UNIVERSITE SIDI MOHAMMED BEN ABDELLAH

FACULTE DES SCIENCES DHAR ELMEHRAZ

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Laboratoire de Physique du Solide

Travaux Dirigés de Mécanique Quantique

(Formalisme mathématique, Postulats de la mécanique quantique, Oscillateı harmonique, Théorie du moment cinétique, atome d'hydrogène)

Module ; Aspects Microscopiques de la matière

Session 5

Mécanique quantique

Année Universitaire 2013-14

Pr. Anouar JORIO

ENONCES DES EXERCICES

→ Exercice1/

1) Définir la vitesse de groupe et la vitesse de phase v_φ associée à une particule quelconque.

2) Les calculer dans le cas d'une particule libre non relativiste de vitesse v.

3) Considérons une particule relativiste de masse au repos m_0, animée d'un mouvement de vitesse v et rappelons les expressions relativistes de l'énergie et de l'impulsion :

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \; ; \; p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a) Montrer que les vitesses de groupe et de phase associées à cette particule sont telles que : $v_g \, v_\varphi = c^2$. Conclure.

b) Evaluer l'expression de v_g en fonction de l'énergie E et puis en fonction de la fréquence ν de l'onde de matière associée à cette particule. En déduire l'expression de v_φ en fonction de E et puis de ν.

c) Que deviennent ces vitesses dans le cas des photons?

d) Calculer en fonction de E puis de n l'indice de réfraction relatif aux ondes de Louis De Broglie associées aux particules relativistes définies par n = c / v, les comparer à l'indice de réfraction relatif aux ondes électromagnétiques.

→ Exercice 2

Soient A, B et C trois opérateurs linéaires définis dans l'espace des états.

1) Montrer que l'on a $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$

2) Montrer aussi que si on a $[B, [A, B]] = 0$ alors :

a) $[A, B^k] = k[A, B]B^{k-1}$

b) Soit F une fonction de l'opérateur B, montrer que dans ces conditions $[A, F(B)] = [A, B]\frac{\partial F}{\partial B}$.

Exercice 3/

On considère les deux représentations $\{|r>\}$ et $\{|p>\}$.

1) Ecrire les relations de fermeture et d'orthonormalisation relatives à ces deux bases .

2) Calculer les éléments de matrice :

$<\vec{r}\,|P_x|\vec{r}'>$, $<\vec{r}\,|P_y|\vec{r}'>$, $<\vec{r}\,|P_z|\vec{r}'>$

Quelle est l'action de P_X dans la représentation $\{|r>\}$.

3) Calculer de même $<r|F(P)|r'>$ où F(P) est une fonction de l'opérateur P.

4) Calculer l' élément de matrice $<p|X|p'>$ et $<p|G(R)|p'>$ où G(R) est une fonction de l'opérateur R.

5) Le système est formé par une particule plongée dans un potentiel scalaire V(r). Il est régi par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)>}{dt} = H\,|\psi(t)> \quad \text{où} \quad H = \frac{P^2}{2m} + V(R)$$

Ecrire l'équation de Schrödinger de cette particule
a) Dans la représentation $\{|r>\}$
b) Dans la représentation $\{|p>\}$.

Exercice 4/

1) Si A est un opérateur hermétique, montrer que $e^{iA} = U$ est un opérateur unitaire.
2) Montrer que le produit de deux opérateurs unitaires est unitaire .
3) Soit $|\varphi_u\rangle$ un vecteur propre de l'opérateur unitaire U, associé à la valeur propre u :

$$U|\varphi_u> = u\,|\varphi_u>$$

a) Montrer que $u = \exp(i\varphi_u)$ où φ_u est une phase réelle.
b) $<\varphi_u|\varphi_{u'}>$ est nul si $u \neq u'$
4) Soit $\{|\varphi_i>\}$ une base orthonormée de l'espace des états ζ , supposée discrète. Appelons $|\widetilde{\varphi_i}>$ le transformé du vecteur $|\varphi_i>$ sous l'action de l'opérateur U unitaire :

$$|\widetilde{\varphi_i}> = U\,|\varphi_i>$$

a) Montrer que les $|\varphi_i>$ constituent une base orthonormée de ζ.
b) Par définition, le transformé A de l'opérateur A sera l'opérateur qui dans la base $|\varphi_i>$, a les mêmes éléments de matrice que l'opérateur A dans la base $|\varphi_i>$:

$$<\widetilde{\varphi_i}\,|\,\widetilde{A}\,|\,\widetilde{\varphi_j}> = <\varphi_i\,|\,A\,|\,\varphi_j>$$

Montrer que $\widetilde{A} = UAU^+$
c) Montrer que les valeurs propres de A associées aux vecteurs propres transformés des vecteurs propres de A sont celles de A.
cas particulier :

i) $(\widetilde{A})^+ = \widetilde{A^+}$ donc si A est hermitique $\widetilde{A}$ l'est aussi
ii) $(\widetilde{A})^n = (\widetilde{A^n})$ donc $F(\widetilde{A}) = \widetilde{F(A)}$

d) On considère l'opérateur unitaire infinitésimal $U(\varepsilon)$: $U(\varepsilon) = 1 + \varepsilon G + ..$
Montrer que $G + G^+ = 0$
e) Que devient l'expression donnant $\widetilde{A}$ en fonction de A ?

Exercice 5/ *Description de Schrödinger et de Heisenberg*

Dans la description de Schrödinger les états d'un système quantique évoluent avec le temps conformément à la loi : $|\alpha(t)> = U(t, t_0)\,|\alpha(t_0)>$
$U(t,t_0)$ est un opérateur linéaire unitaire d'évolution défini par la relation :

$$i\hbar\frac{d}{dt}U(t,t_0) = H\,U(t,t_0) \quad \text{avec } U(t_0,t_0) = 1$$

Dans laquelle H est l'hamiltonien associé à l'énergie du système.
1°) Retrouver l'équation de Schrödinger qui régit l'évolution des états $|\alpha(t)>$.
2°) Etablir la loi qui gouverne l'évolution des valeurs moyennes des observables du système.

3°) La description de Heisenberg se déduit de celle de Schrödinger par transformation unitaire $U^+(t,t_0)$. A l'état $|\alpha(t)>$ et à l'observable A de la description de Schrödinger correspondent donc, dans la description de Heisenberg, l'état $\wedge\alpha_H>$ et l'observable $A_H(t)$ tels que :

$$|\alpha_H> = U^+(t,t_0)\,|\alpha(t)> \quad , \quad A_H(t) = U^+(t,t_0)\,A\,U(t,t_0)$$

Trouver l'équation d'évolution des observables dans la description de Heisenberg.

4°) Trouver la forme , dans la description de Heisenberg, des opérateurs position X et d'impultion P (avec $t_0 = 0$) d'une particule libre.

Exercice 6/

On considère un électron de masse m et de charge - q, plongé dans un puits de potentiel infini à une dimension de largeur a:

$$\begin{cases} V(x) = 0 & pour \quad 0 \le x \le a \\ V(x) = \infty & pour \quad x < 0 \quad et \quad x > a \end{cases}$$

1) a) Ecrire l'équation de Schrödinger dans un état stationnaire. Montrer que l'énergie est quantifiée. Déterminer l'énergie E_n (du niveau caractérisé par le nombre quantique n et la fonction d'onde spatiale $\phi_n(x)$ correspondante.

b) Normer les fonctions $\phi_n(x)$ et montrer qu'elles sont orthogonales.

2) a) Calculer la valeur quadratique moyenne de l'impulsion $\overline{p} = \sqrt{\langle p^2 \rangle}$.

b) Déterminer le temps caractéristique τ que que mettrait de point de vue classique, un électron d'impulsion $\overline{p}$ pour traverser deux fois (aller et retour) la largeur du puits.

3) a) On considère la transition de l'électron entre les niveaux E_{n+1} et E_n lorsque n est très grand, donner dans ce cas l'expression approchée de la fréquence ν du photon associé à la transition.

b) Comparer ν à la fréquence $1/\tau$, commenter ce résultat.

Exercice 7/

On considère un système physique dont l'espace des états qui est à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée formée par $\{ |u_1>, |u_2>, |u_3> \}$.

Dans la base de ces trois vecteurs , l'opérateur hamiltonien H et l'observable A s'écrivent :

$$H = h\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a et ω_0 sont des constantes réelles.

Le système à l'instant t = 0 est dans l'état :

$$|\psi(0)> = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|u_1> + \frac{1}{2}\,|u_2> + \frac{1}{2}\,|u_3>$$

1) On mesure à l'instant t = 0 l'énergie du système , quelles valeurs peut - on trouver et avec quelles probabilités ?

Calculer pour le système dans l'état $|\psi(0)>$ l'écart quadratique moyen ΔH.

2) Au lieu de mesurer H à l'instant t = 0, on mesure A, quels résultats peut - on trouver et avec quelles probabilités?

Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?

3) Calculer le vecteur d'état $|\psi(t)>$ du système à l'instant t.

4) Quels résultats obtient - on si l'on mesure à l'instant t l'observable A ? Interprétation ?

Exercice 8-

Soit un système physique formé de deux particules (1) et (2) de même masse n'interagissant pas entre elles et placées toutes les deux dans un puits de potentiel infini de largeur a . On désigne par H(1) et H(2) les hamiltoniens de chacune de deux particules, par $|\varphi_n(1)>$ et $|\varphi_q(2)>$ les états propres correspondants d'énergies E_n et E_q . Dans l'espace des états du système global, on considère la base des états $|\varphi_n \varphi_q>$ définis par:

$$|\varphi_n\varphi_q> = |\varphi_n(1)> \otimes |\varphi_q(2)>$$

1°) Quels sont les états propres et les valeurs propres de l'opérateur $H = H(1) + H(2)$, l'hamiltonien total du système ?

Donner le degré de dégénérescence des deux niveaux d'énergie les plus basses.

2/ On suppose que le système est , à l'instant t = 0 , dans l'état

$$|\psi(0)> = \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_1\varphi_1> + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_1\varphi_2> + \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_2\varphi_1> + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_2\varphi_2>$$

a) Quel est l'état du système à l'instant t ?

b) On mesure l'énergie totale H. Quels résultats peut - on trouver et avec quelles probabilités?

c) Même question si , au lieu de mesurer H , on mesure H(1) .

d) Montrer que $|\psi(0)>$ est un état produit tensoriel . Lorsque le système est dans cet état , calculer les valeurs moyennes suivantes :

$<H(1)>$, $<H(2)>$ et $<H(1)H(2)>$. Comparer $<H(1)H(2)>$ à $<H(1)><H(2)>$, comment expliquer le résultat obtenu.

