

T.D de Physique Quantique - SMP - S5
SERIE N°3

Exercice1/

On considère un système physique dont l'espace des états est à trois dimensions et rapporté à la base orthonormée formée par $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Dans la base de ces trois vecteurs, l'hamiltonien H du système et l'observable A sont donnés par :

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a et ω_0 sont des constantes réelles.

Le système à l'instant $t = 0$ est dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

1) On mesure, à l'instant $t = 0$, l'énergie du système, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

- Calculer pour le système dans l'état $|\psi(0)\rangle$ l'écart quadratique moyen ΔH .

2) A $t=0$ on mesure H, on trouve $2\hbar\omega_0$, quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?

3) Au lieu de mesurer H à l'instant $t = 0$, on mesure A, quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?

4) Calculer le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ du système à l'instant t .

5) Quels résultats obtient-on si l'on mesure à l'instant t l'observable A ? Interprétation ?

Exercice 2/

Soit un système physique formé de deux particules (1) et (2) de même masse n'interagissant pas entre elles et placées toutes les deux dans un puits de potentiel infini de largeur a . On désigne par $H(1)$ et $H(2)$ les hamiltoniens de chacune de deux particules, par $|\varphi_n(1)\rangle$ et $|\varphi_q(2)\rangle$ les états propres correspondants d'énergies E_n et E_q . Dans l'espace des états du système global, on considère la base des états $|\varphi_n \varphi_q\rangle$ définis par:

$$|\varphi_n \varphi_q\rangle = |\varphi_n(1)\rangle \otimes |\varphi_q(2)\rangle$$

1) Quels sont les états propres et les valeurs propres de l'opérateur Hamiltonien total du système ;

$$H = H(1) + H(2) ?$$

- Donner le degré de dégénérescence des deux niveaux d'énergie les plus basses.

2) On suppose que le système est, à l'instant $t = 0$, dans l'état ;

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_1 \varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_1 \varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_2 \varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_2 \varphi_2\rangle$$

a) Quel est l'état du système à l'instant t ?

b) On mesure l'énergie totale H , quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités?

c) Même question si, au lieu de mesurer H , on mesure $H(1)$.

d) Montrer que $|\psi(0)\rangle$ est un état produit tensoriel. Lorsque le système est dans cet état, calculer les valeurs moyennes suivantes : $\langle H(1) \rangle$, $\langle H(2) \rangle$ et $\langle H(1)H(2) \rangle$.

- Comparer $\langle H(1)H(2) \rangle$ à $\langle H(1) \rangle \langle H(2) \rangle$. Comment expliquer le résultat obtenu.

3) Montrer que les résultats précédents restent valables lorsque l'état du système est l'état $|\psi(t)\rangle$ calculé en a).

4) On suppose maintenant que l'état $|\psi(0)\rangle$ est donné par :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|\varphi_1\varphi_1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|\varphi_1\varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\varphi_2\varphi_1\rangle$$

Montrer que $|\psi(0)\rangle$ ne peut pas être mis sous forme d'un produit tensoriel. Que deviennent alors les réponses aux diverses questions posées en 2°).

Exercice 3/

On considère un oscillateur harmonique de masse m et de pulsation ω , l'hamiltonien est alors donné par ;

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2.$$

A l'instant $t = 0$, l'état de cet oscillateur est donné par ;

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n C_n |\varphi_n\rangle$$

où $|\varphi_n\rangle$ sont les états stationnaires de H , d'énergies ;

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

1) Déterminer le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant $t > 0$. Quelle est la probabilité $\mathcal{P}$ pour qu'une mesure de l'énergie de l'oscillateur effectuée à l'instant t donne un résultat supérieur à $2\hbar\omega$? Lorsque $\mathcal{P} = 0$, quels sont les coefficients C_n non nuls?

2) On suppose à partir de maintenant que seuls C_0 et C_1 sont différents de zéro.

a) Calculer les valeurs moyennes $\langle X \rangle$, $\langle P \rangle$, $\langle X^2 \rangle$ et $\langle P^2 \rangle$ dans l'état $|\psi(0)\rangle$, en déduire les écarts quadratiques moyens ΔX et ΔP dans ce même état.

b) Calculer la valeur moyenne de l'énergie $\langle H \rangle$ dans l'état $|\psi(0)\rangle$. En imposant que $\langle H \rangle = \hbar\omega$ et en écrivant la condition de normalisation de $|\psi(0)\rangle$, calculer $|C_0|^2$ et $|C_1|^2$.

3) Le vecteur d'état normé $|\psi(0)\rangle$ n'étant défini qu'à un facteur de phase globale près, on fixe ce facteur de phase en prenant C_0 réel et positif. On pose $C_1 = |C_1| \exp i\theta_1$.

En plus, de $\langle H \rangle = \hbar\omega$, on suppose que $\langle X \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Calculer θ_1 .

4) $|\psi(0)\rangle$ étant ainsi déterminé, écrire $|\psi(t)\rangle$ pour $t > 0$ et calculer la valeur de θ_1 à l'instant t . En déduire la valeur moyenne $\langle X(t) \rangle$ de la position à l'instant t .

Solution de la série n° 3
ph. Q. (S5 - SMP)

Exercice 1

Un système physique définit ds 1 espace des états $\mathcal{E}$ à 3 dimensions et rapporté à la base B.O.N $\{|u_i\rangle_{i=1,2,3}\}$. Soient 2 observables H et A,

$$H = \hbar \omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a, \omega_0 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{à } t=0, \text{ l'état est : } |\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |u_3\rangle$$

1) à $t=0$, on mesure H, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

* D'après le postulat 3 : $\text{Mes}(H) \rightarrow$ l'une de ses v.ps.

