Exercice 1 *Calculs simple sur l'Oscillateur Harmonique*

On considère un oscillateur harmonique à une dimension défini par l'Hamiltonien:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \tag{1}$$

Les opérateurs a et $a^\dagger$ sont définis par les relations:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,\hat{p}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,\hat{p} \tag{2}$$

et les vecteurs propres de H sont notés $|\varphi_n\rangle$.

On définit la variance de l'opérateur A dans l'état $|\varphi\rangle$ par:

$$\Delta A_{|\varphi\rangle} = \sqrt{\langle\varphi|A^2|\varphi\rangle - \langle\varphi|A|\varphi\rangle^2} \tag{3}$$

1. Etablir la forme des l'opérateurs $\hat{x}^2, \hat{p}^2$ en fonction de a et $a^\dagger$. Déterminer $\Delta\hat{x}, \Delta\hat{p}$ dans un état propre du hamiltonien.
2. Etablir la forme de l'opérateurs $\hat{x}^3$. En déduire ses éléments de matrice diagonaux $\langle\varphi_n|\hat{x}^3|\varphi_n\rangle$.
3. Calculer ses éléments de matrice non diagonaux définis par: $\langle\varphi_m|\hat{x}^3|\varphi_n\rangle$.

Exercice 2 *Règles de commutations et dégénérescence*

On désigne par A_1, A_2 et H trois opérateurs hermitiques dans un espace de Hilbert. On suppose que

$$[A_1, H] = 0, \quad [A_2, H] = 0 \tag{4}$$

1. Démontrer que si $[A_1, A_2] \neq 0$, H a au moins une valeur propre dégénérée.
2. Démontrer que si $[A_1, A_2] = \alpha\,\mathbb{1}$, où α est un nombre complexe non nul et $\mathbb{1}$ est l'identité, toutes les valeurs propres sont au moins deux fois dégénérées.

Scanned by CamScanner

Exercice 1 *Calculs simple sur l'Oscillateur Harmonique*

On considère un oscillateur harmonique à une dimension défini par l'Hamiltonien :

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \tag{1}$$

Les opérateurs a et a^+ sont définis par les relations :

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,\hat{p}, \quad a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,\hat{p} \tag{2}$$

et les vecteurs propres de H sont notés $|\varphi_n\rangle$.

On définit la variance de l'opérateur A dans l'état $|\varphi\rangle$ par :

$$\Delta A_{|\varphi\rangle} = \sqrt{\langle\varphi|A^2|\varphi\rangle - \langle\varphi|A|\varphi\rangle^2} \tag{3}$$

1. Établir la forme des opérateurs $\hat{x}^2, \hat{p}^2$ en fonction de a et a^+. Déterminer $\Delta\hat{x}, \Delta\hat{p}$ dans un état propre du hamiltonien.

   En inversant l'expression de a et a^+, on obtient :

$$\hat{x} = \gamma(a^+ + a) \qquad \hat{p} = i\,\mu(a^+ - a) \tag{4}$$

   avec

$$\gamma = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \qquad \mu = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \qquad \gamma\mu = \frac{\hbar}{2}$$

   · Valeurs moyennes de $\hat{x}$ et $\hat{p}$ pour un état propre $|\varphi_n\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle\varphi_n|\hat{x}|\varphi_n\rangle &= \gamma\langle\varphi_n|a^+ + a|\varphi_n\rangle \\ &= \gamma\left(\sqrt{n+1}\langle\varphi_n|\varphi_{n+1}\rangle + \sqrt{n}\langle\varphi_n|\varphi_{n-1}\rangle\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

   puisque les vecteurs propres de H sont orthogonaux.

Ce genre de résultat est évident si l'on considère le raisonnement suivant. Soit un opérateur $\hat{A}$ correspondant au produit de p opérateurs a et q opérateurs a^+ (dans un ordre quelconque). Lorsque a (resp. a^+) agit sur un vecteur $|\varphi_n\rangle$, il fait varier la valeur n de -1 (resp. $+1$), on obtient à un facteur près $|\varphi_{n-1}\rangle$ (resp. $|\varphi_{n+1}\rangle$). Ainsi si l'on fait agir $\hat{A}$ sur un vecteur propre, on obtient :

$$\hat{A}|\varphi_n\rangle = \lambda|\varphi_{n-p+q}\rangle$$

(λ est un scalaire qui dépend de l'expression de $\hat{A}$). D'après les valeusr de p et q, on peut donc savoir tout de suite quels éléments de matrice de $\hat{A}$ sont non nuls. En

Scanned by CamScanner

particulier pour que les valeurs moyennes sur les états propres soient non nul (les éléments $\langle\varphi_n|\hat{A}|\varphi_n\rangle$), il faut que $p = q$.

Comme $\hat{x}$ et $\hat{p}$ ne contiennent que des termes a et a^+, on voit tout de suite que les valeurs moyennes de ces opérateurs pour les états propres $|\varphi_n\rangle$ seront nulles.

Ce n'est pas le cas des opérateurs $\hat{x}^2$ et $\hat{p}^2$ qui contiennent des termes aa^+ et a^+a (pour lesquels $p = q = 1$) :

$$\begin{aligned}\langle\varphi_n|\hat{x}^2|\varphi_n\rangle &= \gamma^2\langle\varphi_n|(a^+ + a)^2|\varphi_n\rangle \\ &= \gamma^2\langle\varphi_n|(a^+)^2 + a^+a + a^+a + a^2|\varphi_n\rangle\end{aligned}$$

Les termes $(a^+)^2$ et a^2 donnent 0 puisque $p \neq q$. En utilisant la relation de commutation $[a, a^+] = 1$:

$$\begin{aligned}\langle\varphi_n|\hat{x}^2|\varphi_n\rangle &= \gamma^2\langle\varphi_n|2a^+a + 1|\varphi_n\rangle \\ &= \gamma^2\langle\varphi_n|2\hat{n} + 1|\varphi_n\rangle \\ &= \gamma^2(2n+1)\end{aligned}$$

de la même manière :

$$\begin{aligned}\langle\varphi_n|\hat{p}^2|\varphi_n\rangle &= -\mu^2\langle\varphi_n|(a^+ - a)^2|\varphi_n\rangle \\ &= -\mu^2\langle\varphi_n|(a^+)^2 - a^+a - a^+a + a^2|\varphi_n\rangle \\ &= \mu^2\langle\varphi_n|2a^+a + 1|\varphi_n\rangle \\ &= \mu^2(2n+1)\end{aligned}$$

Les valeurs de $\Delta\hat{x}$ et $\Delta\hat{p}$ valent pour les états propres :

$$\Delta\hat{x} = \sqrt{\langle\varphi_n|\hat{x}^2|\varphi_n\rangle - \langle\varphi_n|\hat{x}|\varphi_n\rangle^2} = \gamma\sqrt{2n+1}$$

$$\Delta\hat{p} = \sqrt{\langle\varphi_n|\hat{p}^2|\varphi_n\rangle - \langle\varphi_n|\hat{p}|\varphi_n\rangle^2} = \mu\sqrt{2n+1}$$

$\Delta\hat{x}$ est la taille caractéristique de la zone où la particule est située. Pour le fondamental, $\Delta\hat{x}$ est minimal, la particule est concentrée au fond du puits de potentiel, plus n augmente plus $\Delta\hat{x}$ augmente, plus la particule se délocalise dans des régions où le potentiel augmente (ce qui correspond bien à l'intuition physique des états excités pour un puits de potentiel).

On peut remarquer que :

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}(2n+1)$$

Il est possible de montrer qu'en mécanique quantique cette grandeur est toujours supérieure à $\hbar/2$. Elle est donc minimisée pour $n = 0$ (ce point sera abordé dans la suite du cours).

2. Établir la forme de l'opérateur $\hat{x}^3$, En déduire ses éléments de matrice diagonaux $\langle\varphi_n|\hat{x}^3|\varphi_n\rangle$.

$$\hat{x}^3 = \gamma^3(a^+ + a^3)^3 = \gamma^3((a^+)^3 + (a^+)^2a + a^+aa^+ + a(a^+)^2 + a^+a^2 + aa^+a + a^2a^+ + a^3)$$

Scanned by CamScanner

On voit tout de suite qu'aucun de ces termes ne contribuent à la valeur moyenne ($p \neq q$). D'une manière plus générales, pour les états propres, les valeurs moyenne des puissances impaires de $\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont nulles. Ceci vient du fait que le problème est symétrique par rapport à $x = 0$.