3°) Montrer que les résultats précédents restent valables lorsque l'état du système est l'état $|\psi(t)>$ calculé en b).

4°) On suppose maintenant que l'état $|\psi(0)>$ est donné par :

$$|\psi(0)'> = \frac{1}{\sqrt{5}}|\varphi_1\varphi_1> + \sqrt{\frac{3}{5}}|\varphi_1\varphi_2> + \frac{1}{\sqrt{5}}|\varphi_2\varphi_1>$$

Montrer que $|\psi(0)>$ ne peut pas être mis sous forme d'un produit tensoriel. Que deviennent alors les réponses aux diverses questions posées en 3°).

Exercice 9/

On considère un oscillateur harmonique de masse m et de pulsation ω, l'hamiltonien est alors donné par $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$. A l'instant t = 0, l'état de cet oscillateur est donné par: $|\psi(0)\rangle = \sum_n C_n |\varphi_n\rangle$ où $|\varphi_n\rangle$ sont les états stationnaires de H, d'énergies $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

1) Déterminer le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant t > 0. Quelle est la probabilité $\mathcal{P}$ pour qu'une mesure de l'énergie de l'oscillateur effectuée à l'instant t donne un résultat supérieur à $2\hbar\omega$? Lorsque $\mathcal{P}=0$, quels sont les coefficients C_n non nuls?

2) On suppose à partir de maintenant que seuls C_0 et C_1 sont différents de zéro.

a) Calculer les valeurs moyennes $\langle X\rangle$, $\langle P\rangle$, $\langle X^2\rangle$ *et* $\langle P^2\rangle$ dans l'état $|\psi(0)\rangle$, en déduire les écarts quadratiques moyens ΔX et ΔP dans ce même état.

b) Calculer la valeur moyenne de l'énergie $\langle H\rangle$ dans l'état $|\psi(0)\rangle$. En imposant que $\langle H\rangle = \hbar\omega$ et en écrivant la condition de normalisation de $|\psi(0)\rangle$, calculer $|C_0|^2$ *et* $|C_1|^2$

3) Le vecteur d'état normé $|\psi(0)\rangle$ n'étant défini qu'à un facteur de phase globale près, on fixe ce facteur de phase en prenant C_0 réel et positif. On pose $C_1 = |C_1| \exp i\theta_1$. En plus, de $\langle H\rangle = \hbar\omega$, on suppose que $\langle X\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Calculer θ_1.

4) $|\psi(0)\rangle$ étant ainsi déterminé, écrire $|\psi(t)\rangle$ pour t > 0 et calculer la valeur de θ_1 à l'instant t. En déduire la valeur moyenne $\langle X(t)\rangle$ de la position à l'instant t.

Exercice 10/

Partie A

Une particule de masse m est assujettie à se déplacer dans le plan xoy et qu'elle est soumise au potentiel $V(X,Y) = 1/2\,[\,m\omega^2(X^2+Y^2)]$. En d'autres termes nous avons affaire à un oscillateur harmonique à deux dimensions de pulsation ω.

On pose :

$$a_X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{X} + i\widehat{P_X}) \qquad a_Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{Y} + i\widehat{P_Y})$$

$$\text{avec } \widehat{X} = \beta X,\ \widehat{Y} = \beta Y,\ \widehat{P_X} = \frac{1}{\beta h}P_X,\ \widehat{P_Y} = \frac{1}{\beta h}P_Y,\ \beta = \sqrt{\frac{m\omega}{h}}$$

Soit $|\varphi_{nx}\rangle$ les états propres de $N_X = a^+_X a_X$ de valeurs propres n_X, $|\varphi_{ny}\rangle$ les états propres de $N_Y = a^+_Y a_Y$ de valeurs propres n_X et $|\varphi_{nx}\varphi_{ny}\rangle$ leur produit tensoriel. Tous ces états sont normés.

1°) Montrer que l'hamiltonien H de ce système s'écrit sous la forme d'une somme de deux hamiltoniens H_X et H_Y. Donner l'expression de H en fonction de N_X et N_Y.

2°) Déterminer les états propres de H ainsi que les valeurs propres qui leurs sont associées et leur degré de dégénérescence . Donner un ensemble complet d'observables qui commutent dans l'espace des états de cette particule.

3°) A l'instant t = 0 , la particule est dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\varphi_{00}\rangle + |\varphi_{01}\rangle\}$$

Quel est son état à l'instant t? Quelle est la probabilité pour qu'une mesure de l'énergie donne une valeur inférieure à $2\hbar\omega$?.

4°) On introduit les opérateurs :

$$A_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_X - i a_Y) \text{ et } A_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_X + i a_Y)$$

Montrer que les vecteurs $|\varphi_{00}\rangle$, $|d\rangle = A^+_d |\varphi_{00}\rangle$ et $|g\rangle = A^+_g |\varphi_{00}\rangle$ sont des états propres de H orthogonaux et normés et déterminer les valeurs propres qui leur correspondent.

Partie B –

La particule de masse m se déplace maintenant dans l'espace à trois dimensions et soumise à une force centrale F = kr. L'énergie de la particule est donnée par

$$E = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, k>0$$

1°) Quel est l'hamiltonien H de la particule.

2°) Calculer les états propres et les niveaux d'énergies de la particule. H forme t - il un E.C.O.C dans l'espace des états ζ_r . Donner un E.C.O.C dans ζ_r.

3°) Quel est le degré de dégénérescence du niveau fondamental de cette particule et celui du $n^{ième}$ niveau excité.

4°) Montrer qu'il existe une relation entre le $n^{ième}$ état et l'état fondamental.

Exercice 11-

Soit $|\varphi_n\rangle$ un état propre de l'hamiltonien H d'un oscillateur harmonique à une dimension et de pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$.

1. Démontrer que l'état suivant : $|\varphi_\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle$ (où α est un scalaire) est un état propre de l'opérateur annihilation a. On montrera que la valeur propre correspondante est égale à α.
2. A l'instant t=0, l'oscillateur harmonique est dans l'état $|\psi(t=0)\rangle = |\varphi_\alpha\rangle$. Quelles sont les valeurs d'énergie possibles et leurs probabilités. Déterminer alors l'état du système l'instant t.
3. Durant un intervalle très bref, $[0, \tau]$, tel que τ<<1, l'oscillateur harmonique est soumis au potentiel supplémentaire :

$$V = \hbar\Omega N^2$$

avec $N=a^+a$, a^+ étant l'opérateur de création et $\Omega >> \omega = \sqrt{k/m}$. On suppose que l'intensité de V est telle que l'hamiltonien total (H+V) est très peu différent de V durant l'intervalle de temps $[0, \tau]$. Montrer que les états $|\varphi_n\rangle$ sont des états propres de V.

4. Déterminer en fonction de $|\varphi_n\rangle$ l'état $|\psi(\tau)\rangle$ de cet oscillateur soumis à la perturbation V lorsque $|\psi(t=0)\rangle = |\varphi_\alpha\rangle$.
5. Déterminer l'expression de $|\psi(\tau)\rangle$ au temps $\tau = \pi/2\Omega$. Montrer que $|\psi(\tau)\rangle$ peut s'écrire sous la forme : $|\psi(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\pi/4}|\varphi_\alpha\rangle + e^{i\pi/4}|\varphi_{-\alpha}\rangle\right)$

Exercice 12-

On considère un oscillateur harmonique à une dimension constitué par une particule de masse m, soumise à une force de rappel $F = -kx$.

1°) Ecrire l'équation aux valeurs propres de cet oscillateur dans la représentation $\{|x\rangle\}$ et rappeler quels sont les états stationnaires et les énergies correspondantes de l'oscillateur harmonique.

2°) On suppose maintenant que l'oscillateur est plongé dans un champ électrique uniforme ε parallèle à Ox de sorte qu'il faut ajouter à V(X) l'énergie potentielle $W(X) = -q\varepsilon X$.

Ecrire le nouveau hamiltonien H(e) en fonction des observables P et X. en utilisant le changement de variable $X' = X - (q\varepsilon)/m\omega^2$, écrire $H(\varepsilon)$, à une constante près, sous une forme analogue à H_0 (oscillateur sans champ électrique).

3°) Ecrire l'équation de Schrödinger et en déduire que les énergies $E(\varepsilon)$ des états stationnaires , sont données par :

$$E_n(\varepsilon) = h\omega\,(n + \frac{1}{2}) - \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}$$

4°) Donner l'équation de Schrödinger en représentation $\{|x\rangle\}$. En déduire que les fonctions propres $\varphi'_n(x)$ associées aux énergies $E(\varepsilon)$ sont données par :

$$\varphi'_n(x) = \varphi_n(x - \frac{q\varepsilon}{m\omega^2})$$

où $\varphi_n(x)$ sont les fonctions propres associées à H_0

Exercice 13

-Soit un système physique de moment cinétique orbital l décrit par le vecteur d'état $|\psi\rangle$. La base dite standard dans la représentation $\{|\vec{r}\rangle\}$ est donnée par :

$$\psi_{k,l,m}(r,\theta,\varphi) = R_{k,l}(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

1) Ecrire en termes de la base standard le développement de $|\psi\rangle$ dans la représentation $\{|\vec{r}\rangle\}$ et donner l'expression des $C_{k,l,m}$ les coefficients du développement.

2) Ecrire le développement de $|\psi\rangle$ en termes d'harmoniques sphériques et donner aussi l'expression des $a_{l,m}(r)$ les coefficients de ce développement. Démontrer la relation

$$\int_0^\infty r^2 |a_{l,m}(r)|^2 dr = \sum_k |C_{k,l,m}|^2$$

3) Sachant que la fonction d'onde du système est donnée par:

$$\psi(x,y,z) = N(r + x + y + 2z)\exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right)$$

où b est une constante réelle donnée et N est une constante de normalisation.

a) Donner les résultats qu'on peut trouver lors d'une mesure de L_z. Même question pour L^2.

b) Calculer la probabilité pour qu'une mesure de L_z donne 0.

On donne:

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_1^{\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}$$

Exercice 14

On considère une particule sans spin, ayant un moment cinétique orbital L et se trouve dans un état propre $|l,m\rangle$ de L^2 et L_z correspondant au couple de valeurs propres $l(l+1)\hbar^2$ *et* $m\hbar$.