* v.ps de H : or, H est une matrice diagonale

$\Rightarrow$ ses v.ps st les éléments de la diagonale

$$\Rightarrow \text{v.ps}(H) = \{ \hbar \omega_0, 2 \hbar \omega_0 \}$$

$$\text{Mes}(H) \rightarrow \{ \hbar \omega_0, 2 \hbar \omega_0 \}$$

* v'.ps de H : H étant diagonal $\Rightarrow$ ses v'.ps st les v' de base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$

①

* $E_1 = \hbar \omega_0$ est non dégénérée $\rightarrow |u_1\rangle$

* $E_2 = 2\hbar \omega_0$ " 2 fois " $\begin{cases} |u_2\rangle \\ |u_3\rangle \end{cases}$

$\Rightarrow$ D'après le postulat 4 :

$$P(E_1 = \hbar \omega_0) = |\langle u_1 | \psi(0) \rangle|^2 = \left| \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P(E_2 = 2\hbar \omega_0) &= |\langle u_2 | \psi(0) \rangle|^2 + |\langle u_3 | \psi(0) \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_i P(E_i) = 1$$

* Ecart quadratique de H : ΔH

il est défini par : $\Delta H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$

$$\text{or, } \langle H \rangle = \sum_{i=1}^2 E_i P(E_i)$$

$$\Rightarrow \langle H \rangle = \frac{\hbar \omega_0}{2} + \frac{2\hbar \omega_0}{2} = \frac{3\hbar \omega_0}{2}$$

$$\text{E) } \boxed{\langle H^2 \rangle = \frac{9\hbar^2 \omega_0^2}{4}}$$

* Pour H^2 la matrice correspondante est :

$$H^2 = \hbar^2 \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Postulat de mesure de $H^2 \rightarrow$ les v.p.s de H^2

②

$$\text{Mes}(H^2) \begin{cases} \hbar^2 \omega_0^2 \text{ non dégénérée} \rightarrow |m_1\rangle \\ 4\hbar^2 \omega_0^2 \text{ 2 fois dégénérée} \\ \begin{cases} |m_2\rangle \\ |m_3\rangle \end{cases} \end{cases}$$

$$P(\hbar^2 \omega_0^2) = |\langle m_1 | \psi(0) \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(4\hbar^2 \omega_0^2) = |\langle m_2 | \psi(0) \rangle|^2 + |\langle m_3 | \psi(0) \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \langle H^2 \rangle = \sum_i E_i^2 P(E_i) = \frac{\hbar^2 \omega_0^2}{2} + \frac{4\hbar^2 \omega_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle H^2 \rangle = \frac{5\hbar^2 \omega_0^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \Delta H^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = \frac{5\hbar^2 \omega_0^2}{2} - \frac{9\hbar^2 \omega_0^2}{4}$$

$$\Delta H^2 = \frac{\hbar^2 \omega_0^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta H = \frac{\hbar \omega_0}{2}}$$

2) à $t=0$, on mesure H on trouve $2\hbar\omega_0$
 $\Rightarrow$ le vecteur d'état immédiatement après la mesure est la projection normalisée sur le sous-espace engendré par les $\vec{E}_p$ associés à $2\hbar\omega_0$

$$|\psi'\rangle = \frac{P_2 |\psi(0)\rangle}{\sqrt{\langle \psi(0) | P_2 | \psi(0) \rangle}}$$

(3)

$$\text{on } P_2 = |u_2\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3|$$

$$\Rightarrow P_2 |\psi(0)\rangle = (|u_2\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3|) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle \right)$$

$$\Leftrightarrow P_2 |\psi(0)\rangle = \frac{1}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \psi(0) | P_2 | \psi(0) \rangle = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \langle u_1| + \frac{1}{2} \langle u_2| + \frac{1}{2} \langle u_3| \right) \cdot \left(\frac{1}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |\psi'\rangle = \frac{\frac{1}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u_2\rangle + |u_3\rangle)}$$

← qui est bien normé

3). Maintenant on mesure A à $t=0$
 $\Rightarrow$ Résultats et probabilités ?

D'après le postulat 3, $\text{Mes}(A) \rightarrow \{ \text{v.p.s de } A \}$

* Détermination des v.p.s de A :

(u)

tout d'abord une v.p de A est l'élément "a" de la diagonale associé au $\vec{v}$ p. $|u_1\rangle$ qui est le $\vec{v}$ de base / $A|u_1\rangle = a|u_1\rangle$.