3. Calculer ses éléments de matrice non diagonaux .
   Il est généralement plus simple de regrouper les termes en faisant passer les opérateurs a^+ vers la gauche, on fait ainsi apparaître des termes contenant $\hat{n} = a^+a$.

$$
\begin{aligned}
\langle\varphi_m|\hat{x}^3|\varphi_n\rangle &= \langle\varphi_m|(a^+)^3 + (a^+)^2a + a^+aa^+ + a(a^+)^2 + a^+a^2 + aa^+a + a^2a^+ + a^3)|\varphi_n\rangle \\
&= \langle\varphi_m|(a^+)^3 + 2(a^+)^2a + a^+a^+aa^+a^+ + 2a^+a^2 + a + aa^+a + a + a^3)|\varphi_n\rangle \\
&= \langle\varphi_m|(a^+)^3 + 3(a^+)^2a + 3a^+ + 3a^+a^2 + 3a + a^3)|\varphi_n\rangle \\
&= \langle\varphi_m|(a^+)^3 + 3a^+(\hat{n}+1) + 3(\hat{n}+1)a + a^3|\varphi_n\rangle \\
&= \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\langle\varphi_m|\varphi_{n+3}\rangle \\
&\quad +3(n+1)^{3/2}\langle\varphi_m|\varphi_{n+1}\rangle + 3n^{3/2}\langle\varphi_m|\varphi_{n-1}\rangle \\
&\quad +\sqrt{n(n-1)(n-2)}\langle\varphi_m|\varphi_{n-3}\rangle \\
&= \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\,\delta_{m,n+3} \\
&\quad +3(n+1)^{3/2}\,\delta_{m,n+1} + 3n^{3/2}\,\delta_{m,n-1} \\
&\quad +\sqrt{n(n-1)(n-2)}\,\delta_{m,n-3}
\end{aligned}
$$

Exercice 2 *Règles de commutations et dégénérescence*

On désigne par A_1, A_2 et H trois opérateurs hermitiques dans un espace de Hilbert. On suppose que

$$[A_1, H] = 0, \qquad [A_2, H] = 0 \tag{5}$$

1. Démontrer que si $[A_1, A_2] \neq 0$, H a au moins une valeur propre dégénérée.

   Il est plus simple de procéder par l'absurde. On suppose donc que toutes les valeurs propres de H sont non dégénérées. Il n'existe donc qu'une seule base de vecteurs propres de H (pour laquelle les vecteurs sont définis à un facteur scalaire près).

   Comme A_1 et A_2 commutent avec H, ils possèdent une base de vecteurs propres commune avec H. Comme H n'en possède qu'une, c'est donc la même pour A_1 et A_2. On arrive donc à la conclusion que A_1 et A_2 sont diagonaux dans la même base. Ceci implique que ces opérateurs commutent, ce qui contredit l'hypothèse. Il n'est donc pas possible que toutes les valeurs de H soient non dégénérées.

   (Si H possède au contraire une valeur propre dégénérée, associée à au moins deux vecteurs propres $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$. Toutes les combinaison linéaires de ces deux vecteurs sont toujours des vecteurs propres de H. Il est donc possible que A_1 et A_2 aient chacun une base commune de vecteurs propres avec H, mais que ces deux bases soient différentes. Elles peuvent en effet contenir des combinaisons linéaires différentes de $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$. Il est alors possible que A_1 et A_2 ne commutent pas.)

Scanned by CamScanner

2. *Démontrer que si $[A_1, A_2] = \alpha I$, où α est un nombre complexe non nul et I est l'identité, toutes les valeurs propres sont au moins deux fois dégénérées.*

Cet exercice est très similaire au précédent. On a toujours $[A_1, A_2] \neq 0$, ce qui implique qu'il existe au moins une valeur propre de H dégénérée. La condition est cependant plus forte, puisque $[A_1, A_2] = \alpha I$.

Raisonnons de nouveau par l'absurde. On suppose que H possède une valeur propre non dégénérée ε_i associé à un vecteur propre $|\psi_i\rangle$. Comme $HA_1 = A_1H$, on a :

$$\begin{aligned} HA_1|\psi_i\rangle &= A_1H|\psi_i\rangle \\ H(A_1|\psi_i\rangle) &= \varepsilon_i(A_1|\psi_i\rangle) \end{aligned}$$

$A_1|\psi_i\rangle$ est donc un vecteur propre de H associée à la valeur propre ε_i. Comme cette valeur propre est non dégénérée, ce vecteur est donc égal à $|\psi_i\rangle$ (à un facteur scalaire près). Ainsi :

$$A_1|\psi_i\rangle = \lambda_1|\psi_i\rangle$$

$|\psi_i\rangle$ est vecteur propre de A_1. On peut appliquer le même raisonnement à A_2, on obtient alors :

$$A_2|\psi_1\rangle = \lambda_2|\psi_1\rangle$$

Le fait que le vecteur propre (associé à la valeur propre non dégénérée de H), soit à la fois vecteur propre de A_1 et A_2 contredit l'hypothèse de départ :

$$\begin{aligned} [A_1, A_2]|\psi_i\rangle &= \alpha I|\psi_i\rangle \\ (A_1A_2 - A_2A_1)|\psi_i\rangle &= \alpha|\psi_i\rangle \\ (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_1)|\psi_i\rangle &= \alpha|\psi_i\rangle \\ 0 &= \alpha|\psi_i\rangle \end{aligned}$$

(le terme de gauche donne bien 0, puisque les λ_i sont des scalaires, donc $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_2\lambda_1$).

Ainsi, il n'est pas possible que H possède une valeur propre non dégénérée.

Scanned by CamScanner

Exercice 1 *États cohérents :*

Préambule :
Rappeler l'expression du Hamiltonien quantique de l'oscillateur harmonique en fonction des opérateurs a et $a^\dagger$. Calculer $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$ dans un état propre $|\varphi_n\rangle$ de $\hat{H}$. Comparer avec la valeur minimale donnée par la relation d'incertitude de Heisenberg.

Rappel : L'écart type d'un opérateur dans un état ϕ est définie comme

$$\Delta A = \sqrt{<\phi|A^2|\phi> - <\phi|A|\phi>^2}$$

Nous allons chercher les états qui vont minimiser le produit $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$.

1. Nous cherchons les états propres, de valeurs propres z (z complexe) de l'opérateur annihilation a sous la forme :

$$|z\rangle = \sum_n c_n|\varphi_n\rangle, \text{avec } a|z\rangle = z|z\rangle$$

où les états $|\varphi_n\rangle$ sont les états propres de l'oscillateur harmonique. Les états $|z\rangle$ sont appelés *états cohérents*.
Établir l'équation de récurrence vérifiée par les coefficients c_n.

2. Déterminer les coefficients c_n en fonction de c_0 et de z, et calculer $\langle z|z'\rangle$. Déterminer c_0 pour que $|z\rangle$ soit normé. Cette famille d'états est-elle orthonormée ?
Quel état retrouve-t-on pour $z = 0$?
3. Calculer les valeurs moyennes des opérateurs $\hat{x}$, $\hat{p}$ et $\hat{H}$ dans un état cohérent.
4. Calculer les valeurs moyennes des opérateurs $\hat{x}^2$, $\hat{p}^2$ dans un état cohérent.
5. Calculer $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$, comparer avec la relation d'incertitude de Heisenberg.

Scanned by CamScanner

Exercice 1 *États cohérents :*

Préambule :

Rappeler l'expression du Hamiltonien quantique de l'oscillateur harmonique en fonction des opérateurs a et $a^\dagger$. Calculer $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$ dans un état propre $|\varphi_n\rangle$ de $\hat{H}$. Comparer avec la valeur minimale donnée par la relation d'incertitude de Heisenberg.

Rappel : L'écart type d'un opérateur dans un état ϕ est définie comme

$$\Delta A = \sqrt{<\phi|A^2|\phi> - <\phi|A|\phi>^2}$$

Nous allons chercher les états qui vont minimiser le produit $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$.

1. Nous cherchons les états propres, de valeurs propres z (z complexe) de l'opérateur annihilation a sous la forme :

$$|z\rangle = \sum_n c_n|\varphi_n\rangle, \text{avec } a|z\rangle = z|z\rangle$$

où les états $|\varphi_n\rangle$ sont les états propres de l'oscillateur harmonique. Les états $|z\rangle$ sont appelés *états cohérents*.
Établir l'équation de récurrence vérifiée par les coefficients

On cherche $|z\rangle$ comme une fonction propre de l'opérateur annihilation a :

$$\begin{aligned} a|z\rangle &= z|z\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z c_n |n\rangle \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} a|z\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n a|n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n}|n-1\rangle \end{aligned}$$

On change l'indice de la somme tel que $n' = n - 1$:

$$a|z\rangle = \sum_{n'=0}^{\infty} c_{n'+1}\sqrt{n'+1}|n'\rangle$$

Comme les vecteurs $|n\rangle$ sont linéairement indépendants, les deux expressions doivent être identiques, ce qui impose :

$$c_{n+1} = \frac{z}{\sqrt{n+1}} c_n$$

Scanned by CamScanner

2. Déterminer les coefficients c_n en fonction de c_0 et de z, et calculer $\langle z|z'\rangle$. Déterminer c_0 pour que $|z\rangle$ soit normé. Cette famille d'états est-elle orthonormée ?