1) Calculer les expressions:

$$\langle l',m'|L^2|l,m\rangle, \langle l',m'|Lz|l,m\rangle, \langle l',m'|L\pm|l,m\rangle, \langle l',m'|Lx|l,m\rangle \text{ et } \langle l',m'|Ly|l,m\rangle$$

2) Déduire des résultats précédants l'expression de la valeur moyenne de Lx et Ly dans l'état $|l,m\rangle$, ainsi que les écarts quadratiques moyens ΔLx et ΔLy.

3) On suppose maintenant que la particule a pour moment cinétique orbital l=1. en utilisant les résultats de la première question, écrire les matrices qui représentent L^2, Lz, L±, Lx, Ly dans la base $\{|l,m\rangle\}$.

4) Cette particule est soumise à un gradient de champ électrique et son hamiltonien s'écrit alors: $H = \frac{\omega_0}{\hbar}(L_u^2 - L_v^2)$ ou Lu et Lv sont les composantes de L sur les directions Ou et Ov du plan xoy à 45° de ox et oz, et ω_0 est une constante réelle. Donner l'expression de H en fonction de Lx, Ly et Lz et écrire la matrice qui représente cet hamiltonien dans la base $\{|l,m\rangle\}$.

5) Déterminer les états stationnaires $|\varepsilon_1\rangle, |\varepsilon_2\rangle, |\varepsilon_3\rangle$ de cette particule, ainsi que les niveaux d'énergie.

6) A l'instant t=0, la particule est dans l'état $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|1,1\rangle + |1,-1\rangle\}$, quel l'état du système à l'instant t.

Exercice 15

On considère un système quantique sans spin, de moment cinétique orbital $\vec{L}$ Une base de l'espace des états de ce système est constituée par les états propres communs à L^2 et L_z et notés $|\ell,m\rangle$..

1/ Exprimer L_+L_- et L_-L_+ en fonction de L^2 et L_Z et en déduire les propriétés:

$$L_\pm|\ell,m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm1)}|\ell,m\pm1\rangle$$

2/ On suppose maintenant dans toute la suite que $\ell=1$

a- Calculer, dans la base $\{|\ell,m\rangle\}$, les éléments de matrices des opérateurs L^2, L_z, L_x et L_y.

b- Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres L_y

3/ Ce système est un noyau atomique soumis à un champ magnétique $\vec{B}_1$ dirigé selon une direction unitaire $\vec{u}$ d'angles polaires θ et φ [$\vec{u}$ (sinθcosφ, sinθsinφ, cosθ)]. On supposera que le rapport gyromagnétique du noyau est négatif et on posera : $\omega = -\gamma B_1$. En écrivant que l'hamiltonien d'interaction est $H = -\vec{\mu} \bullet \vec{B}$ où $\vec{\mu} = \gamma \vec{J}$.

a- Montrer que la matrice représentant H dans la base des états propres $\{|\ell,m\rangle\}$ est donnée par :

$$M_H = \hbar\omega \begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{\sin\theta e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sin\theta e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sin\theta e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sin\theta e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

b- Calculer alors les énergies propres associées à ce système

Exercice 16

Dans un problème à 3 dimensions, une particule sans spin et de masse m soumise à l'action d'une force centrale qui dérive du potentiel central V(r).

1°) En utilisant l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques, donner en représentation {|r>}, l'hamiltonien et l'équation de Schrödinger qui permet de déterminer les énergies et les fonctions d'ondes y(r,q,j) de la particule en fonction de L^2 et V(r).

2°) Les fonctions d'ondes communes à H,L^2, L_Z sont de la forme $y_{klm}(r,q,j) = R_{kl}(r)\, Y_l^m(q,j)$ sont les harmoniques sphériques, fonctions propres communes de L^2 et L_Z et $R_{kl}(r)$ sont les fonctions radiales de telles sorte que {H,L^2, L_Z} forme un E.C.O.C. de l'espace des états avec :

$$H|y_{klm}\rangle = E_{kl}|y_{klm}\rangle,\ L^2|y_{klm}\rangle = h^2 l(l+1)\,|y_{klm}\rangle,\ L_z|y_{klm}\rangle = hm|y_{klm}\rangle.$$

a) Trouver l'équation différentielle satisfaite par la partie radiale $R_{kl}(r)$.

b) On pose $U_{kl}(r) = rR_{kl}(r)$; trouver l'équation différentielle satisfaite par cette fonction radiale modifiée.

B/En réalité cette particule est un oscillateur harmonique à trois dimensions , elle est donc soumise à une force de rappel F=-kr .

1°) Montrer qu'il s'agit d'un problème à potentiel central .

2°) a) Montrer que la fonction radiale modifiée satisfait à l'équation différentielle:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \beta^4 r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} + \varepsilon_{kl}\right) U_{kl}(r) = 0$$

Avec $b^2 = mw/h$, $e_{kl} = 2mE_{kl}/h^2$ avec une condition à l'origine $U_{kl}(r)=0$.

b) Etudier le comportement asymptotique des solutions de cette équation et montrer qu'elles sont dominées par $\exp(-b^2r^2/2)$ ou $\exp(b^2r^2/2)$ (seule la première et physiquement acceptable).

Pour tenir compte de ces 2 solutions on pose $U_{kl}(r) = \exp(-b^2r^2/2)y_{kl}(r)$.

Quelle est l'équation différentielle satisfaite par $y_{kl}(r)$ et la condition à l'origine.

3°) On pose

avec $a_0 \neq 0$

a) Quelle est la valeur de s.

b) Montrer en tenant compte de l'équation différentielle satisfaite par $y_{kl}(r)$;que les coefficients a_q de la série $y_{kl}(r)$ sont reliés par la relation :

$$\frac{a_{q+2}}{a_q} = \frac{\beta^2(2q+2l+3) - \varepsilon_{kl}}{(q+2)(q+2l+3)}$$

c) Montrer alors que lorsque $b^2(2q+2l+3)-e_{kl} \neq 0$ le comportement asymptotique de $y_{kl}(r)$ coïncide avec celui de $\exp(b^2r^2)$. Conclure.

d) En déduire à partir de cela une condition de quantification et trouver les valeurs d'énergie E_{kl}. Conclure.

TD - Mécanique quantique

Série n° 1

Exercice 1

1 - Définir la vitesse de groupe, la vitesse de phase associées à une particule quelconque :

- Vitesse de groupe v_g : est la vitesse de déplacement du maximum centrale dû au interférences constructives. $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk}$

avec : ω = fonction de dispersion et E = energie de la particule.

$$\Rightarrow \vec{v}_g = \frac{1}{\hbar}\vec{\nabla}_k E$$

k est le vecteur d'onde

v_g est aussi la vitesse de transmission d'énergie dans un solide.

- Vitesse de phase : v_φ : C'est la vitesse de déplacement des plan d'égale phase. $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$

$$\begin{cases} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k \end{cases} \Rightarrow \frac{E}{p} = v_\varphi \quad \text{et} \quad v_g = \frac{dE}{dp}$$

- Particule libre :

$$\hbar\omega = E = E_c + \cancel{E_p} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}} \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m}$$

$$\boxed{v_g = v}$$

pour la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

$$\Leftrightarrow v_\varphi = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$$

a/ Mq : $v_g \cdot v_\varphi = c^2$

* pour une particule relativiste :

Elle est définie par : $E = \gamma \cdot m_0 c^2$. $p = \gamma m_0 v$

avec . $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$

v étant la vitesse de la particule.

c = célérité de la lumière.

m_0 = la masse de la particule au repos

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

$$\Leftrightarrow 2E\,dE = 2pc^2\,dp$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{E}{p}}_{v_\varphi} = c^2 \frac{dp}{dE} = c^2 \underbrace{\frac{1}{\frac{dE}{dp}}}_{v_g}$$

$$\Rightarrow v_\varphi = \frac{c^2}{v_g} \Rightarrow v_\varphi \cdot v_g = c^2$$

b/ - Evaluer l'expression de v_g en fonction de l'énergie E, puis en fonction de ν

ν : fréquence de l'onde associée à cette particule.

$$E\,dE = pc^2\,dp$$

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E}$$

$$\left.\begin{array}{l} p = \gamma m_0 v \\ E = \gamma m_0 c^2 \end{array}\right\} \frac{p}{E} = \frac{v}{c^2} = \frac{v_g}{c^2}$$

$$\Rightarrow v_g = v$$

$$E = \frac{m_0 C^2}{\sqrt{1-\frac{v_g^2}{C^2}}} = \frac{m_0 C^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{v_g^2}{C^2} = \frac{m_0^2 C^4}{E^2} \Rightarrow v_g = C\left(1 - \frac{m_0^2 C^4}{E^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow v_g < C$$

et on a : $E = h\nu \Rightarrow v_g = C\left(1 - \frac{m_0^2 C^4}{(h\nu)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

* calculer la vitesse de phase :

$$v_\varphi v_g = C^2$$

$$\Rightarrow v_\varphi = \frac{C^2}{v_g} = C\left(1 - \frac{m_0^2 C^2}{(h\nu)^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow v_\varphi > C$$

v_g est la vitesse de la particule et v_φ est une vitesse fictif qui n'a pas de réalité physique.

c/ - cas du photon :

masse au repos : $m_0 = 0$

$$E^2 = p^2 C^2 + 0 \times C^4 \Rightarrow E = pC$$

$$v_\varphi = C \quad ; \quad v_g = C$$

d/ - calculer l'indice de réfraction relatifs aux ondes de Louis De Broglie.

Si $v = v_g$ $\quad n = \frac{c}{v_g} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{E^2}}}$

$= \left(1 - \frac{m_0^2c^4}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} > 0$

Si $v = v_\varphi$: $n_\varphi = \frac{c}{v_\varphi} = \left(1 - \frac{m_0^2c^4}{E^2}\right)^{\frac{1}{2}} < 1$

v_φ est une vitesse qui n'a pas de réalité physique

<u>Exercice 2</u>.

Soient A, B, C trois operateurs linaire definie dans l'espace des états.

