UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE DES SCIENCES SEMLALIA
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
MARRAKECH

ANNEE UNIVERSITAIRE 2013/2014

SMP / S4

Mécanique quantique

* Exercices complémentaires de la série 1 *

I. L'effet Compton

1) a- Interpréter la relation qui régit l'effet Compton :

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

b- Montrer que la relation entre l'angle de diffusion du photon et l'angle de diffusion de l'électron est telle que :

$$\cot g\,\varphi = \left(1+\frac{h\nu_0}{mc^2}\right)\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$$

c- Montrer que l'énergie cinétique maximale transférée à l'électron après diffusion est :

$$E_c^{max} = \frac{h\nu_0}{1+\dfrac{mc^2}{2h\nu_0}}$$

2) a- Un rayon X de longueur d'onde 0.300Å subit une diffusion Compton à 60°. Quelles sont, après diffusion, la longueur d'onde du photon et l'énergie cinétique de l'électron.

b- Un électron frappé par un Rayon X de 0,5 MeV acquiert une énergie de 0.1 MeV.

i) Calculer la longueur d'onde du photon diffusé sachant que l'électron était initialement au repos.

ii) Calculer l'angle que fait le photon diffusé avec le photon incident.

On donne : h/mc=0,024Å (=λ_C dite longueur d'onde de Compton).

II. Quantification de l'énergie : Modèle de Bohr pour un hydrogènoïde

Un hydrogénoïde est un atome constitué d'un électron (masse m et charge –e) et d'un noyau de masse M>>m et de charge +Ze. On suppose que l'électron décrit un cercle de rayon r autour du noyau supposé fixe

1) a) Montrer que l'énergie totale de l'hydrogénoïde s'écrit : $E = -\frac{Ze^2}{8\pi\pi_0}\frac{1}{r}$

b) Quelle est la signification d'une énergie totale nulle ?

2) Quelle résultat obtient-on par application de la théorie classique ?

3) On tient compte des deux hypothèses suivantes (hypothèses de Bohr) :

- les seules orbites permises pour l'électron sont celles pour lesquelles le moment cinétique $\vec{\sigma}$ satisfait à la relation : $\|\vec{\sigma}\| = n\hbar$ où n est un entier ≥ 1
- l'électron rayonne de l'énergie seulement lorsqu'il saute d'une orbite caractérisée par une énergie E_n à une autre orbite d'énergie E_p plus petite. La fréquence ν_{np} d'émission est telle que : $h\nu_{np} = E_n - E_p$

a) Etablir l'expression du rayon des orbites permises ainsi que leurs énergies correspondantes.

b) Montrer que les longueurs d'onde λ_{nm} d'émission vérifient la relation suivante :

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = Z^2 R_H\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$ où R_H est une constante, dite de Rhydberg.

Exprimer littéralement, puis numériquement la constante R_H.

c) Donner les séries associées aux valeurs de p et n.

A. KADDOURI

Février 2014

SMP / S4

Mécanique Quantique

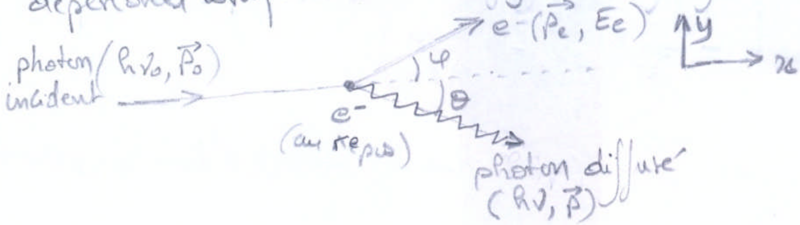
CORRIGÉ des EXERCICES COMPLEMENTAIRES

I/ Effet Compton

1°) a) $\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$

Cette relation décrit convenablement le processus physique qui se produit lors de la collision d'un rayonnement X avec un e^-. Le rayonnement X est décrit en terme de photon ayant une énergie $E_0 = h\nu_0 = hc/\lambda_0$ et une impulsion $p_0 = E_0/c$.

Après le choc, le photon diffusé change de longueur d'onde qui dépendra uniquement de l'angle θ de diffusion.



