Partiel de Mécanique des fluides

Licence 3 GSI
Licence Pro CMIE

durée : 2 h 00

16/01/2009

Exercice 1 : Tube en U

Énoncé

Un tube en U de section uniforme $s = 2{,}0$ cm^2 et ouvert à l'atmosphère contient du mercure (Hg).

1. Dans la branche A du tube, on verse 20 cm^3 d'eau (l'eau et le mercure sont non miscibles). Calculer la différence des niveaux des surfaces libres dans les deux branches A et B.
2. On veut ramener les niveaux du mercure dans les deux branches dans un même plan horizontal en versant de l'alcool (non miscible avec le mercure) dans la branche B. Calculer le volume d'alcool nécessaire pour obtenir ce résultat.

Données :

masses volumiques → mercure : 13,6 g.cm^{-3} ; alcool : 0,80 g.cm^{-3} ; eau : 1,0 g.cm^{-3}.

Corrigé

1

La situation initiale est représentée à la figure 1-a) où seul le mercure (Hg) occupe le tube de section uniforme s. Un volume d'eau $V_e = 20$ cm^3 est introduit dans la branche A comme représenté à la figure 1-b). Calculons la hauteur d'eau h_e correspondant au volume V_e introduit :

$$V_e = h_e \times s \quad ; \quad h_e = V_e/s = 20/2 = 10\text{cm}.$$

Sachant que sur chaque surface libre régne la pression atmosphérique p_{atm}, déterminons l'exression de la pression au point 1.

$$p_1 = \rho_e \times g \times h_e + p_{atm}$$

Le point 2 étant sur la même isobare que p_1, alors $p_1 = p_2$. Déterminons l'expression de la pression au point 2 en fonction de la hauteur de mercure h_M.

$$p_2 = \rho_{Hg} \times g \times h_M + p_{atm}$$

or $p_1 = p_2$

$$\rho_{Hg} \times g \times h_M + p_{atm} = \rho_e \times g \times h_e + p_{atm}$$

$$\rho_{Hg} \times h_M = \rho_e \times h_e$$

$$h_M = \frac{\rho_e \times h_e}{\rho_{Hg}} \frac{1 \times 10}{13,6} = 0,74 \text{ cm}$$

$$\Delta h = h_e - h_M = 10 - 0,74 = 9,26 \text{ cm}$$

2

Après avoir mis de l'alcool, dans la branche B les niveaux de mercure sont dans un même plan horizontal. Ici, les points 1' et 2' figure 1-c) sont à une même pression.

$$p_{1'} = p_{2'} = \rho_e \times g \times h_e + p_{atm} = \rho_{al} \times g \times h_{al} + p_{atm}$$

avec rho_{al} la masse volumique de l'alcool.

$$\rho_e \times h_e = \rho_{al} \times h_{al}$$

alors

$$\rho_e \times h_e = \rho_{al} \times h_{al}$$

d'où

$$h_{al} = \frac{\rho_e \times h_e}{\rho_{al}} = \frac{1 \times 10}{0,8} = 12,5 \text{ cm}$$

le volume d'alcool V_{al} correspondant à la hauteur d'alcool h_{al} est donc :