Le commutateur de 2 operateurs A et B est défini par

$$[A, B] = AB - BA$$

Si A et B commutateur $[A, B] = 0$

Par exemple X et P ne commutateur par $[X, P] = cte$

① <u>Mq</u> : $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$

on a : $B[A, C] + [A, B]\cdot C = B(AC - CA) + (AB - BA)C$

$= \cancel{BAC} - BCA + ABC - \cancel{BAC}$

$= ABC - BCA = [A, BC]$

$\Rightarrow [A, BC] = B[A, C] + [A, B]\cdot C$

$[X, P^2] = P[X, P] + [X, P]P$

$= 2\hbar P$

② **MQ** : si $[B,[A,B]] = 0$ alors : $[A,B^k] = k[A,B] \cdot B^{k-1}$

a/ $[B,[A,B]] = B.[A,B] - [A,B]B$

et $[B,[A,B]] = 0 \cancel{B.(AB-BA) - (AB-BA)B}$

$\Leftrightarrow B[A,B] - [A,B]\cdot B = 0 \cancel{BAB - BBA - ABB - BAB}$

$\Leftrightarrow B[A,B] = \overset{[A,B]\cdot B}{\cancel{BBA - ABB = 0}} \Leftrightarrow \cancel{BBA = ABB}$.

Démontrons par récurrence :

si $k = 1$: $[A,B] = 1.[A;B] \times B^0 = [A,B]$

on suppose que la relation est vrai à l'ordre $k-1$

$$[A, B^{k-1}] = (k-1).[A,B].B^{k-1}$$

A l'ordre k on a : $[A, B^k] = [A, B^{k-1}.B]$

$$[A, B^k] = B^{k-1}.[A,B] + [A, B^{k-1}].B$$
$$= B^{k-1}.[A,B] + (k-1)[A,B].B^{k-1}.B$$
$$= B^{k-1}[A,B] + (k-1).[A,B].B^{k-1}$$
$$= B^{k-1}[A,B] + B^{k-1}(k-1)[A,B]$$
$$[A,B^k] = k.B^{k-1}[A,B] = k[A,B].B^{k-1}$$

b/ En montre que si $f(x)$ est une fonction développable en série entière : $f(x) = \sum a_n x^n$

$\Rightarrow f(A) = \sum a_n A^n$. A operateur

$$[A, F(B)] = [A; \sum_n a_n B^n] = \sum_n a_n [A, B^n] = \sum a_n n[A,B]$$

$$[A, F(B)] = [A, B] \sum a_n n b^{n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{[A, F(B)] = [A, B] \frac{\partial f}{\partial B}}$$

exemple :

$\rightarrow$ $[P, V(x)] = [P, X] \frac{\partial V}{\partial X} = -i\hbar \frac{\partial V}{\partial X}$

$\rightarrow$ $[\vec{P}, V(\vec{R})] = [\vec{P}, \vec{R}] \vec{\nabla} V(R) = -i\hbar \vec{\nabla} V(R)$.

Exercice 3

On considère les représentations $\{|\vec{r}\rangle\}$ et $\{|\vec{p}\rangle\}$.

1) - Relation d'orthonormalisation relatives à $\{|\vec{r}\rangle\}$ et $\{|\vec{p}\rangle\}$

$$\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \langle x y z | x' y' z' \rangle$$

$$= \langle x | x' \rangle \langle y | y' \rangle \langle z | z' \rangle = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$$

$$\Rightarrow X |\vec{r}\rangle = X |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle = x |\vec{r}\rangle$$

pour la representation $\{|\vec{p}\rangle\}$:

$$\langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

Relation de fermeture :

- pour $\{|\vec{r}\rangle\}$: $\int_{\mathbb{R}_3} |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| d\vec{r} = \mathbb{1}$

- pour $\{|\vec{p}\rangle\}$: $\int_{\mathbb{R}_3} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| d\vec{p} = \mathbb{1}$.

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} \text{ ? et } \langle \vec{p} | \vec{r} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-i \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} \text{ ?}$$

2/ calcul de l'élément de matrice $\langle \vec{r} | P_x | \vec{r}' \rangle$.

l'action de P_x dans $\{|\vec{r}\rangle\}$ est $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$

l'action de $\vec{P}$ dans $\{|\vec{r}\rangle\}$ est $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_{\vec{r}}$

$$\langle \vec{r}|P_x|\vec{r}'\rangle = \langle \vec{r}|P_x\int_{\mathbb{R}_3}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|d\vec{p}|\vec{r}'\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}_3}\langle\vec{r}|P_x|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\vec{r}'\rangle d\vec{p}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_3} p_x\langle\vec{r}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\vec{r}'\rangle d\vec{p}.$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{\mathbb{R}_3} p_x e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}'} d\vec{p}.$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{\mathbb{R}_3} p_x e^{\frac{i}{\hbar}p_x(x-x')} e^{p_y(y-y')} e^{p_z(z-z')} d\vec{p}$$

par correspondance : $\frac{\partial}{\partial x}e^{+\frac{i}{\hbar}p_x(x-x')} = \frac{i}{\hbar}p_x e^{\frac{i}{\hbar}p_x(x-x')}$

$$\Rightarrow \langle\vec{r}|P_x|\vec{r}'\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}e^{\frac{i}{\hbar}p_x(x-x')} e^{\frac{i}{\hbar}p_y(y-y')} e^{\frac{i}{\hbar}p_z(z-z')} d\vec{p}$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int e^{\frac{i}{\hbar}p_x(x-x')} e^{\frac{i}{\hbar}p_y(y-y')} e^{\frac{i}{\hbar}p_z(z-z')} d\vec{p}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}'} d\vec{p}$$

$$= \boxed{\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\langle\vec{r}|\vec{r}'\rangle} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

on montre aussi de la même façon que :

$$\langle\vec{r}|P_y|\vec{r}'\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\delta(y-y')\delta(x-x')\delta(z-z')$$

et $\langle\vec{r}|P_z|\vec{r}'\rangle = \frac{\hbar}{i}\delta(x-x')\delta(y-y')\frac{\partial}{\partial z}\delta(z-z')$

Quelle est l'action de P_x sur un état $|\psi\rangle$ dans la representation $\{|\vec{r}\rangle\}$.

$$\langle \vec{r} | P_x | \Psi \rangle ? = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\vec{r}).$$

$$\langle \vec{r} | P_x | \Psi \rangle = \int \langle \vec{r} | P_x | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \Psi \rangle d\vec{p}.$$

$$= \int p_x \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \Psi \rangle d\vec{p}.$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int p_x e^{\frac{i}{\hbar} \vec{r}\cdot\vec{p}} \bar{\Psi}(p) d\vec{p}.$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int p_x \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(x p_x + y p_y + z p_z)} \cdot \bar{\Psi}(\vec{p}) d\vec{p}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} e^{(p_x x + p_y y + p_z z)} \bar{\Psi}(\vec{p}) d\vec{p}$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \int \langle \vec{r} | \underbrace{\vec{p} \rangle \langle \vec{p}}_{\mathbb{1}} | \Psi \rangle d\vec{p}.$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{r} | P_x | \Psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \langle \vec{r} | \Psi \rangle = \boxed{\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\vec{p})_{\vec{r}?}}$$

3/ Soit $F(\vec{P})$ une fonction de l'opérateur $\vec{P}$

Calculer $\langle \vec{r} | F(\vec{P}) | \vec{r}' \rangle$?

Si on a $\vec{P} | \vec{p} \rangle = \vec{p} | \vec{p} \rangle \Longrightarrow F(\vec{P}) | \vec{p} \rangle = F(\vec{p}) | \vec{p} \rangle$

$$\langle \vec{r} | \underset{\mathbb{1}}{F(\vec{P})} | \vec{r}' \rangle = \langle \vec{r} | \int F(\vec{p}) | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | d\vec{p} | \vec{r}' \rangle$$

$$= \int F(\vec{p}) \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{r} \rangle d\vec{p}.$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int F(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} \cdot \vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} d\vec{p}.$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} T_F^{-1} (F(r - r'))$$

la transformation de Fourier inverse.

4/ calcule de $\langle \vec{p} | X | \vec{p}' \rangle$:

$$\langle \vec{p} | X | \vec{p}' \rangle = \int \langle p | X | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \vec{p}' \rangle d\vec{r} = \int x \langle \vec{p} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \vec{p}' \rangle d\vec{r}$$

et de la manière que la question 2/. on trouve.

$$\langle \vec{p} | X | \vec{p}' \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-x')\, \delta(y-y')\, \delta(z-z')$$

4) suite :

Action de X sur la . $|\Psi\rangle$. representation $|\vec{p}\rangle$.

$$\langle \vec{p} | X | \Psi \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} \Psi(\vec{p})$$

$$\langle \vec{p} | G(\vec{R}) | \vec{p}' \rangle = \langle \vec{p} | \int G(\vec{R}) | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | d\vec{r} | \vec{p}' \rangle$$

$$\Longrightarrow \langle \vec{p} | G(\vec{R}) | \vec{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{\frac{+i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}\, G(\vec{r})\, e^{\frac{-i}{\hbar}\vec{p}'\cdot\vec{r}}\, d\vec{r}$$

$$\Longrightarrow \langle \vec{p} | G(\vec{R}) | \vec{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int G(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{r}\cdot(\vec{p}'-\vec{p})}\, dr$$

$$\Longrightarrow \langle \vec{p} | G(\vec{R}) | \vec{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} T_F\left(G(\vec{p}-\vec{p}')\right)$$

5/ Le système est formé par une particule de masse m plongé dans V(r)

a/ dans la représentation $\{|r\rangle\}$.

$$\langle \vec{r} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Psi(t) \rangle = \langle \vec{r} | H | \Psi \rangle \qquad H = \frac{p^2}{2m} + V(R)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{r} | \Psi \rangle = \langle \vec{r} | \frac{p^2}{2m} | \Psi(t) \rangle + \langle \vec{r} | V(R) | \Psi(t) \rangle$$

l'action de . $\vec{p}$ dans la representation $|\vec{r}\rangle$.

