B V_B = M \dots\dots\dots(1)$$

* A l'équilibre, $C_A = C_B = C_e$

En remplaçant dans l'équation (1), on obtient: $C_e V_A + C_e V_B = M \Rightarrow C_e(V_A + V_B) = M$

$$\Rightarrow C_e = M / (V_A + V_B)$$

*Application numérique (Calcul de V_B):

De l'équation précédente: $C_e V_A + C_e V_B = M \Rightarrow C_e V_B = M - C_e V_A \Rightarrow V_B = (M - C_e V_A) / C_e$

$$V_B = (M - C_e V_A) / C_e \Rightarrow V_B = V_A [C_{0A} / C_e - 1] \Rightarrow V_B = 40 (3/0,3 - 1) = 360 \text{ l}$$

Remarque :

On constate que dans un système à deux compartiments où la concentration diminue d'un compartiment pour augmenter dans l'autre, cela nécessite de grandes valeurs de volume pour réduire la concentration. Du point de vue pratique, ce système est inapplicable. Généralement, le système de diffusion suit la méthode de l'exercice suivant.

EXO. III:

On considère un système de deux compartiments séparés par une membrane et on désire épurer le compartiment (I) de volume (V) et de concentration initiale (C_0) dans le compartiment (II).

On suppose que la diffusion de (I) vers (II) ne modifie pas la concentration en (II) toujours nulle où circule un liquide de dialyse.

La surface de diffusion (S), le coefficient de diffusion (D) et l'épaisseur de la membrane (e).

1) Exprimer la loi de Fick appliquée à ce cas particulier.

2) D'après la définition du flux massique, écrire la relation entre le flux, le temps et la concentration.

3) Montrer que la concentration du compartiment (I) varie selon la relation suivante:

$$C = C_0 e^{-Kt}, \text{ où } K = \frac{DS}{Ve}.$$

4) Quelle unité peut-on donner à (K).

5) Appliquer les résultats précédents à un système de rein artificiel pour lequel:

$S = 15.10^3 \text{ cm}^2$, $e = 75 \text{ } \mu\text{m}$, $D = 10^{-5} \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$, et le volume à épurer $V = 40 \text{ dm}^3$.

Combien de temps faudra-il pour réduire l'urémie de (6 g / l) à (0,3 g / l).

Corrigé

1. La loi de Fick : $\frac{dm}{dt} = -DS \frac{dc}{dx}$

Dans notre cas :

* La diffusion de (1) vers (2) ne modifie pas la concentration en (2)

$\Rightarrow C_B = 0 \Rightarrow dc = C_2 - C_1 = -C_1$ (lorsque on parle de

concentration dans ce cas, il s'agit toujours du compartiment (1). $\Rightarrow dc = -C$

* La distance entre les deux compartiments est représentée par l'épaisseur de la membrane (dx) $\Rightarrow dx = e$

La loi prend la forme : $\frac{dm}{dt} = DS \frac{C}{e} \dots\dots\dots(1).$

2. D'après la définition du flux massique ($\Phi = \frac{dm}{Sdt}$), on doit écrire une relation entre

ce flux et la concentration et le temps :

Par définition de la concentration : $C = m / V \Rightarrow m = CV$: dans le cas de la diffusion on assiste à une variation décroissante de masse et donc de concentration $\Rightarrow$

$$dm = -V.dC$$

Si on divise les deux termes de l'équation par (S.dt) :

$$\frac{dm}{Sdt} = -\frac{VdC}{Sdt} \dots\dots\dots(2)$$

3. Pour arriver à la fonction de décroissance de la concentration du compartiment (1), on compare les équations (1) et (2) :

$$\Rightarrow DS \frac{C}{e} = -\frac{VdC}{dt} \Rightarrow \frac{dC}{C} = -\frac{DS}{Ve} dt \Rightarrow \frac{dC}{C} = -Kdt \Rightarrow \log C = -Kt + B ;$$

pour calculer la constante d'intégration (B), nous avons les conditions :

à $t=0 \Rightarrow C=C_0$, Alors

$$\log C_0 = -0 + B \Rightarrow \log C = -Kt + \log C_0 \Rightarrow \log C/C_0 = -Kt \Rightarrow C = C_0 e^{-Kt}$$

4. Quel unité peut-on donner à K ? Nous savons que $K = \frac{DS}{Ve}$, il suffit de remplacer

les unités de chaque paramètre et l'unité est déterminée le plus simplement du monde, mais le but n'est pas là, le but de tester l'esprit de raisonnement pour dire que (Kt) est un exposant, et l'exposant par définition ne possède pas d'unité. Le temps (t) possède la seconde comme unité, alors (k) doit obligatoirement posséder l'unité inverse (s^{-1}).

5. Application numérique :

$$\text{des équations précédentes nous avons : } \log C/C_0 = -Kt \Rightarrow \log \frac{dC}{C} = -\frac{DS}{Ve} t$$

$$\Rightarrow t = -\frac{Ve}{DS} \log \frac{C}{C_0} \Rightarrow t = -\frac{40.10^{+3}.75.10^{-4}}{10^{-5}.15.10^{+3}} \log \frac{0,3}{6} \Rightarrow t = 5980 \text{ s} \approx 1,66 \text{ h} \approx 1 \text{ h } 36 \text{ min.}$$

EXO. IV:

On désire épurer une solution de volume (10 l) et de concentration (3 g / l) à travers une membrane dans un système à deux compartiments et on suppose que la diffusion de (1) vers (2) ne modifie pas la concentration en (2).

L'épaisseur de la membrane (10^{-2} cm), la surface (10^{-4} cm²), le temps de diffusion (1h) pour réduire la concentration à 0,5 g / l.