$$V_{al} = s \times h_{al} = 2 \times 12,5 = 25 \text{ cm}^3$$

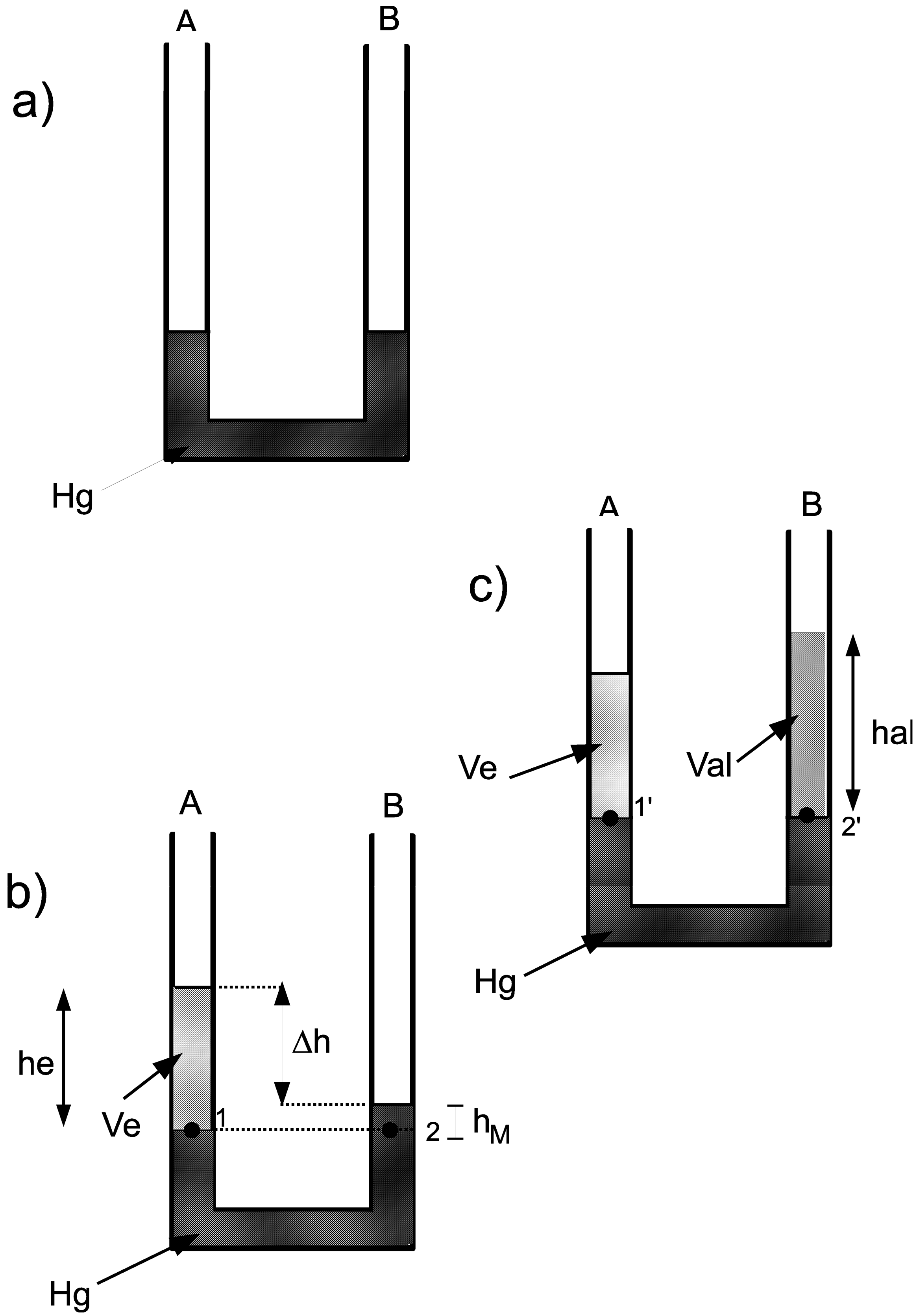

Figure 1 – Tube en U dans les trois configurations rencontrées

Exercice 2 : Écoulement à travers un divergent

Énoncé

Une conduite circulaire horizontale présente un divergent d'angle d'ouverture α de longueur $L = 25$ cm qui fait passer le diamètre de $D_1 = 10$ cm à $D_2 = 25$ cm comme représenté à la figure 2.

De l'eau de masse volumique $\rho = 1000$ kg/m^3 et de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6}$ m^2/s circule avec un débit volumique $Q_v = 10$ l/s dans cette conduite.

On note x, la distance entre la section d'entrée et la section courante du divergent. On appellera $X = x/L$ la distance réduite.

La pression à l'entrée du divergent est $p_1 = p(x = 0) = 5$ bars $= 5.10^5$ Pa.

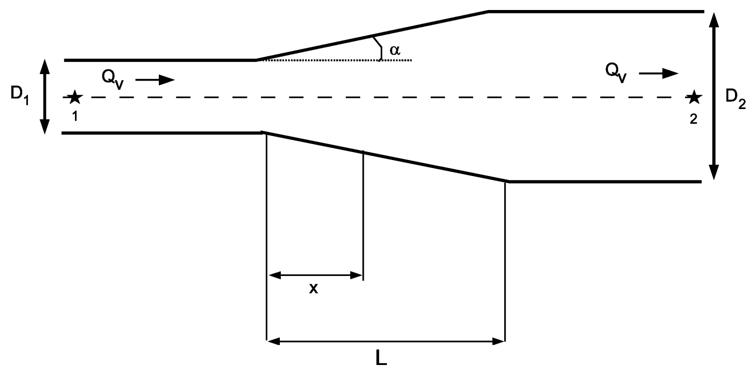

FIGURE 2 – Schéma du divergent

Pour l'ensemble de l'exercice, on néglige les pertes de charge.