- $\langle \vec{r} | \vec{p} | \Psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_r \Psi(\vec{r})$

$$\Longrightarrow \langle \vec{r} | p^2 | \Psi \rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \vec{\nabla}_r \vec{\nabla}_r \Psi(\vec{r}) = -\hbar^2 \Delta \Psi(\vec{r})$$

- $\langle \vec{r} | V(\vec{R}) | \Psi \rangle = V(\vec{r}) \langle \vec{r} | \Psi \rangle = V(\vec{r}) \Psi(\vec{r})$

L'equation de schroïdinger dans la representation $|\vec{r}\rangle$.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}) = \frac{1}{2m}\left(-\hbar^2 \nabla^2\right) \Psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r})$$

donc : $$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right) \Psi(\vec{r})}$$

b- Dans la representation $|\vec{p}\rangle$:

$$\langle p | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Psi(t)\rangle = \langle p | \frac{\vec{P}^2}{2m} | \Psi(t)\rangle + \langle p | V(\vec{R}) | \Psi(t)\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{p},t) = \frac{1}{2m} \langle p | p^2 | \Psi(t)\rangle + \langle \vec{p} | V(\vec{R}) | \Psi(t)\rangle$$

- $\langle \vec{p} | \vec{p}^2 | \Psi(t)\rangle = p^2 \cdot \bar{\Psi}(\vec{p})$
- $\langle \vec{p} | V(\vec{R}) | \Psi(t)\rangle = \int \langle \vec{p} | V(\vec{R}) | \vec{p}'\rangle \langle p' | \Psi\rangle d\vec{p}'$

$$\Rightarrow \langle \vec{p} | V(\vec{R}) | \vec{p}'\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \cdot TF\left(V(p-p')\right)$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{p} | V(R) | \Psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int TF\left(V(\vec{p}-\vec{p}')\right) \bar{\Psi}(p') dp'$$

L'équation de schrödinger dans la representation $|\vec{p}\rangle$ sera

$$i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{p}) = \frac{p^2}{2m} \Psi(p) + \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int TF\left(V(\vec{p}-\vec{p}')\right) \Psi(p') dp'$$

Exercice 4 :

1/ si A est un operateur hermétique, montrer que $e^{iA} = U$ est un opérateur unitaire.

Montrons que $U^+ = e^{-iA^+}$?

$$e^{iA} = \sum \frac{(i)^n}{n!} A^n \Rightarrow e^{iA^+} = \left(\sum \frac{(i)^n}{n!} A^n\right)^+ = \sum \frac{(-i)^n}{n!} A^{+n}$$

$$\Rightarrow e^{-iA} = \sum \frac{(-i)^n A^n}{n!}$$

si A et B ne commutent pas $[A,B] \neq 0$:

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \quad ?$$

si $[A,B] = 0$: $e^A e^B = e^{A+B}$.

U = unitaire, $UU^+ = 1 = e^{iA} e^{-iA} = e^{i(A-A)} e^{\frac{1}{2}[A,A]}$

$= \mathbb{1}$

de la même façon $UU^{+} = \mathbb{1}$

2/ le produit de deux operateurs unitaire est unitaire

U est unitaire : $UU^{+} = U^{+}U = \mathbb{1}$

V est unitaire : $VV^{+} = V^{+}V = \mathbb{1}$

montrons que $(UV)(UV)^{+} = \mathbb{1} = (UV)^{+}(UV)$?

$(AB)^{+} = BA^{+}$

$\Rightarrow (UV)(UV)^{+} = UVV^{+}U^{+} = UU^{+} = \mathbb{1}$

$\Rightarrow (UV)^{+}(UV) = \mathbb{1}$.

3/ soit $|\varphi_u\rangle$ VP de U associe à la VP u.

$$U|\varphi_u\rangle = u|\varphi_u\rangle \Rightarrow \langle\varphi_u|U^{+} = u^{*}\langle\varphi_u|$$

a/ - MQ $u = e^{i\varphi_u}$ où φ_u est une phase réelle.

$$\langle\varphi_u|U^{+}U|\varphi_u\rangle = \underbrace{u^{*}u}_{|u|^2}\langle\varphi_u|\varphi_u\rangle = \langle\varphi_u|\varphi_u\rangle$$

$$\Rightarrow (|u|^2 - 1)\underbrace{\langle\varphi_u|\varphi_u\rangle}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow |u|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{u = e^{i\varphi_u}}$$

b/ - Mq $\langle\varphi_u|\varphi_{u'}\rangle = 0$ si $u \neq u'$

$U|\varphi_u\rangle = u|\varphi_u\rangle$

$U|\varphi_{u'}\rangle = u'|\varphi_{u'}\rangle$

$$\langle\varphi_u|\varphi_{u'}\rangle = \langle\varphi_u|U^{+}U|\varphi_{u'}\rangle = \langle\varphi_u|u^{*}u'|\varphi_{u'}\rangle$$

$$= u^{*}u'\langle\varphi_u|\varphi_{u'}\rangle = e^{-i(\varphi-\varphi')}\langle\varphi_u|\varphi_{u'}\rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle\varphi_u|\varphi_{u'}\rangle(1 - \underbrace{e^{-i(\varphi-\varphi')}}_{\neq 1}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\varphi_u|\varphi_{u'}\rangle = 0}$$

4/- soit $\{|\varphi_i\rangle\}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$

$\sum |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \mathbb{1}$ et $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij} \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i\neq j \end{cases}$

a/ soit $|\tilde{\varphi}_i\rangle$ le transformée de $|\varphi_i\rangle$ par un operateur U

$$|\tilde{\varphi}_i\rangle = U|\varphi_i\rangle$$

$$\langle\tilde{\varphi}_i|\tilde{\varphi}_j\rangle = \delta_{ij}$$

$$|\tilde{\varphi}_i\rangle = U|\varphi_i\rangle \Rightarrow \langle\tilde{\varphi}_i| = \langle\varphi_i|U^+$$

$$\Leftrightarrow \langle\tilde{\varphi}_i|\tilde{\varphi}_j\rangle = \langle\varphi_i|U^+U|\varphi_j\rangle = \langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$$

Relation de Fermeture $\sum|\tilde{\varphi}_i\rangle\langle\tilde{\varphi}_i| = \sum U|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|U^+$

$$\Leftrightarrow \sum|\tilde{\varphi}_i\rangle\langle\tilde{\varphi}_i| = U\sum|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|U^+ = UU^+ = \mathbb{1}$$

b/- Le transformé $\tilde{A}$ de A est tel que :

$$\langle\tilde{\varphi}_i|\tilde{A}|\tilde{\varphi}_j\rangle = \langle\varphi_i|A|\varphi_j\rangle$$

montrons que : $\tilde{A} = UAU^+$

$$|\tilde{\varphi}_i\rangle = U|\varphi_i\rangle \longrightarrow \langle\tilde{\varphi}_i| = \langle\varphi_i|U^+$$

$$\langle\tilde{\varphi}_i|\tilde{A}|\tilde{\varphi}_j\rangle = \langle\varphi_i|U^+\tilde{A}U|\varphi_j\rangle = \langle\varphi_i|A|\varphi_j\rangle$$

$$U^+\tilde{A}U = A$$

$$UU^+AUU^+ = UAU^+$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tilde{A} = UAU^+}$$

c/- Montrons que VP de $\tilde{A}$:

si a_n est valeur propre de A associé au VP $|\varphi_n\rangle$.

soit aussi VP de $\tilde{A}$ associé $|\tilde{\varphi}_n\rangle$

Montrons que si : $A|\varphi_n\rangle = a_n|\varphi_n\rangle \Rightarrow \tilde{A}|\tilde{\varphi}_n\rangle = a_n|\tilde{\varphi}_n\rangle$

$$|\tilde{\varphi}_n\rangle = U|\varphi_n\rangle$$

$$\tilde{A}|\tilde{\varphi}_n\rangle = \tilde{A}U|\varphi_n\rangle \quad \text{or} : \tilde{A} = UAU^+$$

$$UAU^+U|\varphi_n\rangle = UA|\varphi_n\rangle$$

$$= a_n U|\varphi_n\rangle = a_n|\tilde{\varphi}_n\rangle$$

i/- $(\tilde{A})^+ = \tilde{A^+}$

$$(\tilde{A})^+ = (UAU^+)^+ = (U^+)^+A^+U^+ = UA^+U^+ = \tilde{A^+}$$

$\Rightarrow$ si A est hermitique $\Rightarrow$ $\tilde{A}$ est aussi hermitique

ii/- $(\tilde{A})^n = (\tilde{A^n})$: $\cancel{(\tilde{A})^n}$.

$$(\tilde{A})^n = \tilde{A}\tilde{A}\ldots\tilde{A} = UAU^+UAU^+\ldots = UA^nU^+$$

$$\Rightarrow (\tilde{A})^n = \tilde{A^n}$$

On sait que : $F(A) = \sum a_n A^n$

$$\Leftrightarrow F(\tilde{A}) = \sum a_n(\tilde{A})^n = \sum a_n \tilde{A^n} = \widetilde{\sum a_n A^n}$$

$$\Leftrightarrow F(\tilde{A}) = \widetilde{F(A)}$$

d/- on considère l'operateur unitaire infinitisimale :

$$U(\varepsilon) = \mathbb{1} + \varepsilon G + \ldots \quad ; \quad G + G^+ = 0 \ ?$$

$$U(\varepsilon) = \mathbb{1} + \varepsilon G \Rightarrow U^+ = \mathbb{1} + \varepsilon G^+$$

$$UU^+ = \mathbb{1} + \varepsilon(G + G^+) + o(\varepsilon^2) = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow (G + G^+) = 0 \Rightarrow G = -G^+$$

e/- Expression de $\tilde{A}$ en fonction de A

$$\tilde{A} = UAU^+ = (\mathbb{1} + \varepsilon G)A(\mathbb{1} + \varepsilon G^+)$$

$$= A + \varepsilon(G + G^+) + \varepsilon^2(GG^+)$$

$$\Rightarrow \cancel{\tilde{A} = A + A\varepsilon^2 GG^+} \quad \tilde{A} = A + \varepsilon(GA + AG^+)$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = A + \varepsilon(GA - AG) + o(\varepsilon^2)$$

Exercice 5 :

On considère dans la description de schrödinger, les états d'un système quantique evoluent conformément à la loi

$$|\alpha(t)\rangle = U(t,t_0)|\alpha(t_0)\rangle$$

$U(t,t_0)$ operateur unitaire d'évolution défini par la valeur

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t,t_0) = H U(t,t_0) \quad \text{avec } U(t_0,t_0)=1$$

H etant l'operateur hamiltonien associé à l'energie

1/ Equation regissant $|\alpha(t)\rangle$

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\alpha(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} U(t,t_0)|\alpha(t_0)\rangle$$
$$= i\hbar |\alpha(t_0)\rangle \frac{d}{dt} U(t,t_0)$$
$$= |\alpha(t_0)\rangle H U(t,t_0)$$
$$= H U(t,t_0)|\alpha(t_0)\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad i\hbar \frac{d}{dt}|\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle$$

U l'operateur evolution

$$U(t,t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)\right)$$

si $t_0 = 0$ $\quad \boxed{|\alpha(t)\rangle = \exp\left(\frac{-i}{\hbar} Ht\right)|\alpha(0)\rangle}$

2/ valeur moyenne d'une observable :

dans un état $|\psi(t)\rangle$. ($|\psi(t)\rangle$ normée)

$$\langle A\rangle_{|\alpha(t)\rangle} = \langle\alpha(t)|A|\alpha(t)\rangle \quad ; |\alpha(t)\rangle = U(t,t_0)|\alpha(t_0)\rangle$$

Evolution dans le temps de $\langle A\rangle$.