* Soit $\bar{A}$ la restriction de A au sous espace engendré par les $\vec{v}$ de base $\{|u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ /

$$\bar{A} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Les v.p.s de } \bar{A} \text{ st telles que :}$$

$$\det(\bar{A} - \lambda I) = 0 \quad (\text{Eq. caractéristique de } \bar{A})$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - a^2) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \text{ solutions : } \lambda_+ = a \text{ et } \lambda_- = -a$$

$$\Leftrightarrow \text{Mes}(A) \rightarrow \{a, -a\} \quad (\text{post. 3})$$

* Cherchons les $\vec{v}$ p.s associés à λ_+ et λ_- :

soit $|d_+\rangle$ $\vec{v}$ p associé à λ_+ /

$|d_-\rangle$ " " " " λ_- /

$$|d_+\rangle = \alpha_1 |u_2\rangle + \beta_1 |u_3\rangle$$

$$|d_-\rangle = \alpha_2 |u_2\rangle + \beta_2 |u_3\rangle$$

$$\text{avec } |\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1 \quad \text{pour } i=1, 2$$

(5)

* Eq. aux v.ps pour d_+ :

$$\bar{A} |d_+\rangle = d_+ |d_+\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \beta_1}$$

$$\Rightarrow 2|\alpha_1|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{|d_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |u_3\rangle}$$

* Eq. aux v.ps pour d_- :

$$\bar{A} |d_-\rangle = d_- |d_-\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = -a \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\beta_2 = -\alpha_2}$$

$$\Rightarrow 2|\alpha_2|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ et } \boxed{\beta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{|d_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |u_3\rangle}$$

* En conclusion les v.ps de A sont:

$$\begin{cases} a \text{ est 2 fois dégénérée} \begin{matrix} \nearrow |u_1\rangle \\ \searrow |d_+\rangle \end{matrix} \\ -a \text{ est non dégénérée} \rightarrow |d_-\rangle \end{cases}$$

6

* probabilités de mesure, (post. 4.)

$$P(a) = |\langle u_1 | \psi \rangle|^2 + |\langle d_+ | \psi \rangle|^2$$

$$= \left| \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_2 | + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_3 | \right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |u_3\rangle \right) \right|^2$$

$$\Rightarrow P(a) = \frac{1}{2} + \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right|^2$$

$$P(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$* P(-a) = |\langle d_- | \psi \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = 0$$

$\Rightarrow$ le vecteur d'état immédiatement après la mesure qui donne la v. p. a. est donné d'après le postulat 5 par :

$$|\psi'\rangle = \frac{P_n |\psi(0)\rangle}{\sqrt{\langle \psi(0) | P_n | \psi(0) \rangle}}$$

où P_n : Projecteur sur le sous espace engendré par les $\vec{e}_p$ de a : $\{ |u_1\rangle, |d_+\rangle \}$

$$\Rightarrow P_n = |u_1\rangle \langle u_1| + |d_+\rangle \langle d_+|$$

$$= |u_1\rangle \langle u_1| + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |u_3\rangle \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_2| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_3| \right)$$

(7)

$$\Rightarrow P_n = |u_1\rangle\langle u_1| + \frac{1}{2} \left(|u_2\rangle\langle u_2| + |u_2\rangle\langle u_3| + |u_3\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3| \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_n |\psi(0)\rangle &= \left[|u_1\rangle\langle u_1| + \frac{1}{2} |u_2\rangle\langle u_2| + \frac{1}{2} |u_2\rangle\langle u_3| + \frac{1}{2} |u_3\rangle\langle u_2| + \frac{1}{2} |u_3\rangle\langle u_3| \right] \cdot \left[\frac{i}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |u_3\rangle \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{4} |u_2\rangle + \frac{1}{4} |u_2\rangle + \frac{1}{4} |u_3\rangle + \frac{1}{4} |u_3\rangle$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_n |\psi(0)\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle \\ &= |\psi(0)\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \psi(0) | P_n | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | \psi(0) \rangle = 1.$$

$$\Rightarrow |\psi'\rangle = |\psi(0)\rangle$$

* Ceci est normal car la probabilité de trouver la v.p a comme résultat de mesure de A est 1.
De même, ceci étant car le vecteur d'état $|\psi(0)\rangle$ est aussi un v.p de l'observable A associé à la v.p a ; tel que $A |\psi(0)\rangle = a |\psi(0)\rangle$
(voir polycopé de cours Postula 3 p:153)

8

* Et puisque la probabilité de trouver la v.p. $-a$ pour A est égale à 0 $\Rightarrow$ l'état immédiatement après la mesure de A qui donne $-a$ est nul. ($|\psi'_{-a}\rangle = 0$)
 (Le calcul avec le projecteur sur $|d_-\rangle$ donnera facilement ce résultat $P_{d_-} |\psi\rangle = 0$)

u) $\vec{U}$ d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant t :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |u_1\rangle + \frac{1}{2} e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |u_2\rangle + \frac{1}{2} e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |u_3\rangle$$

$$\text{or, } H|u_1\rangle = \hbar\omega_0 |u_1\rangle$$

$$H|u_2\rangle = 2\hbar\omega_0 |u_2\rangle \quad \text{et } H|u_3\rangle = 2\hbar\omega_0 |u_3\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{i e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{e^{-2i\omega_0 t}}{2} (|u_2\rangle + |u_3\rangle)$$

5) Résultats de mesure de A sur l'état $|\psi(t)\rangle$ seront toujours a et $-a$. (Les v.p.s sont constantes)

$$\begin{aligned} P(a) &= |\langle u_1 | \psi(t) \rangle|^2 + |\langle d_+ | \psi(t) \rangle|^2 \\ &= \left| \frac{i e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_2 | + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_3 | \right) \cdot \left(\frac{i e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{e^{-2i\omega_0 t}}{2} |u_2\rangle + \frac{e^{-2i\omega_0 t}}{2} |u_3\rangle \right) \right|^2 \end{aligned}$$

(9)

$$\Rightarrow P(a) = \frac{1}{2} + \left| e^{-2i\omega_0 t} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{et } P(-a) = |\langle d_- | \psi(t) \rangle|^2 = 0$$

Ceci est normal, car le système est conservatif et l'observable A est une constante de mouvement
 $\Rightarrow$ Il y a conservation des v.p.s et des probabilités.