1. Calculez la vitesse au point 1 (v_1) ainsi que la vitesse au point 2 (v_2).
2. Calculez les valeurs du nombre de Reynolds Re_1 et Re_2 aux points 1 et 2. En déduire la nature de l'écoulement pour chacun de ces points.
3. Calculez l'expression du diamètre $D(X)$ d'une section courante du divergent repérée par la distance réduite $X = x/L$.
4. $v(X)$ étant la vitesse moyenne d'une section courante du divergent repérée par la distance réduite X, calculez numériquement $v(X = 0.25)$; $v(X = 0.5)$ et $v(X = 0.75)$.
5. Trouvez l'expression du rapport $v(X)/v_1$. On pourra noter $\beta = D_2/D_1$.
6. Déterminez l'expression de la différence de pression $\Delta p(X) = p(X) - p(X = 0) = p(X) - p_1$ où $p(X)$ désigne la pression en une section courante du divergent.
7. Calculez numériquement $\Delta p(X = 0.25)$; $\Delta p(X = 0.5)$; $\Delta p(X = 0.75)$ et $\Delta p(X = 1)$.
8. Tracez sur papier millimétré l'évolution de Δp en fonction de X.

Corrigé

1

Le débit se conserve durant la traversée du divergent.

$$Q = Q_1 = Q_2 = S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 10.10^{-3}}{\pi \times 0,1^2} = 1,275 \mathrm{m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 10.10^{-3}}{\pi \times 0,25^2} = 0,205 \mathrm{m/s}$$

2

$$\mathcal{R}e_1 = \frac{v_1 D_1}{\nu} = \frac{1,275 \times 0,1}{10^{-6}} = 1,27.10^5$$

$\rightarrow \mathcal{R}e_1 >> 3000$. Le Régime est turbulent.

$$\mathcal{R}e_2 = \frac{v_2 D_2}{\nu} = \frac{0,205 \times 0,25}{10^{-6}} = 51250$$

$\rightarrow \mathcal{R}e_2 >> 3000$. Le Régime est turbulent.

3

$$D(X = 0) = D_1$$

$$D(X = L) = D_2$$

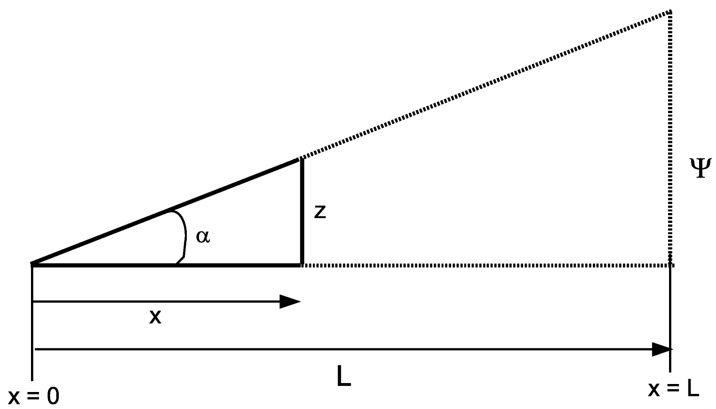

FIGURE 3 –

$$\tan \alpha = \frac{z}{x} = \frac{\Psi}{L}$$

$$D(x) = D_1 + 2 \times z$$

or $z = x \times \Psi / L$

$$D(x) = D_1 + 2 \times \frac{x \times \Psi}{L}$$

$$D(X) = D_1 + 2 \times X \times \Psi$$

or $2 \times \Psi = D_2 - D_1$

$$D(X) = D_1 + X \times (D_2 - D_1)$$

$$D(X) = D_2 X + D_1 (1 - X)$$

4

$$v(X) = \frac{4Q}{\pi D(X)^2}$$

- $v(X = 0,25) = 0{,}675$ m/s ;
- $v(X = 0,5) = 0{,}416$ m/s ;
- $v(X = 0,75) = 0{,}282$ m/s.