Remarque : $\frac{h}{mc}$ est appelée longueur d'onde de Compton $= 0,024$ Å

b) relation entre φ et θ :

Considérons la relation de conservation de l'impulsion :

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e$$

Projection sur les axes ox et oy

$$\begin{cases} p_0 = p\cos\theta + p_e\cos\varphi \\ 0 = -p\sin\theta + p_e\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_e\cos\varphi = p_0 - p\cos\theta & (1) \\ p_e\sin\varphi = p\sin\theta & (2) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \cot g\,\varphi = \frac{p_0}{p}\cdot\frac{1}{\sin\theta} - \cot g\,\theta \quad (3)$$

or on a : $\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_0} + \frac{h}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)$

$$\Rightarrow h\nu = \frac{h\nu_0}{1 + \frac{h\nu_0}{mc^2}(1-\cos\theta)} \quad (4)$$

on a: $E_0 = h\nu_0 = p_0 c$ et $E = h\nu = p c$ $\Rightarrow \frac{p_0}{p} = \frac{E_0}{E} = \frac{\nu_0}{\nu}$

$$\Rightarrow \frac{p_0}{p} = 1 + \frac{h\nu_0}{mc^2}(1-\cos\theta) \quad (5)$$

on porte (5) dans (3), on aura:

$$\cot g\varphi = \frac{1}{\sin\theta} - \cot g\theta + \frac{h\nu_0}{mc^2}\frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(1 + \frac{h\nu_0}{mc^2}\right)$$

sachant que: $1-\cos\theta = 2\sin^2\theta/2$ et $\sin\theta = 2\sin\theta/2\cos\theta/2$

on obtient l'expression demandée:

$$\cot g\varphi = \left(tg\,\theta/2\right)\left(1 + \frac{h\nu_0}{mc^2}\right)$$

c) L'énergie cinétique de l'électron diffusé est d'après la conservation de l'énergie: $E_c = h\nu_0 - h\nu$

En utilisant la relation (4) ci-dessus, on aura:

$$E_c = h\nu_0 - \frac{h\nu_0}{1+\frac{h\nu_0}{mc^2}(1-\cos\theta)}$$

$$\rightarrow E_c = \frac{h\nu_0}{1 + \frac{mc^2}{h\nu_0(1-\cos\theta)}}$$

E_c est maximale si $\frac{mc^2}{h\nu_0(1-\cos\theta)}$ est minimale c.à.d $(1-\cos\theta)$ maximale

et donc $\cos\theta = -1 \rightarrow \theta = \pi$.

Par conséquent: $\longrightarrow$ $E_c^{max} = \frac{h\nu_0}{1 + \frac{mc^2}{2h\nu_0}}$

(3/5)

2°) Applications :

a) $\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) = 0,3 + 0,0243(1-\cos 60) = 0,312 \mathring{A}$

et on a bien $\lambda \gg \lambda_0$ càd $E < E_0$.

Conservation de l'énergie donne :

$$E_c = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} \quad A.N : E_c = 1,59 \text{ keV}$$

b) $E_{initiale} = E_{finale}$

$\Rightarrow 0,500 \text{ MeV} = E + 0,100 \text{ MeV}$

$\Rightarrow E = 0,400 \text{ MeV}$

i) or $E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{12.400 (eV.\mathring{A})}{0,4.10^6 (eV)} = 31.10^{-3} \mathring{A}$

ii) Longueur d'onde incidente λ_0 et

$$\lambda_0 = \frac{hc}{E_0} = \frac{12400 \ (eV.\mathring{A})}{0,5 \ 10^6} = 24,8 \ 10^{-3} \mathring{A}$$

et d'après Compton :

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

$\rightarrow 31.10^{-3} - 24,8 \ 10^{-3} = 0,024 \ (1-\cos\theta)$

D'où : $\theta = 42°$

A noter l'application numérique de $E = \frac{hc}{\lambda}$.

$$E(eV) = \frac{12400}{\lambda(\mathring{A})}$$

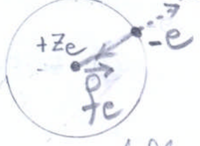
II / Le Modèle de Bohr

<u>Hydrogénoïde</u> = ion de charge $Z-1$: $H_e^+ (Z=2)$; $Li^{2+} (Z=3)$, etc...

1°)

$$\vec{f_e} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u}$$

a)



Energie Totale $E_T = E_c + E_p$

- avec E_{p_∞} telle que : $\vec{f} = -\vec{\nabla} E_p \Rightarrow \vec{f}\cdot\vec{dr} = -\vec{\nabla}E_p\,\vec{dr} = -dE_p$

$$\rightarrow \int_r^\infty \vec{f}\cdot\vec{dr} = -\int_r^\infty dE_p = \int_\infty^r dE_p \Rightarrow \int_r^\infty \vec{f}\cdot\vec{dr} = E_p(r) - \underbrace{E_p(\infty)}_{=0}$$

avec $\displaystyle\int_r^\infty \vec{f}\cdot\vec{dr} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{\vec{dr}\cdot\vec{u}}{r^2} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = +\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_r^\infty$

$$\Rightarrow E_p(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

- PFD : $\vec{f} = m\vec{\gamma} = m(\vec{\gamma_T} + \vec{\gamma_N}) = m\vec{\gamma_N}$ ($\vec{\gamma_T} = 0$ car $\|\vec{v}\| = cte$)

avec $\vec{\gamma_N} = -\frac{v^2}{r}\vec{u} \Rightarrow \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow mv^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

et $E_c = \dfrac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$

et donc $$E_T = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

b) $E_T \to 0 \Rightarrow r \to \infty$: l'e^- s'éloigne indéfiniment du noyau
$\Rightarrow$ l'atome est ionisé.