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{d}{dt}\left(\langle\alpha(t)|A|\alpha(t)\rangle\right) = \left(\frac{d}{dt}\langle\alpha(t)|\right)A|\alpha(t)\rangle$$
$$+ \langle\alpha(t)|\frac{d}{dt}A|\alpha(t)\rangle + \langle\alpha(t)|A\frac{d}{dt}|\alpha(t)\rangle$$

et d'après 1/ $\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha(t)| = \langle\alpha(t)|H$$

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle\alpha(t)|HA|\alpha(t)\rangle + \langle\alpha(t)|A\left(\frac{1}{i\hbar}H\right)|\alpha(t)\rangle$$
$$+ \langle\alpha(t)|\frac{\partial A}{\partial t}|\alpha(t)\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left(\langle\alpha(t)|AH-HA|\alpha(t)\rangle + \underbrace{\left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle_{\alpha(t)}}_{=0}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\alpha(t)|[A,H]|\alpha(t)\rangle}$$

si $A = X$: $\frac{d}{dt}\langle X\rangle = \frac{\langle P\rangle}{m}$ vitesse

si $A = P$: $\frac{d}{dt}\langle P\rangle = -\left\langle\frac{\partial V(X)}{\partial X}\right\rangle$ force.

A trois dimension : $\frac{d}{dt}\langle\vec{R}\rangle = \frac{\langle\vec{P}\rangle}{m}$; $\frac{d}{dt}\langle\vec{P}\rangle = \langle\vec{\nabla}_R V(X)\rangle$

3- Dans la discreption de Heisemberg :

la dependance en temps est continue dans les observables.

En effet dans cette description $|\alpha_H\rangle$ est un état fixe et

$A_H(t)$ depend du temps.

$$\langle A\rangle = \langle\alpha(t)|A|\alpha(t)\rangle = \langle\alpha(t_0)|U^+AU|\alpha(t_0)\rangle$$

$$= \langle\alpha(t)|A_H(t)|\alpha(t_0)\rangle$$

avec $A_H = U^+AU$. avec U est un vecteur unitaire

$$\frac{dA_H}{dt} = \left(\frac{d}{dt}U^+\right).AU + U^+\left(\frac{dA}{dt}\right)U + U^+A.\left(\frac{dU}{dt}\right)$$

U verifie : $i\hbar\frac{d}{dt}U = HU$ et $i\hbar\frac{d}{dt}U^+ = U^+H$

donc :
$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{-1}{i\hbar}U^+HAU + \frac{1}{i\hbar}U^+AHU + U^+\left(\frac{\partial A_H}{\partial t}\right)U$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dA_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}U^+(AH-HA)U + \left(\frac{\partial A_H}{\partial t}\right)_H$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left([A,H]\right)_H + \left(\frac{\partial A_H}{\partial t}\right)_H$$

4- $(X)_H$

L'observable X dans la representation de Heisenberg pour une particule libre : $H = \frac{P_x^2}{2m}$ $\rightarrow$ $U = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\frac{P^2}{2m}t\right)$

$U^+ = \exp\left(+\frac{i}{\hbar}\frac{P^2}{2m}t\right)$

$$(X_H) = U^+ X U = e^{\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} \cdot X \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t}$$

et on a : $[X, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t}] = \underbrace{[X, P]}_{i\hbar} \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{-i}{\hbar}\frac{t}{2m}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t}$

$$\Leftrightarrow X e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} - e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} X = \frac{pt}{m} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t}$$

$$\Rightarrow X e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} = \frac{pt}{m} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} + e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} X$$

donc : $(X_H) = e^{\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} \cdot \left(\frac{pt}{m} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} + e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} X\right)$

$$= \frac{pt}{m} + X$$

$$\Rightarrow \boxed{X_H = \frac{pt}{m} + X \quad \text{et} \quad P_H = P}$$

de même façon

Exercice 7 : Application des postulats :

à $t=0$ le système est dans l'état : $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{1}{2}|U_2\rangle + \frac{1}{2}|U_3\rangle$

$$\langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle = \sum_{i=1}^{3} |C_i|^2$$

1/ A $t=0$, on mesure l'énergie $\equiv$ l'Hamiltonien. les valeurs possibles de E = valeur propre H : $\hbar\omega_0 \to |U_1\rangle$ non dégénéré

$2\hbar\omega_0 \to \{|U_2\rangle ; |U_3\rangle\}$ 2 fois dégénéré : $P(\hbar\omega_0) = |\langle U_1|\Psi(0)|^2 = \frac{1}{2}$

$$P(2\hbar\omega_0) = \sum_{i=1}^{2} |\langle U_i|\Psi\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{2} |\langle U_2|\Psi\rangle|^2 + |\langle U_3|\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

* calcul de ΔH

Par définition l'écart quadratique moyen d'un observable A :

$$(\Delta A)^2_{|\Psi\rangle} = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 \Rightarrow \boxed{(\Delta H)^2_{|\Psi\rangle} = \langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2}$$

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H^2 = \hbar^2\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\langle H^2\rangle_{|\Psi\rangle} = \left(\langle\Psi|H^2|\Psi\rangle\right.$ avec $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{1}{2}|U_2\rangle + \frac{1}{2}|U_3\rangle$

$$H^2|\Psi\rangle = \hbar^2\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \hbar^2\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\langle\Psi|H^2|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hbar^2\omega_0^2/\sqrt{2} \\ 2\hbar^2\omega_0^2 \\ 2\hbar^2\omega_0^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\langle\Psi|H^2|\Psi\rangle = \frac{5}{2}\hbar^2\omega_0^2}$$

Autre méthode :

$$\langle H^2 \rangle = \sum a_n \mathcal{P}(a_n)$$

pour $H^2 \longrightarrow a_n = \hbar^2 \omega_0^2 \qquad 4\hbar^2\omega_0^2$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\mathcal{P}(a_n) = 1/2 \qquad 1/2$$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{1}{2}\hbar^2\omega_0^2 + \frac{4\hbar^2\omega_0^2}{2} = \frac{5}{2}\hbar^2\omega_0^2$$

calcul de $\langle H \rangle$:

$$\langle H \rangle = \sum E_n \mathcal{P}(a_n) = \hbar\omega_0 + 2\hbar\omega_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$$

L'ecart quadratique de H : $(\Delta H)^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$

$$\Leftrightarrow \quad (\Delta H)^2 = \frac{5}{2}\hbar^2\omega_0^2 - \frac{9}{4}\hbar^2\omega_0^2 = \frac{1}{4}\hbar^2\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta H = \frac{\hbar\omega_0}{2}}$$

2/-a) Au lieu de mesurer H on mesure A :

$$\text{Res}(\text{mes } A) = \{\text{VP de } A\}.$$

$$\text{VP de } A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a \text{ est valeur propre de } A$$

avec $\vec{VP}$. $|U_1\rangle$

on cherche alors les VP de la restriction de A. on se rencontre

par $|U_2\rangle$ et $|U_3\rangle$

soit $\bar{A}$ cette restriction : $\bar{A} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

VP de $\bar{A}$ tel que : $\det.(\bar{A} - \lambda \mathbb{1}) = 0$

$$\left|\begin{pmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = a \\ \lambda = -a \end{matrix}$$

soit $|a\rangle$ VP de $\bar{A}$ associé à la VP : a.

$|a\rangle = \alpha |U_2\rangle + \beta |U_3\rangle$

avec $\bar{A}|a\rangle = a|a\rangle$

$$a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \beta = \alpha \end{matrix}$$

$|a\rangle$ est normalisé. $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2 = \frac{1}{2}$

$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ à une facteur de phase près

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|U_3\rangle$$

soit. $|-a\rangle$. VP de $\bar{A}$ associé à la VP: $-a$.

$$\begin{cases} |-a\rangle = \alpha'|U_2\rangle + \beta'|U_3\rangle & \text{avec } |\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1 \\ \bar{A}|-a\rangle = -a|-a\rangle \Rightarrow a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = -a\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha' = -\beta' = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$|-a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|U_3\rangle$ est un facteur de phase près

En résume:

$$\text{Res}(\text{Mes } A) = \begin{cases} a & \text{2 fois dégénéré } |U_1\rangle ; |a\rangle \\ -a & \text{non dégénéré } |-a\rangle. \end{cases}$$

$$P(a) = \sum_{i=1}^{2} |\langle U_i|\psi\rangle|^2 = |\langle U_1|\psi\rangle|^2 + |\langle a|\psi\rangle|^2$$

$$= \frac{1}{2} + \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle U_2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle U_3|\right)|\psi(0)\rangle\right|^2$$

$$= \frac{1}{2} + \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle U_2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle U_3|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{1}{2}|U_2\rangle + \frac{1}{2}|U_3\rangle\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = 1$$

$$P(-a) = |\langle -a|\psi\rangle|^2 = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle U_2| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle U_3|\right)\left(\frac{1}{2}|U_1\rangle + \frac{1}{2}|U_2\rangle + \frac{1}{2}|U_3\rangle\right)\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = 0$$

-b/- Etat du système immédiatement après la mesure qui à donné comme VP a.

Puisque la probabilité de trouvé comme VP de A, a est 1

$\Rightarrow$ l'état du système immédiatement après cette mesure sera $|\Psi(0)\rangle$.