5

$$v(X) = \frac{Q}{S(X)} = \frac{4Q}{\pi D(X)^2} = \frac{4Q}{\pi [D_2 X + D_1 (1 - X)]^2}$$

$$\frac{v(X)}{v_1} = \frac{\frac{4Q}{\pi [D_2 X + D_1 (1-X)]^2}}{\frac{4Q}{\pi D_1^2}} = \frac{D_1^2}{[D_2 X + D_1 (1 - X)]^2}$$

$$\frac{v(X)}{v_1} = \frac{D_1^2}{D_2^2 X^2 + D_2 D_1 X (1 - X) + D_1^2 (1 - X)^2}$$

Posons $\beta = D_2 / D_1$:

$$\frac{v(X)}{v_1} = \frac{1}{\beta^2 X^2 + \beta X (1 - X) + (1 - X)^2}$$

$$\frac{v(X)}{v_1} = \frac{1}{(1 + X(\beta - 1))^2}$$

6

On applique le théorème de Bernoulli (pression) entre les points 1 et X.

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_X + \rho g z_X + \frac{1}{2} \rho v_X^2$$

or $z_1 = z_X$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_X + \frac{1}{2} \rho v_X^2$$

$$\Delta p = p_X - p_1 = \frac{1}{2} \rho \ v_1^2 - \frac{1}{2} \rho \ v_X^2$$

$$\Delta p = p_X - p_1 = \frac{1}{2} \rho \ v_1^2 - \frac{1}{2} \rho \ \frac{v_1^2}{(1 + X(\beta - 1))^4}$$

$$\Delta p = p_X - p_1 = \frac{1}{2} \rho \ v_1^2 \times \left(1 - \frac{1}{(1 + X(\beta - 1))^4} \right)$$

7

$\rho = 1000$ kg/m^3, $\beta = D_2/D_1 = 25/10 = 2{,}5$ et $v_1 = 1{,}275$ m/s.

- $\Delta p(X = 0,25) = 583{,}8$ Pa ;
- $\Delta p(X = 0,5) = = 724{,}8$ Pa ;
- $\Delta p(X = 0,75) = 770{,}8$ Pa.

8

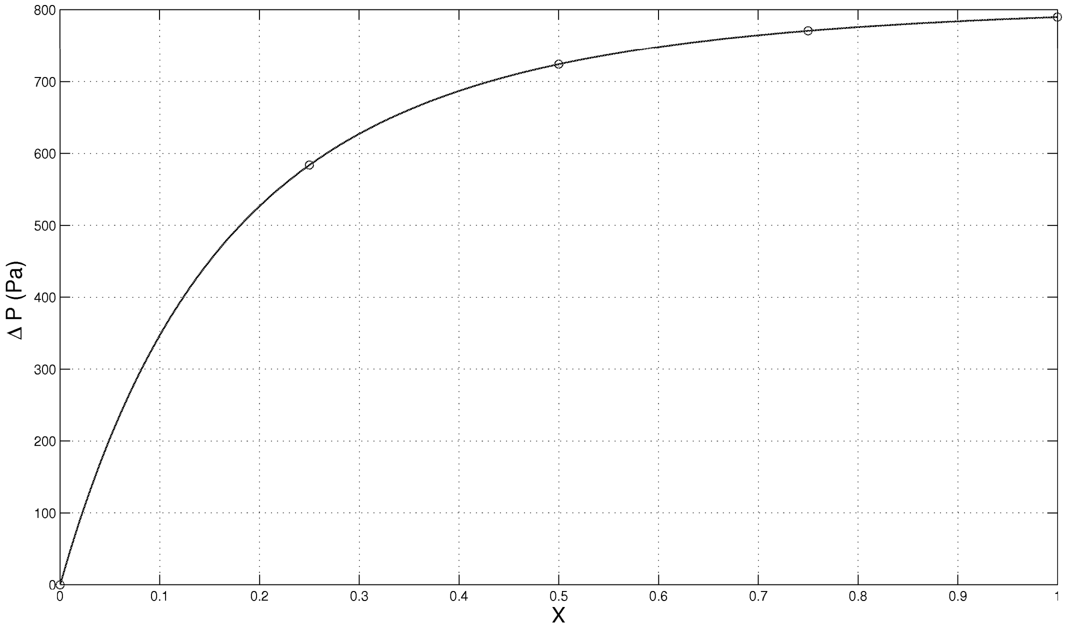

FIGURE 4 – Évolution de la différence de pression avec la position dans le divergent.

Exercice 3 : Circuit de pompage

Énoncé

Un circuit de pompage, représenté à la figure 5 permet de transporter de l'eau d'un réservoir A à un réservoir B.