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{z}{\sqrt{n+1}}c_n \\ &= \frac{z}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}c_{n-1}\right) \\ &= \cdots \\ c_{n+1} &= \frac{z^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}c_0 \end{aligned}$$

Calculons $\langle z|z'\rangle$. Ces deux états peuvent être exprimés dans la base orthonormée $|\varphi_n\rangle$. On note c'_n leurs coefficients dans cette base.

$$\begin{aligned} \langle z|z'\rangle &= \left(\sum_m c_m^*\langle\varphi_m|\right)\left(\sum_n c'_n|\varphi_n\rangle\right) \\ &= \sum_{n,m} c_m^* c'_n\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle = \sum_{n,m} c_m^* c'_n\delta_{n,m} = \sum_n c_n^* c'_n \\ &= \sum_n c_0^* c'_0\frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}}\frac{(z')^n}{\sqrt{n!}} = c_0^* c'_0\sum_n\frac{(z^*z')^n}{n!} \\ &= c_0^* c'_0 e^{z^*z'} \end{aligned}$$

En particulier, pour $z = z'$:

$$\langle z|z\rangle = |c_0|^2 e^{|z|^2}$$

Pour que $|z\rangle$ soit normée il faut que :

$$\begin{aligned} |c_0|^2 e^{|z|^2} &= 1 \\ |c_0|^2 &= e^{-|z|^2} \\ c_0 &= e^{-|z|^2/2}e^{i\theta} \end{aligned}$$

Les fonctions d'onde sont toujours définies à un coefficient $e^{i\theta}$, qui ne change rien à la physique du problème. On choisit donc $e^{i\theta} = 1$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} c_n &= e^{-|z|^2/2}\frac{z^n}{\sqrt{n!}} \\ \langle z|z'\rangle &= e^{-|z|^2/2-|z'|^2/2}e^{z^*z'} \end{aligned}$$

Les fonctions d'onde $|z\rangle$ ne sont pas orthogonales.

Si $z = 0$, alors $c_n = 0^n = \delta_{n,0}$. L'état $|z = 0\rangle$ correspond donc à l'état fondamental du système.

3. Calculer les valeurs moyennes des opérateurs $\hat{x}$, $\hat{p}$ et $\hat{H}$ dans un état cohérent.

$$\begin{cases} \hat{x} &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\frac{(a^\dagger+a)}{2} \\ \hat{p} &= i\sqrt{2m\hbar\omega}\frac{(a^\dagger-a)}{2} \\ H &= \hbar\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2}) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Il faut donc, dans un premier temps, évaluer : $\langle a \rangle$, $\langle a^\dagger \rangle$, et $\langle a^\dagger a \rangle$.
Nous avons vu que $a|z\rangle = z|z\rangle$, donc $\langle z|a^\dagger = \langle z|z^*$. Ainsi :

$$\begin{cases} \langle a \rangle &= \langle z|a|z\rangle = \langle z|z|z\rangle = z\langle z|z\rangle = z \\ \langle a^\dagger \rangle &= \langle z|a^\dagger|z\rangle = \langle z|z^*|z\rangle = z^*\langle z|z\rangle = z^* \\ \langle a^\dagger a \rangle &= \langle z|a^\dagger a|z\rangle = zz^*\langle z|z\rangle = |z|^2 \end{cases}$$

En utilisant les définitions des opérateurs $\hat{x}$, $\hat{p}$, on obtient :

$$\begin{cases} \langle \hat{x} \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(z^* + z) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\Re e(z) \\ \langle \hat{p} \rangle &= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(z^* - z) = \sqrt{2m\hbar\omega}\,\Im m(z) \\ \langle H \rangle &= \hbar\omega\left(|z|^2 + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

4. Calculer les valeurs moyennes des opérateurs $\hat{x}^2$, $\hat{p}^2$ dans un état cohérent.
Nous utilisons ici le fait que $[a, a^\dagger] = 1 \Rightarrow aa^\dagger = 1 + a^\dagger a$. Ainsi :

$$\langle (a^\dagger \pm a)^2 \rangle = \langle a^{\dagger 2} \rangle + \langle a^2 \rangle \pm 2\langle a^\dagger a \rangle \pm 1$$

Or : $\langle a^{\dagger 2} \rangle = z^{*2}$ et $\langle a^2 \rangle = z^2$. Pour calculer $\langle a^\dagger a \rangle$ on fait agir a à droite et $a^\dagger$ à gauche :

$$\langle a^\dagger a \rangle = \langle z|a^\dagger a|z\rangle = z\langle z|a^\dagger|z\rangle = zz^*\langle z|z\rangle = |z|^2$$

En utilisant la relation de commutation $aa^\dagger - a^\dagger a = 1$ on obtient :

$$\langle aa^\dagger \rangle = \langle a^\dagger a \rangle + 1 = |z|^2 + 1$$

finalement :

$$\begin{cases} \langle (a^\dagger + a)^2 \rangle &= z^2 + z^{*2} + 2zz^* + 1 = (z + z^*)^2 + 1 = \Re e(z)^2 + 1 \\ \langle (a^\dagger - a)^2 \rangle &= z^2 + z^{*2} - 2zz^* - 1 = (z - z^*)^2 - 1 = -\Im m(z)^2 - 1 \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \langle \hat{x}^2 \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle (a + a^\dagger)^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(\Re e^2(z) + 1) \\ \langle \hat{p}^2 \rangle &= \frac{-m\omega\hbar}{2}\langle (a - a^\dagger)^2 \rangle) = \frac{m\omega\hbar}{2}(\Im m^2(z) + 1) \end{cases}$$

5. Calculer $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$, comparer avec la relation d'incertitude de Heisenberg.

$$\begin{cases} \Delta\hat{x} &= \sqrt{\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{(z + z^*)^2 + 1 - (z + z^*)^2)} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \\ \Delta\hat{p} &= \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\sqrt{|z - z^*|^2 + 1 - |z - z^*|^2)} = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \end{cases}$$

donc

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}\frac{m\omega\hbar}{2}} = \frac{\hbar}{2}$$

D'après la relation d'incertitude de Heisenberg : $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \hbar/2$. La valeur obtenue pour un état cohérent est donc la plus petite possible.
Nous avons vu dans la série précédente que pour l'état fondamental $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} = \hbar/2$, nous retrouvons ici ce résultat puisque l'état fondamental correspond à l'état cohérent $z = 0$.

Scanned by CamScanner

Exercice 1 *Fonctions d'onde excitées de l'oscillateur harmonique :*

Nous considérons un oscillateur harmonique isotrope à une dimension.

Nous nous proposons de faire le lien entre les deux méthodes de résolutions vues en cours pour l'oscillateur harmonique.

Nous avons vu en cours que la fonction d'onde non dégénérée du fondamental s'écrit :

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

1. Appliquer le Hamiltonien sur cet état et vérifier que $\varphi_0(x)$ en est bien état propre de valeur propre $\frac{\hbar\omega}{2}$.
2. En appliquant l'opérateur création $a^\dagger$ sur $\varphi_0(x)$, calculer les fonctions d'onde des 2 premiers états excités. Que reconnaît-on ?
3. Nous voulons à présent tracer l'allure de ces fonctions d'onde.
   Calculer les $\varphi_i(x=0)$, ainsi que les points où s'annulent ces fonctions. Tracer l'allure approximative de ces fonctions.
4. A quoi correspondent les intégrales suivantes ? en déduire leur valeur (il n'y a pas de calcul à faire).

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m\omega}{\pi\hbar} \sqrt{2} x e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} ; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} 2x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

Exercice 2 *Vecteurs propres de l'opérateur position et états propres de l'oscillateur harmonique :*

Nous nous proposons dans cette série de retrouver les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique en utilisant les propriétés des vecteurs propres de l'opérateur position définis comme :

$$\hat{x}|x> = x|x> .$$

1. En utilisant la définition de l'opérateur position pour le cas de l'oscillateur harmonique, calculer son action sur un état propre $|\varphi_n>$ de $\hat{H}$.
2. En déduire le produit scalaire avec $<x|\hat{x}|\varphi_n>$.
3. Sachant que $|x>$ sont les vecteurs propres de $\hat{x}$, déduire une relation de récurrence sur les coefficients $\langle x|\varphi_n\rangle$ (on posera $n+1=m$).
4. En faisant le changement de variables $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ ainsi que le changement de fonction $f_n(y) = \sqrt{2^n n!}\frac{<x|\varphi_n>}{<x|\varphi_0>}$, ré-exprimer la relation de récurrence. Conclure sur la nature des fonctions propres de l'oscillateur harmonique, en comparant aux notes de cours.

Scanned by CamScanner

Exercice 1 *Fonctions d'onde excitées de l'oscillateur harmonique :*

Nous considérons un oscillateur harmonique isotrope à une dimension.

Nous nous proposons de faire le lien entre les deux méthodes de résolutions vues en cours pour l'oscillateur harmonique.

Nous avons vu en cours que la fonction d'onde non dégénérée du fondamental s'écrit :

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Pour cet exercice, il est plus commode d'utiliser la variable sans dimension q :

$$q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

$$\frac{\partial}{\partial q} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{\partial}{\partial x}$$

La fonction d'onde de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique s'écrit :

$$\varphi_0(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{q^2}{2}} = \chi e^{-\frac{q^2}{2}}$$

1. Appliquez le Hamiltonien sur cet état et vérifiez que $\varphi_0(x)$ en est bien état propre de valeur propre $\frac{\hbar\omega}{2}$.