Retrouvons ce resultat à l'aide du postulat (5)

$\Rightarrow$ l'état du système immédiatement après la mesure qui a donné une valeur propre a sera projection normé en de engendré par les VP de A associé à la VP : a.

$$|\Psi'\rangle = \frac{P_n|\Psi(0)\rangle}{\underbrace{\sqrt{\langle P_n\rangle}}_{1 \text{ normé}}} \quad ; \quad P_n = |U_1\rangle\langle U_1| + |a\rangle\langle a|$$

$$= |U_1\rangle\langle U_1| + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|U_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|U_3\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle U_2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle U_3|\right)$$

$$\Rightarrow P_n|\Psi(0)\rangle = \Big(|U_1\rangle\langle U_1| + \frac{1}{2}\big(|U_2\rangle\langle U_2| + |U_2\rangle\langle U_3| + |U_3\rangle\langle U_2| + |U_3\rangle\langle U_3|\big)\Big)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{1}{2}|U_2\rangle + \frac{1}{2}|U_3\rangle\right)$$

$$P_n|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{1}{4}|U_2\rangle + \frac{1}{4}|U_2\rangle + \frac{1}{4}U_3 + \frac{1}{4}U_3\rangle$$

$$\Leftrightarrow |\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{1}{2}|U_2\rangle + \frac{1}{2}|U_3\rangle$$

3/- L'état du système à un instant :

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{1}{2}|U_2\rangle + \frac{1}{2}|U_3\rangle\right)$$

$$\Leftrightarrow |\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}{2}|U_2\rangle + \frac{e^{-\frac{iHt}{\hbar}}}{2}|U_3\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{|\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\omega_1 t}}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{e^{-i\omega_2 t}}{2}|U_2\rangle + \frac{e^{-i\omega_3 t}}{2}|U_3\rangle}$$

4/- on mesure à l'instant t :

$$\mathrm{Res}(\mathrm{Mes}\,A) = \{\text{VP de } A\} = \{a, -a\}$$

$$P(A \to a) = |\langle U_1 | \Psi(t)\rangle|^2 + |\langle a | \Psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2} + |\langle a | \Psi(t)\rangle|^2$$

on a : $|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |U_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |U_3\rangle$

$$\Rightarrow \langle a | \Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle U_2| + \langle U_3|\right)\left(\frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} |U_1\rangle + \frac{e^{-2i\omega t}}{2} |U_2\rangle + \frac{e^{-2i\omega t}}{2} |U_3\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{e^{-2i\omega t}}{2} + \frac{e^{-2i\omega t}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{-2i\omega t} = \frac{e^{-2i\omega t}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |\langle a | \Psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} P(a) = 1 \\ P(-a) = 0 \end{cases}$$

puisque le système est conservatif : $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) = 0$, on a la conservation.

<u>Exercice 6 :</u>

On considère un électron de masse m, plongé dans un puit de potentiel infini de largeur a : $\begin{cases} V(x) = 0 & \text{si } x \in [0, a] \\ V(x) = \infty & \text{si } x \notin [0, a] \end{cases}$

1/ a/ Equation de schrödinger

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right) \varphi_n(x) = E \varphi_n(x)$$

pour le puit de potentiel infini :

si $x \in [0, a] \Rightarrow \varphi_n(x)$ et E_n vérifient l'équation de schrödinger

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_n + E_n \varphi_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_n''(x) + \frac{2mE_n}{\hbar^2} \varphi_n(x) = 0 \qquad \text{on pose : } k_n^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \varphi_n''(x) + k^2 \varphi_n(x) = 0 \qquad \Rightarrow \varphi_n(x) = A \sin(k_n x + \phi_n)$$

si $x \notin [0,a]$: $V(x) = \infty$

la particule ne peut pas se trouver à l'extérieur du puit :

$$P = 0 = |\psi|^2 \Rightarrow \psi(x) = 0 \quad \text{si } x \notin [0,a]$$

$$\Rightarrow \varphi_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_n(a) = 0$$

si $\varphi_n(0) = 0 \Rightarrow A \sin\phi = 0$ et $A \neq 0 \Rightarrow \phi = 0$

$$\varphi_n(a) = 0 = A \sin ka \Rightarrow ka = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$$

donc : $\varphi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{a}$

$k = \frac{n\pi}{a}$ or : $k^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

determination de A :

la fonction d'onde est normée : $\int |\varphi_n(x)|^2 = 1 = \int_0^a A^2 \sin^2 \frac{n\pi}{a} dx$

$$\Rightarrow |A|^2 = \frac{1}{\int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx} \quad ; \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$\Rightarrow$ la fonction d'onde est : $\begin{cases} \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \\ E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2} \end{cases}$

Montrons que : $\{|\varphi_n\rangle\}$ sont orthogonale :

$\langle \varphi_{n'} | \varphi_n \rangle = 0$?

$$\langle \varphi_{n'} | \varphi_n \rangle = = \int \langle \varphi_{n'} | x \rangle \langle x | \varphi_n \rangle = \int_0^a \varphi_{n'}(x) \cdot \varphi_n(x) dx$$

$$= \frac{2}{a} \int \sin \frac{n'\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \delta_{nn'} = 0$$

si $n \neq n'$

2/- a) Calcul de $\langle p^2 \rangle$ sur un état $|\psi_n\rangle$

$$\langle p^2 \rangle = \langle \psi_n | p^2 | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | p \mathbb{1} p | \psi_n \rangle$$

$$= \int \langle \psi_n | p | x \rangle \langle x | p | \psi_n \rangle \, dx$$

$$= \int |\langle x | p | \psi_n \rangle|^2 dx = \int \left| \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi_n(x) \right|^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \langle p^2 \rangle = \hbar^2 \int_0^a \left| \frac{\partial}{\partial x} \psi_n(x) \right|^2 dx \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \psi_n(x) = \frac{n\pi}{a} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a}$$

$$\Leftrightarrow \langle p^2 \rangle = \frac{2n^2 \hbar^2 \pi^2}{a^3} \underbrace{\int_0^a \cos^2 \frac{n\pi x}{a} dx}_{= a/2}$$

$$\Leftrightarrow \langle p^2 \rangle = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{a^2}$$

donc la valeur moyenne de l'impulsion : $\boxed{\bar{p} = \sqrt{\langle p^2 \rangle} = \frac{\pi \hbar n}{a}}$

b/- temps caracteristique :

soit τ ce temps : la distance (aller-retour) $\rightarrow 2a = \bar{v} \tau$

$$\Leftrightarrow \tau = \frac{2a}{\bar{v}} \quad \Leftrightarrow \bar{p} = \frac{\pi \hbar n}{a} = m \bar{v}$$

$$\Leftrightarrow \bar{v} = \frac{\pi \hbar n}{m a} \Leftrightarrow \boxed{\tau = \frac{2 m a^2}{\pi \hbar n}}$$

3/- a/- la transition entre un état $n+1$ et n :

la transition est caractérisé par l'énergie d'un photon de frequence ν

tel que : $E_{n+1} - E_n = h\nu \Rightarrow \nu = \frac{E_{n+1} - E_n}{h}$

$$\Rightarrow E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \left((n+1)^2 - n^2 \right) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (2n+1)$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2 \hbar \times 2\pi} (2n+1) \times \frac{1}{2\pi\hbar} = \frac{\pi^2 \hbar (2n+1)}{4ma^2}$$

b) si n est grand $2n+1 \rightarrow 2n$ $\Rightarrow$ MQ $\rightarrow$ MC

Exercice 8 :

Un système physique formé par 2 particules (1) et (2). de même masse dans un puit de potentiel de largeur a.

Soit $H(1)$; $|\varphi_n(1)\rangle$ et E_n hamiltonien, état propre et energie de (1)

et $H(2)$; $|\varphi_q(2)\rangle$ et E_q hamiltonien, état propre et energie de (2)

Dans l'espace des états globale, on considère la base : $|\varphi_n \varphi_q\rangle = |\varphi_n\rangle \otimes |\varphi_q\rangle$

1/- Etat propre et valeur propres de H :

$$H = H(1) + H(2) \quad : \text{Hamiltonien total du système.}$$

Etat propres de H : $\left\{ |\varphi_n(1)\, \varphi_q(2)\rangle \right\}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$

la fonction d'onde qui verifie :

$$\varphi_{n,q}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{q\pi x}{a} = \frac{2}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{q\pi x}{a}$$

Energie du système formé par les deux particules :

$$H|\varphi_n \varphi_q\rangle = H_1 |\varphi_n \varphi_q\rangle + H_2 |\varphi_n \varphi_q\rangle$$

$$= \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} |\varphi_n \varphi_q\rangle + \frac{q^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} |\varphi_n \varphi_q\rangle = E_{nq} |\varphi_n \varphi_q\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{nq} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n^2 + q^2)}$$

l'état fondamental aura l'énergie E_{11} : $E_{11} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$ non dégénéré

1er état excité aura pour énergie $E_{12} = E_{21}$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{5}{2} \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2} \quad : 2 \text{ fois dégeneré.}$$

2/- On suppose à $t=0$ l'état du système :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |\varphi_1 \varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\varphi_1 \varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\varphi_2 \varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\varphi_2 \varphi_2\rangle$$

L'état du système à l'instant t.

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \cdot |\Psi(t_0)\rangle.$$

$$\Longleftrightarrow \quad |\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |\Psi(0)\rangle. \qquad t_0 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad |\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\left(\frac{1}{6}|\varphi_1\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_1\varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_2\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_1\varphi_2\rangle\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad |\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\varphi_1\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \cdot |\varphi_1\varphi_2\rangle + \cdots + \cdots$$

$$\Longleftrightarrow \quad |\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{11}t}|\varphi_1\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{12}t}|\varphi_1\varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{21}t}|\varphi_2\varphi_1\rangle$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{22}t}|\varphi_2\varphi_2\rangle.$$

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{i\hbar\pi^2 t}{ma^2}}|\varphi_1\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{i5\pi^2\hbar t}{2ma}}|\varphi_1\varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{i5\pi^2\hbar t}{2ma^2}} \cdot |\varphi_2\varphi_1\rangle$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{4i\pi^2 t}{ma^2}}|\varphi_2\varphi_2\rangle.$$

b/ $\mathrm{Res}(\text{mes } H) = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.

$$P(E_{11}) = |\langle\varphi_1\varphi_1|\Psi(0)\rangle|^2 = 1/6$$

$E_{12} = E_{21}$ est 2 fois dégénérée

$$P(E_{12}) = |\langle\varphi_1\varphi_2|\Psi(0)\rangle|^2 + |\langle\varphi_2\varphi_1|\Psi(0)\rangle|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$= P(E_{21})$$

$$P(E_{22}) = |\langle\varphi_2\varphi_2|\Psi(0)\rangle|^2 = 1/3$$

c/ $\mathrm{Res}(\text{mes de } H(1))$ seront E_1 ou E_2 :

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2 \cdot ma^2} \quad \text{ou} \quad E_2 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$$

$$P(E_1/1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \; ; \; P(E_2/1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Resultat de mesure de $H(2)$ lorsque le système est decrit par $|\Psi(0)\rangle$

$$\mathrm{Res}(\text{mes } H_2) = \left\{E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \; ; \; E_2 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}\right\}$$

$$P(E_1/2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \; ; \; P(E_2/2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

d) - montrons que $|\Psi(0)\rangle$ est un état produit tensoriel d'un état de la particule (1) par un état de la particule (2) :