Ce circuit comporte, dans l'ordre de l'écoulement, une crépine de coefficient de perte de charge K_1 ; un clapet de coefficient de perte de charge K_2 et un coude à 90° de perte de charge K_3. L'ensemble de ces éléments se trouvent sur une conduite d'aspiration conduisant à la pompe de diamètre D_1 et de rugosité absolue ϵ et de longueur L_1.

La sortie de la pompe est reliée à la conduite de refoulement de diamètre D_2, de longueur L_2 et de même rugosité absolue ϵ. Le passage de la conduite de roulement au réservoir B se fait avec une perte de charge singulière de coefficient K_4.

Ce circuit doit pomper un débit d'eau Q_v. La masse volumique de l'eau est notée ρ et sa viscosité cinématique ν.

z_i et p_i désignent respectivement les altitudes et les pressions au point i désignés à la figure 5.

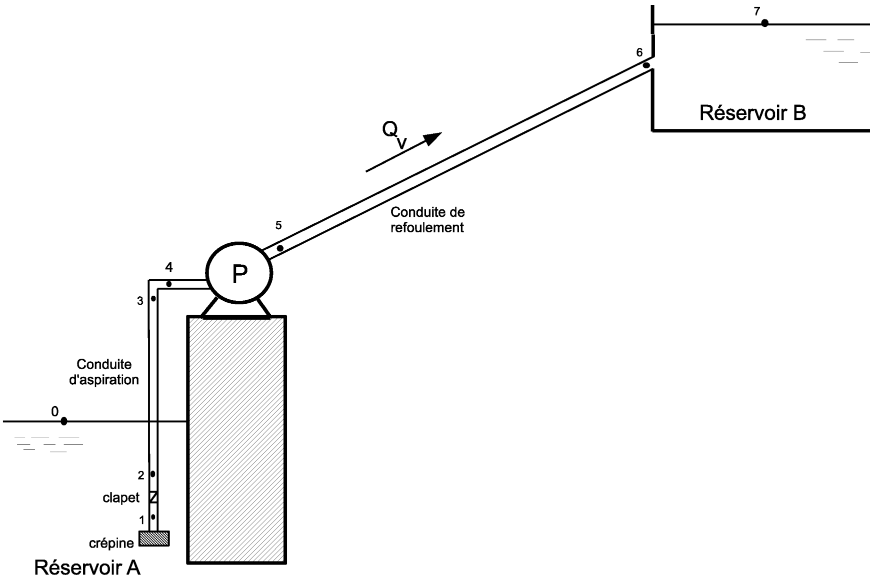

FIGURE 5 – Schéma du circuit de pompage.

Les surfaces libres des deux réservoirs restent à une altitude constante et la différence d'altitude entre ces deux surfaces se note $h = z_7 - z_0$. La pression atmosphérique p_{atm} régne au dessus de ces deux surfaces. L'accéleration de la pesanteur est notée g.

Données du problème :

$K_1 = 3$;	$h = z_7 - z_0 = 42$ m ;
$K_2 = 1{,}2$;	$z_4 - z_0 = 6$ m ;
$K_4 = 1$;	$z_4 = z_5$;
$\epsilon = 0{,}1$ mm ;	$Q_v = 10$ l/s ;
$D_1 = 125$ mm ;	$\rho = 1000$ kg/m^3 ;
$D_2 = 80$ mm ;	$\nu = 10^{-6}$ m^2/s ;
$L_1 = 15$ m ;	$g = 10$ m.s^{-2} ;
$L_2 = 925$ m ;	$p_{atm} = 1{,}013$ bar $= 101300$ Pa $= 1$ atm

Le coefficient de pertes de charge pour un coude d'angle α et de rayon r peut être estimé par la formule de Weisbach :

$$K = \frac{\alpha}{90} \times \left[0,131 + 1,847\left(\frac{D}{2r}\right)^{3,5}\right] \quad \text{où } \alpha \text{ est l'angle du coude exprimé en degrés}$$

1. Calculez la valeur du coefficient de perte de charge K_3 sachant que le rayon de courbure du coude 3-4 est égal à $r = 375$ mm pour un diamètre $D = D_1 = 125$ mm.
2. Calculez la vitesse v_A ainsi que la valeur du nombre de Reynolds $\mathcal{R}e_A$ pour la conduite d'aspiration. En déduire la valeur du coefficient de perte de charge régulière f_A de la conduite d'aspiration à l'aide du diagramme de Colebrooke (cf annexe).
3. Calculez la vitesse v_R ainsi que la valeur du nombre de Reynolds $\mathcal{R}e_R$ pour la conduite de refoulement. En déduire la valeur du coefficient de perte de charge régulière f_R de la conduite de refoulement à l'aide du diagramme de Colebrooke.
4. Déterminer l'expression de la hauteur manométrique totale ΔH_p que doit fournir la pompe pour assurer le débit Q_v.