2°) D'après la théorie classique : une charge en mouvement possédant une accélération, rayonne de l'énergie. L'e^- perdant ainsi de l'énergie se rapprocherait de plus en plus du noyau. On aurait alors une instabilité de l'atome (l'e^- tomberait sur le noyau) !!.

3°) • 1ère Hypothèse de Bohr : Quantification du moment cinétique $\vec{\sigma}$

$$\|\vec{\sigma}\| = n\hbar \Rightarrow mvr = n\hbar \Rightarrow v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2} \Rightarrow mv^2 = \frac{n^2\hbar^2}{mr^2} = 2E_c$$

a) $\Rightarrow \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{n^2\hbar^2}{mr^2}$ soit $r = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2Z}n^2 \Rightarrow r_n = r_1 n^2$

$n = 1, 2, 3, \dots, \infty$

avec $r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0{,}53$ Å = que l'on pose $= a_0$

$\Rightarrow r_n = a_0\frac{n^2}{Z} \Rightarrow$ le rayon r ne peut prendre que les valeurs suivantes :

$r = \frac{a_0}{Z}, \frac{4a_0}{Z}, \frac{9a_0}{Z}, \frac{16a_0}{Z}$, etc... avec $a_0 = r_1$ = le rayon de la 1ère orbite de Bohr

En portant $r = a_0n^2$ dans l'expression E_T, on aura :

$$E_T = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0 n^2}\cdot Z = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}\frac{Z^2}{n^2} = -E_1\frac{Z^2}{n^2}$$

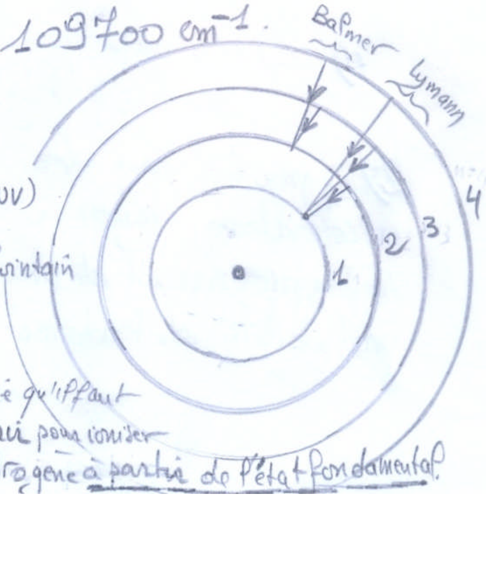
L'énergie totale de l'é- est donc **quantifiée** et ne prend donc que les valeurs : $-Z^2E_1, -Z^2E_1/4, -Z^2E_1/9, \dots$ avec $E_1 = 13{,}6$ eV.

b) • 2ème Hypothèse : l'é- rayonne seulement lorsqu'il passe d'une orbite n° n (d'énergie $-E_1/n^2$) à une orbite n° p (d'énergie $-E_1/p^2$) avec $n > p \Rightarrow$ l'e- émet alors un photon d'énergie : $h\nu = E_n - E_p$

$$\Rightarrow \nu_{n\to p} = \frac{E_n - E_p}{h} = -\frac{Z^2E_1}{h}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{p^2}\right) = Z^2\frac{E_1}{h}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

avec $\nu = \frac{c}{\lambda} \longrightarrow \frac{1}{\lambda_{n\to p}} = \frac{Z^2E_1}{ch}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{n^2}\right) = Z^2R_H\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{n^2}\right)$

avec $R_H = \frac{E_1}{ch} = 1{,}097.10^{+7}\,m^{-1} = 109700\,cm^{-1}$.



c) • $p = 1 \to n = 1, 2, 3, \dots$ Série de Lymann (U.V)
- $p = 2 \to n = 2, 3, 4, \dots$ Série de Balmer (visible + UV)
- $p = 3 \to n = 4, 5, 6, \dots$ Série de Paschen (I.R)
- $p = 4 \to n = 5, 6, \dots$ Série de Brackette (I.R lointain)
- $p = 5 \to n = 6, 7, \dots$ Série Pfund

exemple : $\frac{1}{\lambda_{4\to 2}} = Z^2R_H\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right) = \frac{3}{16}Z^2R_H$

Rq : $p = 1$ et $n \to \infty \Rightarrow h\nu = E_1 = 13{,}6$ eV $\Big\{$ énergie qu'il faut fournir pour ioniser l'hydrogène à partir de l'état fondamental.