Le Hamiltonien dans le formalisme de Schrödinger, est donné par :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

On le réécrit en fonction de la variable sans dimension q :

$$H = -\frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q}\right)^2 + \frac{\hbar\omega}{2}q^2$$

En l'appliquant à $\varphi_0(q)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
H\varphi_0(q) &= \left(-\frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q}\right)^2 + \frac{\hbar\omega}{2}q^2\right)\chi e^{-\frac{q^2}{2}} \\
&= \chi\left(-\frac{\hbar\omega}{2}\frac{\partial}{\partial q}\left(-q\,e^{-\frac{q^2}{2}}\right) + \frac{\hbar\omega}{2}q^2\,e^{-\frac{q^2}{2}}\right) \\
&= \chi\left(-\frac{\hbar\omega}{2}q^2\,e^{-\frac{q^2}{2}} + \frac{\hbar\omega}{2}e^{-\frac{q^2}{2}} + \frac{\hbar\omega}{2}q^2\,e^{-\frac{q^2}{2}}\right) \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}\chi e^{-\frac{q^2}{2}} \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}\varphi_0(q)
\end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

2. En appliquant l'opérateur création $a^\dagger$ sur $\varphi_0(x)$, calculer les fonctions d'onde des 2 premiers états excités. Que reconnaît-on ?
On exprime l'opérateur de création en fonction de la variable x, puis de q.

$$\begin{aligned} a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}p \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q - \frac{\partial}{\partial q}\right) \end{aligned}$$

Les différents états excités de l'oscillateur harmonique sont reliés par la relation :

$$a^\dagger\varphi_n(q) = \sqrt{n+1}\varphi_{n+1}(q)$$

Le premier état excité est donné par :

$$\begin{aligned} \varphi_1(q) &= a^\dagger\varphi_0(q) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q - \frac{\partial}{\partial q}\right)\chi e^{-\frac{q^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q+q)\chi e^{-\frac{q^2}{2}} \\ &= \sqrt{2}q\,\varphi_0(q) \end{aligned}$$

Le second état excité est donné par :

$$\begin{aligned} \varphi_2(q) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(q) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q - \frac{\partial}{\partial q}\right)\sqrt{2}q\chi e^{-\frac{q^2}{2}} \\ &= \chi\left(q^2 e^{-\frac{q^2}{2}} - 1\,e^{-\frac{q^2}{2}} + q^2 e^{-\frac{q^2}{2}}\right) \\ &= (2q^2 - 1)\varphi_0(q) \end{aligned}$$

Les polynômes en q obtenus correspondent, à un facteur près, aux polynômes de Hermite :

$$\begin{aligned} H_0(z) &= 1 \\ H_1(z) &= 2z \\ H_2(z) &= 4z^2 - 2 \end{aligned}$$

Le facteur proviens d'une légère différence entre nos équations et la définition des polynômes de Hermite :

$$H_n(z) = e^{\frac{z^2}{2}}\left(z - \frac{d}{dz}\right)e^{-\frac{z^2}{2}}$$

On peut retrouver ce facteur en considérant la relation qui permet d'obtenir les états

Scanned by CamScanner

$|\varphi_n\rangle$ en fonction de $|\varphi_0\rangle$:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(q) &= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\varphi_0(q) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(q-\frac{\partial}{\partial q})\right)^n \varphi_0(q) \\
&= \frac{\chi}{\sqrt{2^n\, n!}}\left(q-\frac{\partial}{\partial q}\right)^n e^{-\frac{q^2}{2}} \\
&= \frac{\chi}{\sqrt{2^n\, n!}}e^{-\frac{q^2}{2}}e^{\frac{q^2}{2}}\left(q-\frac{\partial}{\partial q}\right)^n e^{-\frac{q^2}{2}} \\
&= \frac{\chi}{\sqrt{2^n\, n!}}e^{-\frac{q^2}{2}}H_n(q) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}}H_n(q)\varphi_0(q)
\end{aligned}$$

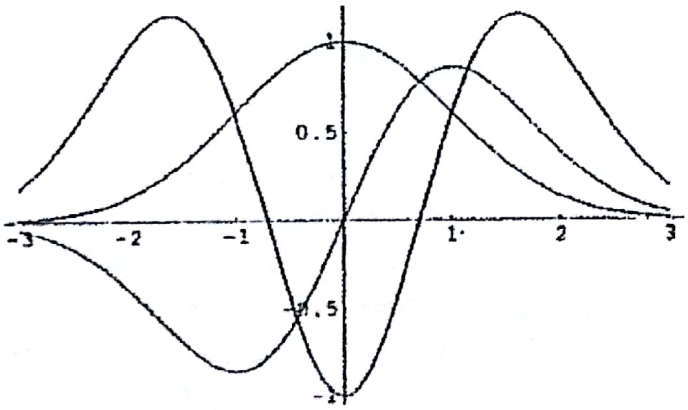
3. Nous voulons à présent tracer l'allure de ces fonctions d'onde.
   Calculez les $\varphi_i(x=0)$, ainsi que les points où s'annulent ce fonctions. Tracer l'allure approximative de ces fonctions.

$$\begin{aligned}
\varphi_0(q=0) &= \chi \\
\varphi_1(q=0) &= 0 \\
\varphi_2(q=0) &= -\chi
\end{aligned}$$

De plus, ces fonctions s'annulent aux points suivants :

$$\begin{aligned}
\varphi_0(q) &\longrightarrow \text{à l'infini} \\
\varphi_1(q) &\longrightarrow q=0 \\
\varphi_2(q) &\longrightarrow q=\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Les courbes ont donc les allures suivantes : où pour simplifier nous avons posé $\gamma = 1$.



φ_0 est la courbe qui ne présente pas de noeud, φ_1 1 noeud et φ_2 2 noeuds.

4. A quoi correspondent les intégrales suivantes ? en déduire leur valeur (il n'y a pas de calcul à faire).

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{m\omega}{\pi\hbar}\sqrt{2}xe^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} 2x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

Scanned by CamScanner

Cette question ne nécessite pas de calculs. Il suffit de constater que les intégrales suivantes correspondent aux produits scalaires suivants :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m\omega}{\pi\hbar} \sqrt{2} x e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} = \langle \varphi_0 | \varphi_1 \rangle = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} 2x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} = \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle = 1$$

Le résultat est donc très simple, car nous savons que les états propres de l'oscillateur harmonique sont orthonormés.

A noter que pour faire le produit scalaire, nous utilisons la relation de fermeture

$$\int dx |x\rangle\langle x| = \hat{1}$$

que nous introduisons dans le "sandwich" $\langle \varphi_n | \varphi_p \rangle$.

Exercice 2 *Vecteurs propres de l'opérateur position et états propres de l'oscillateur harmonique :*

Nous nous proposons dans cette série de retrouver les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique en utilisant les propriétés des vecteurs propres de l'opérateur position définis comme :

$$\hat{x}|x> = x|x> .$$

1. En utilisant la définition de l'opérateur position pour le cas de l'oscillateur harmonique, calculer son action sur un état propre $|\varphi_n>$ de $\hat{H}$.

$$\begin{aligned} \hat{x}|\varphi_n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m^*\omega}}(a + a^\dagger|\varphi_n\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m^*\omega}}(\sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle + \sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle) \end{aligned}$$

2. En déduire le produit scalaire avec $<x|\hat{x}|\varphi_n>$.

$$\begin{aligned} \langle\varphi_n|\hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m^*\omega}}(\langle\varphi_{n-1}|\sqrt{n} + \langle\varphi_{n+1}|\sqrt{n+1}) \\ \langle\varphi_n|\hat{x}|x\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m^*\omega}}(\sqrt{n}\langle\varphi_{n-1}|x\rangle + \sqrt{n+1}\langle\varphi_{n+1}|x\rangle) \end{aligned}$$

3. Sachant que $|x>$ sont les vecteurs propres de $\hat{x}$, déduire une relation de récurrence sur les coefficients $\langle x|\varphi_n\rangle$ (on posera $n+1 = m$).

Comme $|x\rangle$ est vecteur propre de $\hat{x}$:

$$\begin{aligned} (\hat{x}|x\rangle)^\dagger &= (x|x\rangle)^\dagger \\ (|x\rangle)^\dagger\hat{x}^\dagger &= (|x\rangle)^\dagger x^\dagger \\ \langle x|\hat{x} &= \langle x|x \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

car $\hat{x}$ est hermitique et x réel, ainsi

$$\langle x | \hat{x} | n \rangle = x \langle x | n \rangle$$

donc :

$$x \langle \varphi_n | x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{n} \langle \varphi_{n-1} | x \rangle + \sqrt{n+1} \langle \varphi_{n+1} | x \rangle \right)$$

En posant $m = n + 1$ ($m \geq 1$), on réécrit l'équation sous la forme :

$$\sqrt{m} \langle x | \varphi_m \rangle = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x \langle x | \varphi_{m-1} \rangle - \sqrt{m-1} \langle x | \varphi_{m-2} \rangle$$

4. En faisant le changement de variables $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ ainsi que le changement de fonction $f_n(y) = \sqrt{2^n n!} \frac{<x|\varphi_n>}{<x|\varphi_0>}$, ré-exprimer la relation de récurrence. Conclure sur la nature des fonctions propres de l'oscillateur harmonique, en comparant aux notes de cours.