5. Calculez la valeur numérique de ΔH_p ainsi que la puissance utile $\mathcal{P}_u$ fournie par la pompe au fluide. Sachant que le rendement global de la pompe est de $\eta = 0.8$, calculez la puissance reçue $\mathcal{P}_r$ par la pompe du réseau électrique.
6. Calculez le $NPSH_{disponible}$ de la pompe. L'installation peut-elle fonctionner sachant que le constructeur indique un $NPSH_{requis}$ de 2 mètres (mCE) pour le point de fonctionnement considéré ? On donne la pression de vapeur saturante de l'eau : $p_{vs} = 2340$ Pa.

Corrigé

1

$$K_3 = \frac{\alpha}{90} \times \left[0,131 + 1,847\left(\frac{D}{2r}\right)^{3,5}\right] \text{ où } \alpha \text{ est l'angle du coude exprimé en degrés}$$

$$K_3 = \frac{90}{90} \times \left[0,131 + 1,847\left(\frac{125}{2 \times 375}\right)^{3,5}\right] = 0,131.$$

2

$$v_A = \frac{Q}{S_A} = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 10.10^{-3}}{\pi \times (125.10^{-3})^2} = 0,815 \text{m/s}$$

$$\mathcal{R}e_A = \frac{v_A D_1}{\nu} = \frac{0,815 \times 125.10^{-3}}{10^{-6}} = 101\ 860$$

$$\frac{\epsilon}{D_1} = \frac{0,1}{125} = 0,0008 \qquad f_A \approx 0,021.$$

3

$$v_B = \frac{Q}{S_B} = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 10.10^{-3}}{\pi \times (80.10^{-3})^2} = 1,989 \text{m/s}$$

$$\mathcal{R}e_B = \frac{v_A D_2}{\nu} = \frac{1,989 \times 80.10^{-3}}{10^{-6}} = 1,59.10^5$$

$$\frac{\epsilon}{D_2} = \frac{0,1}{80} = 0,00125 \qquad f_A \approx 0,022.$$

4

Appliquons le théorème de Bernoulli (hauteur) entre les points 0 et 7.

$$\frac{p_0}{\rho g} + z_0 + \frac{v_0^2}{2g} + \Delta H_p = \frac{p_7}{\rho g} + z_7 + \frac{v_7^2}{2g} + \text{Somme des pertes de charge entre 0 et 7.}$$

$$p_0 = p_7 = p_{atm} \quad ; \quad v_0 = v_7 = 0$$

$$\Delta H_p = (z_7 - z_0) + \text{Somme des pertes de charge entre 0 et 7.}$$

$$\Delta H_p = (z_7 - z_0) + f_A \times \frac{L_1}{D_1} \times \frac{v_A^2}{2g} + (K_1 + K_2 + K_3)\frac{v_A^2}{2g} + f_B \times \frac{L_2}{D_2} \times \frac{v_B^2}{2g} + K_4 \times \frac{v_B^2}{2g}.$$

$$\Delta H_p = 42+0,021\times\frac{15}{125.10^{-3}}\times\frac{0,815^2}{2\times 10}+(3+1,2+0,131)\frac{0,815^2}{2\times 10}+0,022\times\frac{925}{80.10^{-3}}\times\frac{1,989^2}{2\times 10}+1\times\frac{1,989^2}{2\times 10}.$$

$$\Delta H_p = 92,76 \text{ mCE}$$

5

$$P_u = Q\ \rho\ g\ \Delta H_p$$
$$P_u = 10.10^{-3}\times 1000\times 9,81\times 92,76$$

$$P_u = 9276\text{W}$$

$$\eta = \frac{P_u}{P_r} \quad ; \quad P_r = \frac{P_u}{\eta} = \frac{9276}{0,8} = 11596\text{W}$$

6

$$NPSH_d = \frac{p_0}{\rho g} + (z_0 - z_4) - J_A - \frac{p_{vs}}{\rho g}$$

$$NPSH_d = \frac{101300}{1000\times 10} + (-6) - 0,021\times\frac{15}{125.10^{-3}}\times\frac{0,815^2}{2\times 10} - (3+1,2+0,131)\times\frac{0,815^2}{2\times 10} - \frac{2340}{1000\times 10}$$

$$NPSH_d = 3,67m$$

$$NPSH_d > NPSH_r$$

L'installation peut fonctionner.