Rq: on peut facilement vérifier que $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \text{cte}$
 c.-à-d. $\frac{d\langle A \rangle}{dt} = 0$ et que $[A, H] = 0$

Fin de l'ex 1.

10

Exercice 2 : Deux particules (1) et (2) sans interaction mutuelle, de même masse et soumises à un puit de potentiel infini de largeur a .

* Soit $H(1)$ l'hamiltonien de la particule (1) défini ds l'espace des états $\mathcal{E}_1$, de $\vec{p} |u_n(1)\rangle$ et de v.p E_n / $H(1) |u_n(1)\rangle = E_n |u_n(1)\rangle$

* Soit $H(2)$ l'hamiltonien de la particule (2) définie ds $\mathcal{E}_2$, de $\vec{p} |u_q(2)\rangle$ et de v.p E_q / $H(2) |u_q(2)\rangle = E_q |u_q(2)\rangle$

les E_n et E_q sont les énergies propres respectives des particules (1) et (2) ds le puit ∞ /

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad \text{et} \quad E_q = \frac{q^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

$$n, q \in \mathbb{N}^*$$

* Ds l'espace des états global $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ on définit les états produit tensoriel $|u_n u_q\rangle$

$$\text{par : } |u_n u_q\rangle = |u_n(1)\rangle \otimes |u_q(2)\rangle$$

1/ Soit $H = H(1) + H(2)$ l'hamiltonien total du système des 2 particules défini ds $\mathcal{E}$.

(11)

* Etats propres et énergies propres de H :

$$\begin{aligned}
 H |u_n u_q\rangle &= (H(1) + H(2)) |u_n u_q\rangle \\
 &= \overbrace{H(1) |u_n(1)\rangle} \otimes |u_q(2)\rangle \\
 &\quad + \overbrace{H(2) |u_n(1)\rangle} \otimes |u_q(2)\rangle \\
 &= E_n |u_n u_q\rangle + E_q |u_n u_q\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow H |u_n u_q\rangle &= (E_n + E_q) |u_n u_q\rangle \\
 &= (n^2 + q^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} |u_n u_q\rangle
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow |u_n u_q\rangle$ st les états propres de H associés
aux énergies propres $E_{nq} = E_n + E_q = (n^2 + q^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$

$$\boxed{H |u_{nq}\rangle = E_{nq} |u_{nq}\rangle}$$

* Degré de dégénérescence des deux 1^{er} niveaux d'énergie :

* Etat fondamental ; $n = q = 1$

$$E_{11} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2} \longrightarrow \text{Vp: } |u_1 u_1\rangle$$

↳ non dégénéré

(12)

* 1^{er} état excité : $n=2; q=1$ et $n=1; q=2$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \begin{matrix} \nearrow |e_{12}\rangle \\ \searrow |e_{21}\rangle \end{matrix}$$

↳ 2 fois dégénéré.

2) à $t=0$, l'état du système est :

$$|\psi(0)\rangle = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}_{c_{11}} |e_{11}\rangle + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{c_{12}} |e_{12}\rangle + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}_{c_{21}} |e_{21}\rangle + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{c_{22}} |e_{22}\rangle$$

a) Etat du système à l'instant t :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{iE_{11}t}{\hbar}} |e_{11}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{iE_{12}t}{\hbar}} |e_{12}\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{iE_{21}t}{\hbar}} |e_{21}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{iE_{22}t}{\hbar}} |e_{22}\rangle \end{aligned}$$

où $E_{22} = \frac{8\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\psi(t)\rangle &= \frac{e^{-\frac{i\pi^2 \hbar t}{ma^2}}}{\sqrt{6}} |e_{11}\rangle + \frac{e^{-\frac{5i\pi^2 \hbar t}{2ma^2}}}{\sqrt{3}} |e_{12}\rangle \\ &\quad + \frac{e^{-\frac{5i\pi^2 \hbar t}{2ma^2}}}{\sqrt{6}} |e_{21}\rangle + \frac{e^{-\frac{4i\pi^2 \hbar t}{ma^2}}}{\sqrt{3}} |e_{22}\rangle \end{aligned}$$

(13)

b) On mesure l'énergie totale les résultats qu'on trouve sont :

→ soit $E_{11} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$ avec la probabilité :

$$P(E_{11}) = |C_{11}|^2 = \frac{1}{6}$$

→ soit $E_{12} = E_{21} = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ avec la probabilité :

$$P(E_{12} = E_{21}) = |C_{12}|^2 + |C_{21}|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

→ soit $E_{22} = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$ avec la probabilité :

$$P(E_{22}) = |C_{22}|^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \sum P(E) = 1.$$

c) Cette fois on mesure $H(1)$ au lieu de H .

⇒ Les résultats de mesure de $H(1)$ sont ses

v.p.s E_n . Donc, * chaque opérateur agit dans son espace.

→ Soit $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ dont les v.p.s de E $\begin{cases} |e_{11}\rangle \\ |e_{12}\rangle \end{cases}$

↳ 2 fois dégénéré de E .

$$\Rightarrow P(E_1) = |C_{11}|^2 + |C_{12}|^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

→ soit $E_2 = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$ de v.p.s $\begin{cases} |e_{21}\rangle \\ |e_{22}\rangle \end{cases}$

↳ 2 fois dégénéré de E .