Les 3 termes de la relation précédente deviennent :

$$\sqrt{m} \langle x | \varphi_m \rangle = \sqrt{\frac{m}{2^m m!}} \langle x | \varphi_0 \rangle f_m(y)$$

$$\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x \langle x | \varphi_{m-1} \rangle = \sqrt{\frac{2}{2^{m-1}(m-1)!}} y \langle x | \varphi_0 \rangle f_{m-1}(y)$$

$$\sqrt{m-1} \langle x | \varphi_{m-2} \rangle = \sqrt{\frac{m-1}{2^{m-2}(m-2)!}} \langle x | \varphi_0 \rangle f_{m-2}(y)$$

En simplifiant par :

$$\frac{\langle x | \varphi_0 \rangle}{\sqrt{2^m (m-1)!}}$$

on obtient finalement :

$$f_m(y) = 2y f_{m-1}(y) - 2(m-1) f_{m-2}(y)$$

Cette relation de récurrence est celle vérifiée par les polynômes de Hermite.

On obtient donc que les coefficients $\langle x | \varphi_n \rangle$ sont de la forme :

$$\langle x | \varphi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(y) \langle x | \varphi_0 \rangle \qquad \left(y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)$$

On retrouve bien le résultat obtenu à partir de l'équation de Schrödinger (puisque $\langle x | \varphi \rangle$ correspond à la fonction d'onde).

En particulier on retrouve l'expression obtenue dans le premier exercice - question 2 (puisque $y = q$).

Scanned by CamScanner

Oscillateur harmonique à 2D :

On considère un oscillateur harmonique isotrope à deux dimensions.

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{r}^2$$

1. On introduit les opérateurs créations et anihilations

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}_x\right)\\
a_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{y} + i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}_y\right)\\
a_x^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}_x\right)\\
a_y^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{y} - i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}_y\right)
\end{aligned}$$

   Calculer les commutateurs $[a_x, a_x^\dagger]$, $[a_y, a_y^\dagger]$. Vérifier que $[a_x, a_y] = [a_x^\dagger, a_y^\dagger] = 0$.

2. Exprimer le Hamiltonien en fonction de $(a_x^\dagger, a_x)$ et $(a_y^\dagger, a_y)$.

3. En utilisant les résultats obtenus en cours pour l'oscillateur harmonique à une dimension, en déduire les trois premiers états d'énergies de ce système et leur dégénérescence : écrire les kets propres associés à ces valeurs propres en utilisant les nombres quantiques n_x et n_y.

4. On introduit l'opérateur moment cinétique, et plus particulièrement sa composante sur l'axe z : $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$.
   Ecrire $\hat{L}_z$ en fonction de $(a_x^\dagger, a_x)$ et $(a_y^\dagger, a_y)$.

5. Montrer que $\hat{L}_z$ commute avec H.

6. On introduit les opérateurs

$$\begin{cases} a_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y) \\ a_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y) \end{cases}$$

   Donner les expressions de $a_d^\dagger$ et $a_g^\dagger$, et vérifier que les relations de commutations ont la même forme que pour les opérateurs création et annihilation usuels.

7. On pose $\hat{N}_d = a_d^\dagger a_d$ et $\hat{N}_g = a_g^\dagger a_g$.
   Récrire le Hamiltonien et le moment cinétique $\hat{L}$ en fonction de $\hat{N}_d$, $\hat{N}_g$.

8. En déduire les valeurs propres du Hamiltonien et de $\hat{L}$, puis classer les 3 premiers états en fonction des nombres quantiques $n = n_d + n_g$ et $m = n_d - n_g$. Quelle-est la signification de n_d et n_g ?

Scanned by CamScanner

Oscillateur harmonique à 2D :

On considère un oscillateur harmonique isotrope à deux dimensions.

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{r}^2$$

1.

$$\begin{aligned}
[a_x, a_x^\dagger] &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}_x, \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}_x\right] \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\underbrace{[\hat{x}, \hat{x}]}_{0} + \frac{-i^2}{2m\omega\hbar}\underbrace{[\hat{p}_x, \hat{p}_x]}_{0} - \frac{i}{2\hbar}\underbrace{[\hat{x}, \hat{p}_x]}_{i\hbar} + \frac{i}{2\hbar}\underbrace{[\hat{p}_x, \hat{x}]}_{-i\hbar} \\
&= \frac{i}{2\hbar}(-i\hbar - i\hbar) = +1
\end{aligned}$$

le calcul est le même pour $[a_y, a_y^\dagger]$.

Nous avons pour $[a_x, a_y]$:

$$\begin{aligned}
[a_x, a_y] &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}_x, \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{y} + i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}_y\right] \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\underbrace{[\hat{x}, \hat{y}]}_{0} + \frac{i^2}{2m\omega\hbar}\underbrace{[\hat{p}_x, \hat{p}_y]}_{0} + \frac{i}{2\hbar}\underbrace{[\hat{x}, \hat{p}_y]}_{0} + \frac{i}{2\hbar}\underbrace{[\hat{p}_x, \hat{y}]}_{0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

On voit aisément que de la même façon $[a_x^\dagger, a_y^\dagger] = [a_x^\dagger, a_y] = [a_x, a_y^\dagger] = 0$.

2. en décomposant $\hat{\mathbf{r}}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2$ et $\hat{\mathbf{p}}^2 = \hat{p}_x{}^2 + \hat{p}_y{}^2$ il vient :

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(a_x a_x^\dagger + a_x^\dagger a_x + a_y a_y^\dagger + a_y^\dagger a_y) = \hbar\omega(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1)$$

3. Nous avons $[a_x^\dagger a_x, a_y^\dagger a_y] = 0$ d'aprés la question 1, donc nous avons également $[H, a_x^\dagger a_x] = [H, a_y^\dagger a_y] = 0$. Par conséquent (voir cours) il est possible de trouver des vecteurs propres à la fois de H, $a_x^\dagger a_x$ et $a_y^\dagger a_y$.

Nous savons que les opérateurs $a_x^\dagger a_x$ et $a_y^\dagger a_y$ on pour valeurs propres les entiers naturels positifs car ils obéissent aux relations de commutations de l'opérateur harmonique $[a_x, a_x^\dagger] = [a_y, a_y^\dagger] = 1$.

Par conséquent on peut trouver des kets φ_{n_x,n_y} tels que :

$$\begin{aligned}
a_x^\dagger a_x \varphi_{n_x,n_y} &= n_x \varphi_{n_x,n_y} \\
a_y^\dagger a_y \varphi_{n_x,n_y} &= n_y \varphi_{n_x,n_y}
\end{aligned}$$

il vient immédiatement que de tels kets sont des kets propres de l'hamiltonien, avec:

$$H\varphi_{n_x,n_y} = \hbar\omega(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1)\phi_{n_x,n_y} = (n_x + n_y + 1)\varphi_{n_x,n_y}$$

Il reste à prouver qu'il existe un vecteur propre pour chaque couple de valeur (n_x, n_y).

Scanned by CamScanner

Prenons un état propre ψ de H, $a_x^\dagger a_x$ et $a_y^\dagger a_y$, de valeur propre k pour l'opérateur $a_x^\dagger a_x$ et l pour l'opérateur $a_y^\dagger a_y$. On voit alors que l'état $\varphi_{0,0} = a_x^k a_y^l \psi$ est état propre de $a_x^\dagger a_x$ avec valeur propre 0 et état propre de $a_y^\dagger a_y$ avec valeur propre 0. Nous pouvons alors construire l'état $\varphi_{n_x,n_y} = (a_x^\dagger)^{n_x}(a_y^\dagger)^{n_y}/\sqrt{n_x!}\sqrt{n_y!}\varphi_{0,0}$, qui est état propres de $a_x^\dagger a_x$ avec valeur propre n_x et état propre de $a_y^\dagger a_y$ avec valeur propre n_y.

Il est possible de montrer qu'il existe un unique vecteur propre $\varphi_{0,0}$ tel que:

$$a_x^\dagger a_x \varphi_{0,0} = a_y^\dagger a_y \varphi_{0,0} = 0$$

et nous pouvons alors montrer (voir le cours sur l'oscillateur harmonique à une dimension) que pour chaque couple d'entiers positifs (n_x, n_y) il existe un *unique* vecteur φ_{n_x,n_y} tel que $a_x^\dagger a_x \varphi_{n_x,n_y} = n_x \varphi_{n_x,n_y}$ et $a_y^\dagger a_y \varphi_{n_x,n_y} = n_y \varphi_{n_x,n_y}$.

Le spectre de H est alors facile à étudier:

- L'état fondamental est unique, il s'agit de l'état $\varphi_{0,0}$ d'énergie $E_0 = \hbar\omega$.
- Le premier état excité a une énergie $2\hbar\omega$, et on peut trouver deux vecteurs propres avec cette énergie: $\varphi_{nx=0,ny=1}$ et $\varphi_{nx=1,ny=0}$. C'et état propre est deux fois dégénéré.
- plus généralement, on peut trouver n états d'energie $n\hbar\omega$: il s'agit des états $\varphi_{n,0}, \varphi_{n-1,1}, \ldots, \varphi_{1,n-1}, \varphi_{0,n}$.