Déterminer le diamètre minimal des pores de la membrane pour qu'il y est diffusion.

$$T = 273^\circ\text{K}, \eta = 10 \text{ cpo.}, R = 8,31.10^7 \text{ erg.mole}^{-1}, K = 1,38.10^{-16} \text{ erg.}^\circ\text{.mole}^{-1}.$$

Corrigé

Lorsque la diffusion du compartiment (1) vers le compartiment (2) ne modifie pas la concentration du deuxième compartiment, la diminution de la concentration du premier compartiment suit la relation exponentielle démontrée précédemment :

$$C = C_0 e^{-Kt}$$

$$\Rightarrow \log \frac{dC}{C} = -\frac{DS}{Ve} t \Rightarrow D = -\frac{Ve}{tS} \log \frac{C}{C_0} \Rightarrow D = -\frac{10.10^{+3}.10^{-2}}{3600.10^{+4}} \log \frac{0,5}{3} = 498 \text{ cm}^2/\text{s}$$

D'autre part, nous savons que le coefficient de diffusion est défini par : (L'exercice 1)

$$D = \frac{KT}{f} = \frac{KT}{6\pi\eta rr} \Rightarrow r = \frac{KT}{6\pi\eta D} \Rightarrow r = \frac{1,38.10^{-16}.273}{6.3,14.10.498} \Rightarrow r = 4.10^{-17} \text{ cm}$$

La valeur de (r) représente le diamètre moléculaire, alors pour que la diffusion puisse avoir lieu, il faut que le diamètre des pores de la membrane doivent être supérieur aux diamètres moléculaires.

EXO. V:

a) Le Coefficient de diffusion du lactose est de $(4,8 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1})$ et sa masse molaire est de 342 g.

Calculer le coefficient de diffusion de l'urée si sa masse molaire est de 60 g.

b) Pour épurer de l'urée dans un système à deux compartiments séparés par une membrane, il faut que le diamètre des molécules soit inférieur au diamètre des pores de la membrane. Calculer sa valeur minimale.

C) Cette membrane est utilisée dans la séparation de deux compartiments d'un dispositif de rein artificielle où le rein est considéré comme le compartiment (A). On désire épurer un volume de 10 dm^3 à une concentration de 6 g/l pour la réduire à $0,3 \text{ g/l}$. (le même liquide plasmatique est contenu dans les deux compartiments sauf que dans le compartiment (B) sa concentration en urée est nulle qu'elle que soit la diffusion de (A vers B). La surface de diffusion $s = 10^3 \text{ cm}^2$ et l'épaisseur de la membrane $75 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

Après une demi-heure et suite à une panne technique le processus de diffusion s'arrête. Pour continuer la réduction de la concentration au seuil voulu, calculer le volume (V_B) du liquide plasmatique qu'il faudra réunir en (B).

$\eta = 10^{-2} \text{ Poise}$; $T = 37^\circ$

Corrigé

a) Pour calculer le coefficient de diffusion de l'urée, nous savons que le coefficient de diffusion est inversement proportionnel à la racine cubique de la masse molaire (exo.1).

$D = \frac{A}{\sqrt[3]{m}}$ Cette relation est appliquée sur chaque cas séparément :

$$D_L = \frac{A}{\sqrt[3]{m_L}} \quad \text{et} \quad D_U = \frac{A}{\sqrt[3]{m_U}} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_U}{D_L} = \frac{A}{\sqrt[3]{m_U}} \cdot \frac{\sqrt[3]{m_L}}{A} \Rightarrow \frac{D_U}{D_L} = \frac{\sqrt[3]{m_L}}{\sqrt[3]{m_U}} \Rightarrow$$

$$D_U = D_L \frac{\sqrt[3]{m_L}}{\sqrt[3]{m_U}} \Rightarrow 4,8 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt[3]{342}}{\sqrt[3]{60}} = 8,55 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Pour calculer le diamètre minimal des pores de la membrane, on calcule le diamètre des molécules en question (voir exercice 4):

$$D = \frac{KT}{f} = \frac{KT}{6\pi\eta r} \Rightarrow r = \frac{KT}{6\pi\eta D} \Rightarrow r = \frac{1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 310}{6,3 \cdot 14 \cdot 10^{-2} \cdot 8,55 \cdot 10^{-6}} = 2,65 \cdot 10^{-8} \text{ Cm}$$

C) Lorsque la diffusion du compartiment (1) vers le compartiment (2) ne modifie pas la concentration en (2), la diminution de la concentration du compartiment (1) suit la relation exponentielle $C = C_0 e^{-Kt}$ (voir exercice 3). Après une demi heure, on calcule la concentration restante dans le compartiment (1) :

$$C = C_0 e^{-\frac{DS}{V_e} t} \Rightarrow C = 6 e^{-\frac{8,55 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3}{10,75 \cdot 10^{-2}} \cdot 1800} = 4,88 \text{ g/l}$$

A partir de ce moment, et suite à la panne du dispositif de renouvellement du liquide du deuxième compartiment, la diffusion de (1) vers (2) fait augmenter la concentration en (2). (voir exercice 2).

Pour réduire la concentration du compartiment (1) à $0,3 \text{ g/l}$, il faut atteindre l'équilibre à cette concentration.

$$C_e V_A + C_e V_B = M \Rightarrow C_e V_B = M - C_e V_A \Rightarrow V_B = (M - C_e V_A) / C_e$$

$$V_B = (M - C_e V_A) / C_e \Rightarrow V_B = V_A [C_{0A} / C_e - 1] \Rightarrow V_B = 10 (6/0,3 - 1) = 190 \text{ l}$$