(14)

$$\Rightarrow P(E_2) = |c_{21}|^2 + |c_{22}|^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum P(E_i) = 1$$

d) Montrons que $|\psi(0)\rangle$ est un état produit tensoriel.
c-a-d. existe-t-il 2 états $|\chi(1)\rangle \in E_1$

et $|\chi(2)\rangle \in E_2$ tels que

$$|\psi(0)\rangle = |\chi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$$

cherchons $|\chi(1)\rangle = \alpha_1 |e_1\rangle + \beta_1 |e_2\rangle \in E_1$

et $|\chi(2)\rangle = \alpha_2 |e_1\rangle + \beta_2 |e_2\rangle \in E_2$

tels que :

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle &= (\alpha_1 |e_1\rangle + \beta_1 |e_2\rangle) \otimes (\alpha_2 |e_1\rangle + \beta_2 |e_2\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} |e_{11}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |e_{12}\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |e_{21}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |e_{22}\rangle \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow |\psi(0)\rangle = \alpha_1 \alpha_2 |e_{11}\rangle + \alpha_1 \beta_2 |e_{12}\rangle + \beta_1 \alpha_2 |e_{21}\rangle + \beta_1 \beta_2 |e_{22}\rangle$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}} \quad (1) \quad \boxed{\alpha_1 \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (2) \quad \boxed{\beta_1 \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}} \quad (3)$$

$$\boxed{\beta_1 \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (4) \quad \text{ou } |\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1$$

$$i=1, 2$$

(15)

$$\frac{(1)}{(3)} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1 \quad \text{Et } 2|\alpha_1|^2 = 1.$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\chi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |e_2\rangle$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \beta_2 = \sqrt{2} \alpha_2$$

$$\Leftrightarrow |\alpha_2|^2 + 2|\alpha_2|^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow |\chi(2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |e_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |e_2\rangle$$

* Valeurs moyennes $\langle H(1) \rangle$; $\langle H(2) \rangle$; $\langle H(1)H(2) \rangle$:

$$\star \langle H(1) \rangle = \frac{\sum_n E_n P(E_n(1))}{1} = \frac{E_1}{2} + \frac{E_2}{2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \langle H(1) \rangle = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{4ma^2}$$

$$\star \langle H(2) \rangle = \sum_9 E_9 P(E_9(2))$$

les énergies propres de $H(2)$ st $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$

qui est 2 fois dégenérée $\begin{matrix} \nearrow |e_{11}\rangle \\ \searrow |e_{21}\rangle \end{matrix}$

et $E_2 = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ 2 fois dégenérée $\begin{matrix} \nearrow |e_{12}\rangle \\ \searrow |e_{22}\rangle \end{matrix}$

(16)

$$\Rightarrow P(E_1) = |c_{11}|^2 + |c_{21}|^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(E_2) = |c_{12}|^2 + |c_{22}|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \langle H(2) \rangle = \frac{E_1}{3} + \frac{2E_2}{3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \right)$$

$$\boxed{\langle H(2) \rangle = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle H(1) \rangle \cdot \langle H(2) \rangle = \frac{15\pi^4 \hbar^4}{8m^2 a^4}}$$

$$* \langle H(1) \cdot H(2) \rangle = ?$$

les énergies propres de $H(1) \cdot H(2)$ sont,

$$E_n \cdot E_q = \frac{n^2 q^2 \pi^4 \hbar^4}{4m^2 a^4}$$

$$\Rightarrow * E_1 \cdot E_1 = \frac{\pi^4 \hbar^4}{4m^2 a^4} \longrightarrow |e_{11}\rangle : \text{non dégénérée}$$

$$* E_1 \cdot E_2 = E_2 \cdot E_1 = \frac{\pi^4 \hbar^4}{m^2 a^4} \begin{cases} |e_{12}\rangle \\ |e_{21}\rangle \end{cases} \left. \begin{array}{l} 2 \text{ fois} \\ \text{dégénérées} \end{array} \right\}$$

$$* E_2 \cdot E_2 = \frac{4\pi^4 \hbar^4}{m^2 a^4} \longrightarrow |e_{22}\rangle : \text{non dégénérée}$$

$$\Rightarrow P(E_1 \cdot E_1) = |c_{11}|^2 = \frac{1}{6}$$

(17)

$$* P(E_1 E_2 = E_2 E_1) = |c_{12}|^2 + |c_{21}|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$* P(E_2 E_2) = |c_{22}|^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \sum P = 1.$$

$$\text{E) } \langle H(1) H(2) \rangle = \sum_{n,q} E_n E_q P(E_n E_q)$$

$$= \frac{E_1 \cdot E_1}{6} + \frac{E_1 E_2}{2} + \frac{E_2 E_2}{3}$$

$$\text{E) } \langle H(1) H(2) \rangle = \frac{\pi^4 \hbar^4}{4 m^2 a^4} \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{2} + \frac{16}{3} \right)$$

$$\boxed{\langle H(1) H(2) \rangle = \frac{15 \pi^4 \hbar^4}{8 m^2 a^4} = \langle H(1) \rangle \langle H(2) \rangle}$$

ce résultat est dû au fait que $|\psi(0)\rangle$ est un état produit tensoriel.

3) Lorsque l'état du système est $|\psi(t)\rangle$ les résultats précédents $\langle H(1) \rangle, \langle H(2) \rangle$

$\langle H(1) H(2) \rangle$ restent les mêmes puisque H est indépendant du temps et le système étant conservatif $\Rightarrow$ conservation des probabilités et des valeurs moyennes.