4. Nous avons

$$\begin{aligned}
L_z &= -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a_x + a_x^\dagger)(a_y - a_y^\dagger) + i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a_y + a_y^\dagger)(a_x - a_x^\dagger) \\
&= -i\frac{\hbar}{2}(a_x a_y - a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y - a_x^\dagger a_y^\dagger - a_y a_x + a_y a_x^\dagger - a_y^\dagger a_x + a_y^\dagger a_x^\dagger) \\
&= -i\frac{\hbar}{2}(-a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y + a_y a_x^\dagger - a_y^\dagger a_x) \\
&= -i\hbar(a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger)
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé $[a_x, a_y^\dagger] = [a_x, a_y] = 0$.

5. Pour calculer le commutateur $[L_z, H]$, nous allons utiliser les formules de développement des commutateurs:

$$\begin{aligned}
[A+B, C] &= [A,C] + [B,C] \\
[AB, C] &= A[B,C] + [A,C]B
\end{aligned}$$

Utiliser ces formules est (en général) *beaucoup plus simple* que développer brutalement $L_z H - H L_z$ et le risque d'erreur de calcul est beaucoup plus faible.

Scanned by CamScanner

$$
\begin{aligned}
[L_z, H] &= [i\hbar(a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger), \hbar\omega(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1)] \\
&= i\hbar^2\omega\left\{[a_x^\dagger a_y, a_x^\dagger a_x] + [a_x^\dagger a_y, a_y^\dagger a_y] - [a_x a_y^\dagger, a_x^\dagger a_x] - [a_x a_y^\dagger, a_y^\dagger a_y]\right\} \\
&\quad + i\hbar^2\omega\underbrace{[a_x^\dagger a_y, 1]}_{=0} - i\hbar^2\omega\underbrace{[a_x a_y^\dagger, 1]}_{=0} \\
&= i\hbar^2\omega\left\{a_x^\dagger\underbrace{[a_y, a_x^\dagger a_x]}_{=0} + [a_x^\dagger, a_x^\dagger a_x]a_y\right\} \\
&\quad + i\hbar^2\omega\left\{a_x^\dagger[a_y, a_y^\dagger a_y] + \underbrace{[a_x^\dagger, a_y^\dagger a_y]}_{=0}a_y\right\} \\
&\quad - i\hbar^2\omega\left\{a_x\underbrace{[a_y^\dagger, a_x^\dagger a_x]}_{=0} + [a_x, a_x^\dagger a_x]a_y^\dagger\right\} \\
&\quad - i\hbar^2\omega\left\{a_x[a_y^\dagger, a_y^\dagger a_y] + \underbrace{[a_x, a_y^\dagger a_y]}_{=0}a_y^\dagger\right\} \\
&= i\hbar^2\omega\left\{[a_x^\dagger, a_x^\dagger a_x]a_y + a_x^\dagger[a_y, a_y^\dagger a_y] - [a_x, a_x^\dagger a_x]a_y^\dagger - a_x[a_y^\dagger, a_y^\dagger a_y]\right\}
\end{aligned}
$$

il reste à évaluer les commutateurs $[a_x^\dagger, a_x^\dagger a_x]$, $[a_x, a_x^\dagger a_x]$ $[a_y^\dagger, a_y^\dagger a_y]$ et $[a_y, a_y^\dagger a_y]$, qui se calculent très simplement:

$$[a_x^\dagger, a_x^\dagger a_x] = \underbrace{[a_x^\dagger, a_x^\dagger]}_{=0}a_x + a_x^\dagger\underbrace{[a_x^\dagger, a_x]}_{=-1} = -a_x^\dagger$$

$$[a_x, a_x^\dagger a_x] = \underbrace{[a_x, a_x^\dagger]}_{=+1}a_x + a_x^\dagger\underbrace{[a_x, a_x]}_{=0} = +a_x$$

Nous avons bien sur en changeant les indices: $[a_y^\dagger, a_y^\dagger a_y] = -a_y^\dagger$ et $[a_y, a_y^\dagger a_y] = +a_y$
En remplacant dans l'expression du commutateur on a finalement:

$$[L_z, H] = i\hbar^2\omega\left\{-a_x^\dagger a_y + +a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger - a_x(-a_y^\dagger)\right\} = 0$$

donc L_z et H commutent.

6. Nous avons

$$\begin{cases} a_d^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_x^\dagger + ia_y^\dagger\right) \\ a_g^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_x^\dagger - ia_y^\dagger\right) \end{cases}$$

Les commutateurs valent alors:

$$[a_d, a_d^\dagger] = \frac{1}{2}(\underbrace{[a_x, a_x^\dagger]}_{=1} + i\underbrace{[a_x, a_y^\dagger]}_{=0} - i\underbrace{[a_y, a_x^\dagger]}_{=0} - i^2\underbrace{[a_y, a_y^\dagger]}_{=+1}) = +1$$

Scanned by CamScanner

et:

$$[a_g, a_g^\dagger] = \frac{1}{2}(\underbrace{[a_x, a_x^\dagger]}_{=1} - i\underbrace{[a_x, a_y^\dagger]}_{=0} + i\underbrace{[a_y, a_x^\dagger]}_{=0} - i^2\underbrace{[a_y, a_y^\dagger]}_{=+1}) = +1$$

il est facile de vérifier aussi: $[a_g, a_d^\dagger] = [a_g, a_d] = 0$

7.

$$\begin{aligned}
\hat{L}_z &= i\hbar(a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger \\
&= \frac{i\hbar}{2}((a_d^\dagger + a_g^\dagger)(ia_d - ia_g) - (a_d + a_g)(-ia_d^\dagger + ia_g^\dagger)) \\
&= \frac{i\hbar}{2}(ia_d^\dagger a_d - ia_d^\dagger a_g + ia_g^\dagger a_d - ia_g^\dagger a_g + ia_d a_d^\dagger - ia_d a_g^\dagger + ia_g a_d^\dagger - ia_g a_g^\dagger) \\
&= \frac{-\hbar}{2}(a_d^\dagger a_d - a_g^\dagger a_g + a_d a_d^\dagger - a_g a_g^\dagger) \\
&= \frac{-\hbar}{2}(a_d^\dagger a_d - a_g^\dagger a_g + a_d^\dagger a_d + 1 - a_g^\dagger a_g - 1) \\
&= +\hbar(\hat{N}_g - \hat{N}_d)
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé $[a_d, a_g] = [a_d^\dagger, a_g] = 0$ et $[a_d, a_d^\dagger] = [a_g, a_g^\dagger] = 1$.

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hbar\omega(a^\dagger{}_x a_x + a^\dagger{}_y a_y + 1) \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}((a_d^\dagger + a_g^\dagger)(a_d + a_g) + (-ia_d^\dagger + ia_g^\dagger)(ia_d - ia_g) + 1) \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}(a_d^\dagger a_d + a_d^\dagger a_g + a_g^\dagger a_d + a_g^\dagger a_g - i^2 a_d^\dagger a_d + i^2 a_d^\dagger a_g + i^2 a_g^\dagger a_d - i^2 a_g^\dagger a_g + 1) \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}(a_d^\dagger a_d + a_g^\dagger a_g + a_d^\dagger a_d + a_g^\dagger a_g + 1) \\
&= \hbar\omega(\hat{N}_d + \hat{N}_g + 1)
\end{aligned}$$

8. comme $[\hat{N}_d, \hat{N}_g] = 0$, il est facile de voir que:
$[L_z, \hat{N}_d] = [L_z, \hat{N}_g] = [H, \hat{N}_d] = [H, \hat{N}_g] = 0$.
par conséquent on peut trouver des vecteurs propres simultanés de H, L_z, $\hat{N}_d$ et $\hat{N}_g$
$\hat{N}_d$ et $\hat{N}_g$ on pour valeur propre les entiers positifs ou nul
On retrouve le spectre de H:

- Etat fondamental d'energie $\hbar\omega$, de nombres quantique $n = n_d + n_g = 0$ et $m = n_d - n_g = 0$
- Deux Etat excités d'énergie $\hbar\omega$, caractérisés par les nombre quantiques $(n_d, n_g) = (1, 0)$ et $(n_d, n_g) = (0, 1)$,c'est à dire $n = n_d + n_g = 1$ et $m = n_d - n_g = \pm 1$
- il y a n états excités d'energie $n\hbar\omega$ qui ont pour nombre quantique $\hat{N}_d + \hat{N}_g = n$ et $-n/2 \leq \hat{N}_d - \hat{N}_g \leq n/2$

Scanned by CamScanner

Exercice 1 *Commutation d'observables et fonctions d'observables*

On considère deux observables A et B qui commutent avec $[A, B]$:

$$[[A, B], B] = [[A, B], A]] = 0$$

1. Etablir dans un premier temps la relation suivante :

$$[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B] \tag{1}$$

2. Les fonctions analytiques d'opérateurs peuvent être exprimée par leur développement en série, c'est à dire, étant donné une fonction développable en série entière $g(u) = \sum c_n u^n$ et un opérateur $\hat{A}$, on définit l'opérateur $g(\hat{A}) = \sum c_n \hat{A}^n$.