Annexe

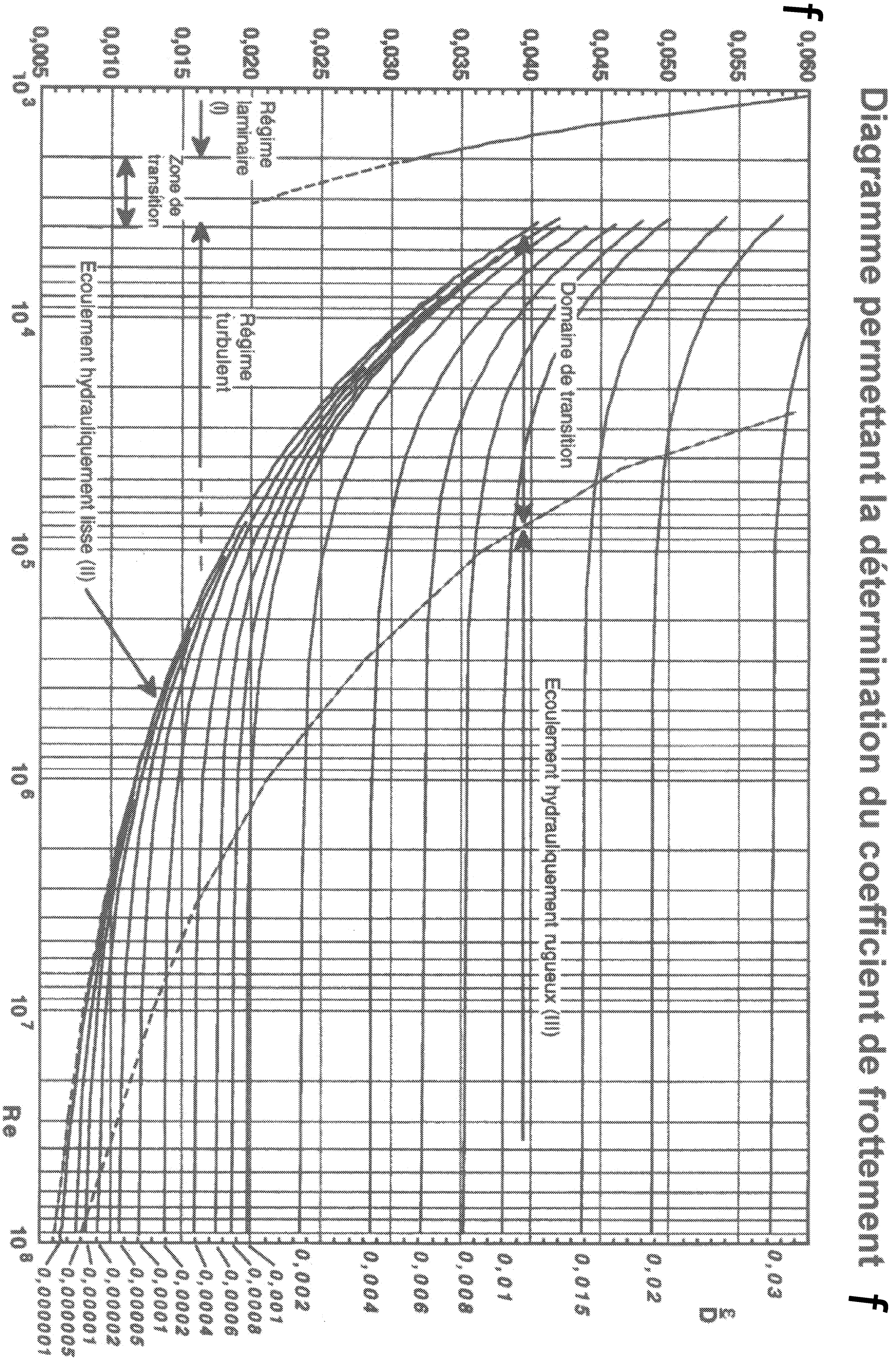

Diagramme de Colebrooke