(18)

4) Maintenant l'état du système à $t=0$ est:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |e_{11}\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}} |e_{12}\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |e_{21}\rangle$$

Cet état ne peut s'exprimer sous la forme d'un produit tensoriel car il ne contient pas le vecteur $|e_{22}\rangle$.

* Calcul des différentes valeurs moyennes:

* $\langle H(1) \rangle$: Résultat de $\text{Mes}(H(1)) \rightarrow \{E_1, E_2\}$

$$* E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \begin{matrix} \nearrow |e_{11}\rangle \\ \searrow |e_{12}\rangle \end{matrix} \rightarrow P(E_1) = |c_{11}'|^2 + |c_{12}'|^2$$

$$P(E_1) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$* E_2 = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{ma^2} \rightarrow |e_{21}\rangle \rightarrow P(E_2) = |c_{21}'|^2 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \langle H(1) \rangle = \frac{4E_1}{5} + \frac{E_2}{5} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5} \right)$$

$$\boxed{\langle H(1) \rangle = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{5ma^2}}$$

* $\langle H(2) \rangle$: $\text{Mes}(H(2)) \rightarrow \{E_1, E_2\}$

$$E_1 \begin{matrix} \nearrow |e_{11}\rangle \\ \searrow |e_{21}\rangle \end{matrix} \rightarrow P(E_1) = |c_{11}'|^2 + |c_{21}'|^2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

(19)

$$E_2 \rightarrow |e_{12}\rangle \rightarrow P(E_2) = |c'_{12}|^2 = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \langle H(2) \rangle = \frac{2E_1}{5} + \frac{3E_2}{5} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \left(\frac{2}{5} + \frac{12}{5} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle H(2) \rangle = \frac{7\pi^2 \hbar^2}{5ma^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle H(1) \rangle \cdot \langle H(2) \rangle = \frac{28\pi^4 \hbar^4}{25m^2 a^4}}$$

$$\star \underline{\langle H(1) H(2) \rangle} :$$

$$\text{Mes}(H(1) \cdot H(2)) \rightarrow \{E_1 E_1, E_1 E_2 = E_2 E_1\}$$

$$\star E_1 \cdot E_1 \rightarrow |e_{11}\rangle \rightarrow P(E_1 E_1) = |c'_{11}|^2 = \frac{1}{5}$$

$$\star E_1 E_2 = E_2 E_1 \begin{cases} |e_{12}\rangle \\ |e_{21}\rangle \end{cases} \rightarrow P(E_1 E_2 = E_2 E_1) = |c'_{12}|^2 + |c'_{21}|^2 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \langle H(1) H(2) \rangle = \frac{E_1 E_1}{5} + \frac{4E_1 E_2}{5} = \frac{\pi^4 \hbar^4}{4m^2 a^4} \left(\frac{1}{5} + \frac{16}{5} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle H(1) H(2) \rangle = \frac{17\pi^4 \hbar^4}{20m^2 a^4}} \Rightarrow \langle H(1) \rangle \langle H(2) \rangle \neq \langle H(1) H(2) \rangle$$

ceci est dû au $|\psi(0)\rangle$ qui n'est pas un produit tensoriel : c'est un mélange statistique. (20)

Exercice 3,

Un oscillateur harmonique à 1 dimension de masse m de pulsation ω , dont l'hamiltonien est :

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

à $t=0$, l'état du système : $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$

$\{|n\rangle\}$ étant la base orthonormée complète formée par les états stationnaires de H associés à l'énergie propre $E_n = \hbar \omega (n + \frac{1}{2})$ où $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow H|n\rangle = E_n|n\rangle = \hbar \omega (n + \frac{1}{2})|n\rangle$$

1) vecteur d'état à l'instant $t > 0$:

Le système étant conservatif : $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |n\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} |n\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle$$

* Probabilité pour qu'une mesure de H donne un résultat supérieur à $2\hbar\omega$:

$$\text{on a } E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} ; E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2} , E_2 = \frac{5\hbar\omega}{2}$$

$$\text{c'est } E_2 > 2\hbar\omega \Rightarrow n > 2$$

$$\text{or, la probabilité totale } P = \sum_{n \geq 0} |c_n|^2 = 1$$

$$\text{car } \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

(21)

$$\Rightarrow \mathcal{P}(E_n > 2\hbar\omega) = \mathcal{P}(E_n / n \geq 2) \\ = |c_2|^2 + |c_3|^2 + \dots = \sum_{n \geq 2} |c_n|^2$$

$$\text{Et } \mathcal{P} = \sum_{n \geq 0} |c_n|^2 = |c_0|^2 + |c_1|^2 + \sum_{n \geq 2} |c_n|^2 \\ 1 = |c_0|^2 + |c_1|^2 + \mathcal{P}(E_n > 2\hbar\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}(E_n > 2\hbar\omega) = 1 - |c_0|^2 - |c_1|^2}$$

$$* \text{ Lorsque } \mathcal{P}(E_n > 2\hbar\omega) = 0 = \sum_{n \geq 2} |c_n|^2 \Rightarrow c_2 = c_3 = \dots = 0$$

$$\text{Et } 1 - |c_0|^2 - |c_1|^2 = 0$$

$\Rightarrow$ Seuls c_0 et c_1 sont non nuls, tandis que, $c_n = 0 \quad \forall n \geq 2$. ($c_2 = c_3 = \dots = 0$).