   Ainsi on définit $\exp \hat{A} = \sum \frac{\hat{A}^n}{n!}$. En utilisant ce développement, montrer la relation suivante:

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] \tag{2}$$

3. Démontrer la proposition suivante :

$$e^A B^n e^{-A} = (B + [A, B])^n \tag{3}$$

4. On définit la fonction des opérateur A et B suivante (x réel) :

$$f(x) = e^{Ax} e^{Bx}.$$

A l'aide de cette fonction nous allons démontrer des propriétes remarquables pour les opérateurs e^A et e^B.

- Montrer que :

$$f'(x) = (A + B + x[A, B])\, f(x) \tag{4}$$

- Démontrer que g(x) est solution de cette equation :

$$g(x) = e^{(A+B)x} e^{\frac{1}{2}x^2[A,B]} \tag{5}$$

- Comparer $f(0)$ et $g(0)$. En déduire la relation suivante:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \tag{6}$$

- En déduire finalement que :

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]} \tag{7}$$

Scanned by CamScanner

Exercice 2 *Application aux états cohérents*

Dans cet exercice nous allons appliquer les formules de l'exercice précédent aux états cohérents de l'oscillateur harmonique à une dimension.

1. Appliquer la relation (1) de l'exercice précédent pour le cas particulier des observables : $A = i\alpha\hat{p}$, $B = \hat{x}$.

2. Montrer que l'opérateur $e^{-i\alpha\hat{p}}$ est un opérateur de translation, i.e. :

$$e^{-i\alpha\hat{p}}|x\rangle = |x + \alpha\hbar\rangle \tag{8}$$

3. En déduire la relation suivante pour une fonction réelle quelconque $h(x)$:

$$e^{-i\alpha\hat{p}}h(x) = h(x + \alpha\hbar) \tag{9}$$

4. On propose d'appliquer ces résultats aux états cohérents de l'oscillateur harmonique. On rappelle brièvement la forme d'un état cohérent (on se restreint ici au cas z réel, bien que cette définition soit vrai pour z complexe) :

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z\hat{a}^\dagger)^n}{n!}|\varphi_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|\varphi_n\rangle$$

De plus, on obtient dans la base des positions :

$$z(x) = \langle x|z\rangle = \langle x|e^{z\hat{a}^\dagger}|\varphi_0\rangle$$

- Montrer que les états cohérents s'écrivent :

$$z(x) = e^{-\frac{z^2}{4}} e^{\beta x/\sqrt{2}} \langle x|e^{-i\frac{z}{\sqrt{2}\beta\hbar}\hat{p}}|\varphi_0\rangle \tag{10}$$

Indication : montrer dans un premier temps la relation suivante

$$e^{z\hat{a}^\dagger} = e^{\frac{z}{\sqrt{2}}\beta\hat{x}} e^{-i\frac{z}{\sqrt{2}\beta\hbar}\beta\hat{p}} e^{-\frac{z^2}{4}}$$

- En déduire le résultat final :

$$z(x) = (\beta^2/\pi)\exp\left(-\frac{\beta^2 x^2}{2} + \beta z x\sqrt{2} - \frac{z^2}{2}\right) \tag{11}$$

- En développant cette expression en puissance de z, écrire $z(x)$ en fonction des états propres de l'oscillateur harmoniques (i.e. $\varphi_n(x) = \langle x|\varphi_n\rangle$). Que reconnait-on?

Scanned by CamScanner

Exercice 1 *Commutation d'observables et fonctions d'observables*

1. Nous rappelons la formule suivante :

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \tag{1}$$

On procède par récurrence, i.e. on suppose la relation vraie pour le cas n et on démontre qu'elle est vraie aussi pour le cas $n+1$. Supposons maintenant $[A^{n-1}, B] = (n-1)A^{n-2}[A, B]$

$$\begin{aligned}
[A^n, B] &= A^{n-1}[A, B] + [A^{n-1}, B]A \\
&= A^{n-1}[A, B] + (n-1)A^{n-2}[A, B]A \\
&= A^{n-1}[A, B] + (n-1)A^{n-2}A[A, B] \\
&= nA^{n-1}[A, B]
\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé $[[A, B], A] = 0$.
Comme la formule est vraie pour $n = 1$, alors elle est toujours vraie.

2. On démontre la relation suivante à partir du résultat précédent :

$$A^n B - BA^n = nA^{n-1}[A, B] \tag{2}$$

Ce qui implique directement :

$$\begin{aligned}
e^A B - Be^A &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}B - B\frac{A^n}{n!} \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}nA^{n-1}[A, B] \\
&= \textstyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}A^l[A, B] \\
&= e^A[A, B]
\end{aligned}$$

(Nous avons effectué le changement de variable $l = n - 1$) Et donc le résultat final :

$$\Rightarrow e^A B e^{-A} = B + [A, B] \tag{3}$$

Cette proposition se limitant au cas où $[A, [A, B]] = 0$ et réciproquement $[B, [A, B]] = 0$.

Scanned by CamScanner

remarque : On peut obtenir une formule pour le cas général (où $[\mathcal{A},[\mathcal{A},\mathcal{B}]] \neq 0$) de la manière suivante, soit :

$$f(\lambda) = e^{\mathcal{A}\lambda}\mathcal{B}e^{-\mathcal{A}\lambda} \tag{4}$$

Nous voulons ainsi obtenir une formule générale pour le cas $f(\lambda = 1)$. Pour cela on introduit le développement de Taylor de $f(\lambda)$ au voisinage de $a = 0$:

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\lambda - a)^n \Rightarrow f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{5}$$

On calcule dans un premier temps la dérivée première de f :

$$f'(\lambda) = \mathcal{A}e^{\mathcal{A}\lambda}\mathcal{B}e^{-\mathcal{A}\lambda} - e^{\mathcal{A}\lambda}\mathcal{B}\mathcal{A}e^{-\mathcal{A}\lambda} \tag{6}$$

Or on a clairement : $[\mathcal{A}, e^{\mathcal{A}}] = 0$, et donc :

$$f'(0) = [\mathcal{A}, \mathcal{B}] \tag{7}$$

En calculant la dérivée seconde on se convainc facilement que la formule générale va être :

$$e^{\mathcal{A}}\mathcal{B}e^{-\mathcal{A}} = \mathcal{B} + [\mathcal{A}, \mathcal{B}] + \frac{1}{2!}[\mathcal{A}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}]] + \frac{1}{3!}[\mathcal{A}, [\mathcal{A}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}]]] + \ldots \tag{8}$$

(Cette formule n'est pas à connaître)

3. Cette proposition se démontre par récurrence : le cas n=1 a été prouvé à la question précédente.
Supposons $e^{\mathcal{A}}\mathcal{B}^{n-1}\mathcal{B}e^{-\mathcal{A}} = (\mathcal{B} + [\mathcal{A}, \mathcal{B}])^{n-1}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{A}}\mathcal{B}^n e^{\mathcal{A}} &= e^{\mathcal{A}}\mathcal{B}^{n-1}\mathcal{B}e^{-\mathcal{A}} \\ &= e^{\mathcal{A}}\mathcal{B}^{n-1}e^{-\mathcal{A}}e^{\mathcal{A}}\mathcal{B}e^{-\mathcal{A}} \\ &= (\mathcal{B} + [\mathcal{A}, \mathcal{B}])^{n-1}(\mathcal{B} + [\mathcal{A}, \mathcal{B}]) \\ &= (\mathcal{B} + [\mathcal{A}, \mathcal{B}])^n \end{aligned}$$

remarque : Nous avons utilisé $e^{-\mathcal{A}}e^{\mathcal{A}} = Id$. Cette relation est vrai pour tout opérateur, en effet :

$$\begin{aligned} e^{-\mathcal{A}}e^{\mathcal{A}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{n!l!}\mathcal{A}^{n+l} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}^j \left(\sum_{l=0}^{j} \frac{(-1)^l}{(j-l)!l!}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^j}{j!}\left(\sum_{l=0}^{j} C_j^l(-1)^l(+1)^{j-l}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^j}{j!}(1-1)^j \\ &= \frac{\mathcal{A}^0}{0!} + 0 = Id \end{aligned}$$

On peut remarquer que cette démonstration est vraie que $\mathcal{A}$ soit un opérateur ou un scalaire. D'une manière plus générale, si l'on considère des fonctions <u>d'un seul</u> opérateur, toutes les propriétés d'addition ou de multiplication de ces fonctions restent valables. Puisqu'un opérateur commute toujours avec lui même, les démonstrations de ces propriétés sont identiques au cas où les fonctions sont définies dans $\mathbb{R}$.

Scanned by CamScanner

4. (a) : Les fonctions dérivées ont les mêmes propriétés de bases que si elles était à valeur dans R, mais il faut faire attention a la commutation des opérateurs :

$$(\hat{U}(x)\hat{V}(x))' = \hat{U}'(x)\hat{V}(x) + \hat{U}(x)\hat{V}'(x)$$
$$(\hat{U}(x) + \hat{V}(x))' = \hat{U}'(x) + \hat{V}'(x)$$
$$(\hat{U}.x)' = \hat{U} \qquad \text{(si U est indépendant de x)}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} e^{\hat{V}x} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\hat{A}^n x^n}{n!}\right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{V}^n n x^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{V}^n x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \hat{V}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\hat{V}^l x^l}{(l)!} \\ &= \hat{V}e^{\hat{V}x} \end{aligned}$$

remarque : Cette relation n'est valable que parce que V ne dépend pas de x. Dans le cas général : $exp(\hat{A}(x)) \neq \hat{A}'(x)exp(\hat{A}(x))$ si $[\hat{A}(x), \hat{A}'(x)] \neq 0$.

Nous avons pour $f(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= Ae^{Ax}e^{Bx} + e^{Ax}Be^{Bx} \\ &= Ae^{Ax}e^{Bx} + (Be^{Ax} + [e^{Ax}B, Be^{Ax}])e^{Bx} \\ &= (A + B + x[A, B])e^{Ax}e^{Bx} \end{aligned}$$

Où nous avons utilisé $[e^{Ax}B, Be^{Ax}] = [Ax, B]e^{Ax} = e^{Ax}[Ax, B]$, vrai si $[[A, B], A] = 0$. De plus comme x est une variable réelle on peut la sortir du commutateur librement.

(b) On calcule la dérivée de $g(x)$:

$$g'(x) = (A + B)\, e^{(A+B)x}e^{\frac{1}{2}x^2[A,B]} + xe^{(A+B)x}\,[A, B]\, e^{\frac{1}{2}x^2[A,B]}$$

Comme on a supposé $[A, [A, B]] = 0 = [B, [A, B]]$, on a de même que $e^{(A+B)x}$ et $[A, B]$ commutent, et donc on obtient :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (A + B)\, g(x) + x\,[A, B]\, e^{(A+B)x}e^{\frac{1}{2}x^2[A,B]} \\ &= (A + B)\, g(x) + x\,[A, B]\, g(x) \end{aligned}$$

(c) Nous avons $f(0) = g(0) = Id$. Comme une équation différentielle du premier ordre a au plus une solution (à une constance multiplicative près), alors $f(x) = g(x)\forall x$. En particulier pour $x = 1$:

$$f(1) = e^{A}e^{B} = g(1) = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}[A,B]} \tag{9}$$

Ou encore (en multipliant par $e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$) :

$$e^{A+B} = e^{A}e^{B}e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \tag{10}$$

Scanned by CamScanner

(d) Il suffit d'écrire la formule précédente en effectuant la substitution $A \to B$ et $B \to A$:

$$\begin{aligned} e^A e^B &= e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \\ e^B e^A &= e^{B+A} e^{\frac{1}{2}[B,A]} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$e^A e^B = e^B e^A e^{-\frac{1}{2}[B,A]} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

En utilisant la relation que l'on a démontrée (équation (10)) :

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]} \tag{11}$$

Exercice 2 *Application aux états cohérents*

1. En appliquant la relation (2) de l'exercice 1. aux observables $A = i\alpha\hat{p}$ et $B = x$ on obtient (rappel : $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$) :

$$e^{i\alpha\hat{p}} \hat{x} e^{-i\alpha\hat{p}} = \hat{x} + [i\alpha\hat{p}, \hat{x}] = \hat{x} + \alpha\hbar \tag{12}$$

2. De la relation précédente on déduit :

$$\hat{x} e^{-i\alpha\hat{p}} = e^{-i\alpha\hat{p}} (\hat{x} + \alpha\hbar) \tag{13}$$

Si nous appliquons ces opérateurs sur un ket propre de l'opérateur $\hat{x}$:

$$\begin{aligned} \hat{x}\left(e^{-i\alpha\hat{p}}|x\rangle\right) &= e^{-i\alpha\hat{p}} (\hat{x} + \alpha\hbar) |x\rangle \\ \hat{x}\left(e^{-i\alpha\hat{p}}|x\rangle\right) &= (x + \alpha\hbar) \left(e^{-i\alpha\hat{p}}|x\rangle\right) \end{aligned}$$

L'état $e^{-i\alpha\hat{p}}|x\rangle$ est vecteur propre de l'opérateur position avec la valeur propre $x + \alpha\hbar$. L'opérateur $e^{-i\alpha\hat{p}}$ est donc un opérateur de translation. Il est utile pour la suite d'écrire la relation conjuguée :

$$\left(\langle x|e^{i\alpha\hat{p}}\right) \hat{x} = (x + \alpha\hbar) \left(\langle x|e^{i\alpha\hat{p}}\right)$$

3. On généralise la relation précédente pour toutes les fonctions d'ondes développées dans la base des positions :

$$\begin{aligned} h(x) &= \langle x|h\rangle \\ e^{-i\alpha\hat{p}} h(x) &= \langle x|e^{-i\alpha\hat{p}}|h\rangle \\ e^{-i\alpha\hat{p}} h(x) &= \langle x - \alpha\hbar|h\rangle = h(x - \alpha\hbar) \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

4. En utilisant la définition de $\hat{a}^\dagger$ en termes des opérateur $\hat{x}$ et $\hat{p}$:

$$\hat{a}^\dagger = \left(\beta\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\beta\hbar}\right)/\sqrt{2} \tag{14}$$

on obtient :

$$e^{z\hat{a}^\dagger} = e^{z\left(\beta\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\beta\hbar}\right)/\sqrt{2}} \tag{15}$$

On utilise la relation démontrée dans l'exercice 1 :

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \\ A &= \beta\hat{x}/\sqrt{2} \\ B &= -i\frac{\hat{p}}{\beta\hbar}/\sqrt{2} \end{aligned}$$

On trouve :

$$e^{z\hat{a}^\dagger} = e^{\frac{z}{\sqrt{2}}\beta\hat{x}} e^{-i\frac{z}{\sqrt{2}\beta\hbar}\hat{p}} e^{-\frac{z^2}{4}} \tag{16}$$

En utilisant ce résultat dans la définition de $z(x)$:

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\frac{z^2}{4}}\langle x|e^{\frac{z}{\sqrt{2}}\beta\hat{x}} e^{-i\frac{z}{\sqrt{2}\beta\hbar}\hat{p}}|\varphi_0\rangle \\ z(x) &= e^{-\frac{z^2}{4}} e^{\frac{z}{\sqrt{2}}\beta x}\langle x|e^{-i\frac{z}{\sqrt{2}\beta\hbar}\hat{p}}|\varphi_0\rangle \\ z(x) &= e^{-\frac{z^2}{4}} e^{\frac{z}{\sqrt{2}}\beta x}\langle x - z\sqrt{2}/\beta|\varphi_0\rangle \\ z(x) &= e^{-\frac{z^2}{4}} e^{\frac{z}{\sqrt{2}}\beta x}\varphi_0\left(x - z\sqrt{2}/\beta\right) \end{aligned}$$

La fonction $\varphi_0(x)$ est le fondamental de l'oscillateur harmonique $1D$, en représentation x on a :

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{\beta^{1/2}}{\pi^{1/4}}\right)\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}x^2\right) \tag{17}$$

On trouve de cette manière :

$$z(x) = \left(\frac{\beta^{1/2}}{\pi^{1/4}}\right)\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}x^2 + \beta z x\sqrt{2} - \frac{z^2}{2}\right) \tag{18}$$

Nous avons donc trouvé l'expression de la fonction d'onde d'un état cohérent, en n'utilisant que les propriétés des différents opérateurs. (Dans le devoir, nous avions utilisée la fonction génératrice des polynômes de Hermites pour obtenir cette expression).

5. Comme nous n'avons pas utilisé la fonction génératrice des polynômes de hermite, nous pouvons utiliser notre résultat pour la démontrer.
Dans un premier temps, rappelons le résultat obtenu pour les états cohérents :

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}|\varphi_n\rangle \tag{19}$$

Scanned by CamScanner

Où les $|\varphi_n\rangle$ sont les états propres de l'oscillateur harmonique. La fonction d'onde est donc donnée par :

$$z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \varphi_n(x) \tag{20}$$

En développant en puissance de z l'expression (17) on obtient :

$$z(x) = \left(\frac{\beta^{1/2}}{\pi^{1/4}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^n \frac{1}{n!} e^{-\frac{\beta^2}{2}x^2} \mathcal{H}_n(\beta x) \tag{21}$$

Où $\mathcal{H}_n$ sont les polynômes de Hermite.
Par identification avec l'équation (18), on obtient

$$\exp\left(\beta z x \sqrt{2} - \frac{z^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^n \frac{1}{n!} \mathcal{H}_n(\beta x) \tag{22}$$

En posant $t = z/\sqrt{2}$ et $x' = \beta x$, on retrouve bien la fonction génératrice des polynômes de Hermite.

$$\exp\left(2x't - t^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{H}_n(x') \tag{23}$$

Scanned by CamScanner