2) On suppose que c_0 et c_1 st $\neq 0$.

$$\Rightarrow |\psi(0)\rangle = c_0 |e_0\rangle + c_1 |e_1\rangle$$

a) $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ ds $|\psi(0)\rangle$

$$\text{Or, } x = \frac{\hat{x}}{\beta} = \frac{1}{\beta\sqrt{2}} (a + a^\dagger) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger)$$

$$\text{or } \beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\text{et } p = \beta\hbar\hat{p} = \frac{\beta\hbar}{i\sqrt{2}} (a - a^\dagger) = \frac{i\beta\hbar}{\sqrt{2}} (a^\dagger - a)$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (a^\dagger - a)$$

(22)

$$* \langle x \rangle = \langle \psi(0) | x | \psi(0) \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \psi | a + a^\dagger | \psi \rangle$$

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (\langle a \rangle + \langle a^\dagger \rangle)$$

$$* \langle a \rangle = \langle \psi(0) | a | \psi(0) \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{cna: } a|\psi(0)\rangle &= a(c_0|v_0\rangle + c_1|v_1\rangle) \\ &= c_0 a|v_0\rangle + c_1 a|v_1\rangle = \sqrt{c_1}|v_0\rangle \\ &\quad \parallel_0 \qquad \qquad \qquad = c_1|v_0\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \psi(0) | a | \psi(0) \rangle = (c_0^* \langle \psi_0 | + c_1^* \langle \psi_1 |) (c_1 | \psi_0 \rangle)$$

$$\ominus \langle a \rangle = C_0^* C_1$$

* $\langle a^\dagger \rangle$: $a^\dagger |\psi(0)\rangle = c_0 a^\dagger |v_0\rangle + c_1 a^\dagger |v_1\rangle$
 $= c_0 \sqrt{1} |v_1\rangle + c_1 \sqrt{2} |v_2\rangle$
 $= c_0 |v_1\rangle + c_1 \sqrt{2} |v_2\rangle$

$$\Rightarrow \langle a^\dagger \rangle = (c_0^* \langle \psi_0 | + c_1^* \langle \psi_1 |) (c_0 | \psi_1 \rangle + c_1 | \psi_2 \rangle)$$

$$\langle a^\dagger \rangle = c_1^* c_0 \Rightarrow \langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (c_0^* c_1 + c_1^* c_0)$$

$$* \langle p \rangle = i \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\langle a^\dagger \rangle - \langle a \rangle)$$



$$\Rightarrow \langle p \rangle = i \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (c_1^* c_0 - c_0^* c_1)$$

* $\langle x^2 \rangle$:

on a.
$$X^2 = \frac{h}{2mw} (a + at)^2$$
$$= \frac{h}{2mw} (a^2 + a^2t^2 + aat + ata)$$

$$\alpha [a, a^\dagger] = 1 \Leftrightarrow a a^\dagger = a^\dagger a + 1.$$

Let on a $N = a^t a$ $\Rightarrow a a^t + a^t a = 2 a^t a + 1$
 $= 2N + 1$

$$E X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^2 + a^{\dagger 2} + 2N + 1)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (\langle a^2 \rangle + \langle a^{\dagger 2} \rangle + \langle 2N+1 \rangle)$$

* $\langle a^2 \rangle$: $a^2 |\psi(0)\rangle = c_0 \underset{||0\rangle}{a \cdot a |v_0\rangle} + c_1 a \cdot a |v_1\rangle$
 $= c_1 a |v_0\rangle = 0$

⇒ $\langle a^2 \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \star \underline{\langle a^{\dagger 2} \rangle}: \quad a^{\dagger 2} |\psi(0)\rangle &= c_0 a^{\dagger} a^{\dagger} |v_0\rangle + c_1 a^{\dagger} a^{\dagger} |v_1\rangle \\ &= c_0 \sqrt{11} a^{\dagger} |v_1\rangle + c_1 \sqrt{2} a^{\dagger} |v_2\rangle \\ &= c_0 \sqrt{2} |v_2\rangle + c_1 \sqrt{6} |v_3\rangle \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Rightarrow \langle a^2 \rangle = (c_0^* \langle \psi_0 | + c_1^* \langle \psi_1 |) (c_0 \sqrt{2} |\psi_2\rangle + c_1 \sqrt{6} |\psi_3\rangle)$$

$$= 0$$

$$\boxed{\langle a^2 \rangle = 0}$$

$$* \langle 2N+1 \rangle : (2N+1) |\psi(0)\rangle = c_0 (2N+1) |\psi_0\rangle + c_1 (2N+1) |\psi_1\rangle$$

$$\Rightarrow (2N+1) |\psi(0)\rangle = c_0 (0+1) |\psi_0\rangle + c_1 (2 \cdot 1 + 1) |\psi_1\rangle$$

$$= c_0 |\psi_0\rangle + 3c_1 |\psi_1\rangle$$

$$\Rightarrow \langle 2N+1 \rangle = (c_0^* \langle \psi_0 | + c_1^* \langle \psi_1 |) (c_0 |\psi_0\rangle + 3c_1 |\psi_1\rangle)$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle 2N+1 \rangle = |c_0|^2 + 3|c_1|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (|c_0|^2 + 3|c_1|^2)}$$

$$* \langle p^2 \rangle : \text{on } \hat{a}, \hat{p} = -\frac{m\omega\hbar}{2} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2$$

$$\hat{p} = -\frac{m\omega\hbar}{2} (\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a})$$

$$= -\frac{m\omega\hbar}{2} (\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - (2N+1))$$

$$\Rightarrow \langle p^2 \rangle = -\frac{m\omega\hbar}{2} (\underbrace{\langle \hat{a}^2 \rangle}_0 + \underbrace{\langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle}_0 - \langle 2N+1 \rangle)$$

(25)

$$\langle P^2 \rangle = \frac{\hbar m \omega}{2} \langle 2N+1 \rangle = \frac{\hbar m \omega}{2} (|c_0|^2 + 3|c_1|^2)$$

* Ecart quadratique moyens Δx et Δp

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad \text{et} \quad \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

$$\Rightarrow \Delta x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (|c_0|^2 + 3|c_1|^2) - \frac{\hbar}{2m\omega} (c_0^* c_1 + c_1^* c_0)^2$$

$$\Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega} \left[|c_0|^2 + 3|c_1|^2 - (c_0^* c_1 + c_1^* c_0)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\Delta p^2 = \frac{\hbar m \omega}{2} \left[|c_0|^2 + 3|c_1|^2 + (c_1^* c_0 - c_0^* c_1)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2} \left[|c_0|^2 + 3|c_1|^2 + (c_1^* c_0 - c_0^* c_1)^2 \right]^{1/2}}$$

$$b) \langle H \rangle = \langle \psi | H | \psi \rangle$$

$$= \sum E_n P(E_n) = E_0 |c_0|^2 + E_1 |c_1|^2$$

$$\text{or } E_0 = \frac{\hbar \omega}{2} \quad \text{et} \quad E_1 = \frac{3\hbar \omega}{2}$$

$$\Rightarrow \langle H \rangle = \frac{\hbar \omega}{2} (|c_0|^2 + 3|c_1|^2)$$

(On peut aussi trouver ce résultat en remplaçant)

$$\langle H \rangle = \frac{\langle P^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \langle x^2 \rangle$$

(26)

* on impose que $\langle H \rangle = \hbar \omega$ et que $\langle \psi(0) | \psi(0) \rangle = 1 = |c_0|^2 + |c_1|^2$.

calcul de $|c_0|$ et $|c_1|$:

$$\langle H \rangle = \hbar \omega = \frac{\hbar \omega}{2} (|c_0|^2 + 3|c_1|^2)$$

$$\Leftrightarrow |c_0|^2 + 3|c_1|^2 = 2.$$

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$$

$$\frac{2|c_1|^2 = 1}{2|c_1|^2 = 1} \Leftrightarrow |c_1|^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |c_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow |c_0|^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |c_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3/. le facteur de phase est donné de telle sorte que $c_0 \in \mathbb{R}^+$ $\Leftrightarrow c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{et } c_1 = |c_1| e^{i\theta_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta_1} \in \mathbb{C}$$

$$\text{on suppose, en plus, que } \langle x \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

* calcul de θ_1 :

$$\text{or, } \langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (c_0^* c_1 + c_1^* c_0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{i\theta_1}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-i\theta_1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (27)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{4}} \quad \text{Ainsi,}$$

$$\boxed{|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |v_0\rangle + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} |v_1\rangle}$$

$$4) |\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} |\psi(0)\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{\omega t}{2}} |v_0\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{3\omega t}{2}} |v_1\rangle \right)$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{\omega t}{2}} |v_0\rangle + e^{i\theta_1(t)} |v_1\rangle \right)$$

$$\text{on } \boxed{\theta_1(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{3\omega t}{2}}$$

$$* \langle x(t) \rangle = \langle \psi(t) | x | \psi(t) \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\langle \psi(t) | a | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | a^\dagger | \psi(t) \rangle \right)$$

$$\langle a \rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\frac{\omega t}{2}} \langle v_0 | + e^{-i\theta_1(t)} \langle v_1 | \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{\omega t}{2}} \underbrace{a | v_0 \rangle}_{\parallel_0} + e^{i\theta_1(t)} \underbrace{a | v_1 \rangle}_{\parallel_0} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle a \rangle_t = \frac{1}{2} e^{i\left(\frac{\omega t}{2} + \theta_1(t)\right)}}$$

28

$$\langle a^\dagger \rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\omega t} \langle v_0 | + e^{-i\theta_1(t)} \langle v_1 | \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega t} \underbrace{\langle a^\dagger | v_0 \rangle}_{\sqrt{1/2} \langle v_1 |} + e^{i\theta_1(t)} \underbrace{\langle a^\dagger | v_1 \rangle}_{\sqrt{1/2} \langle v_2 |} \right)$$

$$\Rightarrow \langle a^\dagger \rangle_t = \frac{1}{2} e^{-i(\frac{\omega t}{2} + \theta_1(t))}$$

$$\Rightarrow \langle x(t) \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\langle a \rangle_t + \langle a^\dagger \rangle_t \right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\frac{e^{i(\frac{\omega t}{2} + \theta_1(t))} + e^{-i(\frac{\omega t}{2} + \theta_1(t))}}{2} \right]$$

$$\langle x(t) \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos\left(\frac{\omega t}{2} + \theta_1(t)\right)$$

$$\text{et } \frac{\omega t}{2} + \theta_1(t) = \frac{\omega t}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{3\omega t}{2} = \frac{\pi}{4} - \omega t$$

$$\Rightarrow \langle x(t) \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \omega t\right)$$

à $t=0$ on a bien $\langle x \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

on retrouve, donc, le résultat à $t=0$

(29)