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_1\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_1\varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_2\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_2\varphi_2\rangle$$

$$|\varphi_1\varphi_1\rangle = |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\varphi_1(2)\rangle \; ; |\varphi_1\varphi_2\rangle = |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\varphi_2(2)\rangle$$

$$|\varphi_2\varphi_1\rangle = |\varphi_2(1)\rangle \otimes |\varphi_2(1)\rangle \; ; |\varphi_2\varphi_2\rangle = |\varphi_2(2)\rangle \otimes |\varphi_2(2)\rangle$$

soit pour la particule (1) : $|\Psi(1)\rangle = |\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle$

soit pour la particule (2) : $|\Psi(2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_1(2)\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_2(2)\rangle$

$$|\Psi(1)\rangle \otimes |\Psi(2)\rangle = \left(|\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_1(2)\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_2(2)\rangle\right)$$

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_1\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_1\varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_2\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_2\varphi_2\rangle$$

$|\Psi(0)\rangle$ resulte du produit tensoriel d'un état associé à la particul (1) par un état associé à la particule (2)

$$\langle H_1\rangle = \langle\Psi(0)|H(1)|\Psi(0)\rangle = \sum E_n(1)\, P(E_n(1)).$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \langle H_1\rangle &= \frac{E_1}{2} + \frac{E_2}{2} = \frac{E_1+E_2}{2} \\ \langle H_2\rangle &= \frac{E_1}{3} + \frac{2E_2}{3} = \frac{E_1+2E_2}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle H(1)\rangle\langle H(2)\rangle = \frac{1}{6}(E_1+E_2)(E_1+2E_2)$$

$$\Rightarrow \langle H(1)\rangle\langle H(2)\rangle = \frac{E_1^2+3E_1E_2+2E_2^2}{6}$$

$$\langle H(1).H(2)\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\langle\varphi_1\varphi_2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\varphi_1\varphi_2| + \frac{1}{\sqrt{6}}\langle\varphi_2\varphi_1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\varphi_2\varphi_2|\right).$$

$$.H(1)H(2)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_1\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_1\varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_2\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_2\varphi_2\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\langle\varphi_1\varphi_1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\varphi_1\varphi_1| + \frac{1}{\sqrt{6}}\langle\varphi_2\varphi_1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\varphi_2\varphi_2|\right)\left(\frac{E_1 * E_2}{\sqrt{6}}|\varphi_1\varphi_1\rangle + \frac{E_1 \times E_2}{\sqrt{3}}|\varphi_1\varphi_2\rangle + \frac{E_2 \times E_1}{\sqrt{6}}|\varphi_2\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\varphi_2\varphi_2\rangle\right)$$

$$\Leftrightarrow \langle H(1)H(2)\rangle = \frac{E_1^2}{6} + \frac{E_1E_2}{3} + \frac{E_1E_2}{6} + \frac{E_2^2}{3} = \frac{E_1^2+3E_1E_2+2E_2^2}{6}$$

donc : $\boxed{\langle H(1)\rangle\langle H(2)\rangle = \langle H(1).H(2)\rangle}$

3/ - Montrons que si $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ système conservatif.

$\Rightarrow$ le résultat precedent reste valable à l'instant t.

4/ - On suppose que : $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|\varphi_1\varphi_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}|\varphi_1\varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\varphi_2\varphi_1\rangle$

$|\Psi'(0)\rangle$ ne contient pas $|\varphi_2\varphi_2\rangle \Rightarrow |\Psi'(0)\rangle$ ne peut pas se mettre sous la forme de produit tensoriel d'un état de la partiel (1) par un état de la particule (2).

$$\langle H(1)\rangle_{|\Psi'(0)\rangle} = ? \quad ; \quad \langle H(2)\rangle_{|\Psi'(0)\rangle} = ?$$

$$P(E_1/(1)) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \quad ; \quad P(E_2/(1)) = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \langle H(1)\rangle_{|\Psi(0)\rangle} = \frac{4E_1 + E_2}{5}$$

$$P(E_1/(2)) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \quad ; \quad P(E_2/(2)) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \langle H(2)\rangle_{|\Psi'(0)\rangle} = \frac{2E_1 + 3E_2}{5} \qquad \Rightarrow \langle H(1)\rangle\langle H(2)\rangle = \frac{4E_1+E_2}{5} \times \frac{2E_1+3E_2}{5}$$

$$P(E_1^2/H(1)H(2)) = \frac{1}{5} \quad ; \quad P(E_1 \times E_2/H(1)H(2)) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \langle H(1)H(2)\rangle = \frac{E_1^2 + 4E_1E_2}{5}$$

donc : $\boxed{\langle H(1)H(2)\rangle \neq \langle H(1)\rangle\langle H(2)\rangle}$

$\Rightarrow |\Psi'(0)\rangle$ est un état mélange statistique

<u>Exercice 9</u> :

1/ l'état du système à l'instant t :

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\sum_n c_n|\varphi_n\rangle = \sum c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\varphi_n\rangle = \sum c_n e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}|\varphi_n\rangle$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) > 2\hbar\omega \Rightarrow P(E>2\hbar\omega) = P(E_1, E_2 \ldots) = \sum_{i=2}^{n}|c_i|^2$$

$|\Psi(t)\rangle$ est normé $\Rightarrow \sum_{i=0}^{n}|c_i|^2 = 1 \Rightarrow \sum_{i=2}^{n}|c_i|^2 = 1 - |c_1|^2 - |c_0|^2$.

si $P = 0 \Rightarrow |c_1|^2 + |c_0|^2 = 1 \Rightarrow$ tout les c_i pour $i \geq 2$ sont nul sauf c_0 et c_1.

Rappel

1/ Determiner l'état du système à l'instant t:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\sum_n c_n|\varphi_n\rangle = \sum c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\varphi_n\rangle = \sum c_n e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}|\varphi_n\rangle$$

$E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) > 2\hbar\omega \Rightarrow n = 2,3,4 \ldots$

$$P(E \geq 2\hbar\omega) = P(E_2, E_3, \ldots)$$
$$= |\langle\varphi_2|\psi\rangle|^2 + |\langle\varphi_3|\psi\rangle|^2 + \ldots$$
$$= |C_2|^2 + |C_3|^2 + \ldots$$
$$= \sum_{i=2}^{n} |C_i|^2 \quad \text{et car } |\psi(t)\rangle \text{ est normé.}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} |C_i|^2 = 1 \Rightarrow |C_0|^2 + |C_1|^2 + \sum_{i=2}^{n}|C_i|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{n}|C_i|^2 = 1 - |C_0|^2 - |C_1|^2$$

si $P = 0 \Rightarrow 1 = |C_1|^2 + |C_0|^2$

tous les C_i pour $i > 2$ sont nuls sauf C_0 et C_1.

2/- a) On suppose C_0 et $C_1 \neq 0$:

$$|\psi(0)\rangle = C_0|\varphi_0\rangle + C_1|\varphi_0\rangle$$

calcul de $\langle X\rangle_{|\psi(0)\rangle}$

$$\langle X\rangle = \langle\psi(0)|X|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^+)|\psi(0)\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(C_0^*\langle\varphi_0| + C_1^*\langle\varphi_1|\right)(a+a^+)\left(C_0|\varphi_0\rangle + C_1|\varphi_1\rangle\right)$$

$$\Leftrightarrow \langle X\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}\left(C_0^*\langle\varphi_0| + C_1^*\langle\varphi_1|\right)\left(0 + C_1|\varphi_0\rangle + C_0|\varphi_1\rangle + C_1\sqrt{2}|\varphi_2\rangle\right)$$

$$\boxed{\langle X\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(C_0^*C_1 + C_1^*C_0\right)}$$

$$\langle P\rangle = \left(C_0^*\langle\varphi_0| + C_1^*\langle\varphi_1|\right)\left(\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a-a^+)\right)\left(C_0|\varphi_0\rangle + C_1|\varphi_1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(C_0^*\langle\varphi_0| + C_1^*\langle\varphi_1|\right)\left(0 + C_1|\varphi_0\rangle - C_0|\varphi_1\rangle - C_1\sqrt{2}|\varphi_2\rangle\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\langle P\rangle = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}\left(C_0^*C_1 - C_1^*C_0\right)}$$

~~et de la même manière~~

et $\boxed{\langle X\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(C_0^*C_1 + C_1^*C_0\right)}$

* Ecart quadratique ΔX et ΔP :

$$(\Delta X)^2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$$

on sait que : $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^+) \Rightarrow X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2 + a^{+2} + a^+a + aa^+)$

avec $[a, a^+] = 1 \Rightarrow X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2 + a^{+2} + 2N + 1)$

$$\Leftrightarrow \langle X^2\rangle = \left(C_0^*\langle\varphi_0| + C_1^*\langle\varphi_1|\right)\frac{\hbar}{2m\omega}(a^2 + a^{+2} + 2N+1)\left(C_0|\varphi_0\rangle + C_1|\varphi_1\rangle\right)$$

On a : $\begin{cases} a^2|\varphi_n\rangle = a(\sqrt{2}|\varphi_{n-1}\rangle) = \sqrt{n}\sqrt{n-1}\cdot|\varphi_{n-2}\rangle \\ a^{+2}|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,|\varphi_{n+2}\rangle. \end{cases}$

$$\langle X^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(C_0^*\langle\varphi_0| + C_1^*\langle\varphi_1|\right)\left(0 + 0 + 0 + \sqrt{2}C_0|\varphi_2\rangle + C_0|\varphi_0\rangle + 2C_1|\varphi_1\rangle + \sqrt{6}C_1|\varphi_3\rangle + C_1|\varphi_1\rangle\right)$$

$$\Leftrightarrow \langle X^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(C_0^*C_0 + 3C_1^*C_1\right) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(|C_0|^2 + |C_1|^2\times 3\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\Delta X)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\left(|C_0|^2 + 3|C_1|^2\right) - \left(C_0^*C_1 + C_1^*C_0\right)^2\right)}$$

$$(\Delta P)^2 = \langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2$$

on sait que : $P = \sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}(a - a^+) \Rightarrow P^2 = \frac{-\hbar\omega m}{2}(a-a^+)^2$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{-\hbar\omega m}{2}(a^2 + a^{+2} - 2N - 1)$$

$$\Rightarrow \langle P^2\rangle = \frac{-m\omega\hbar}{2}\left(C_0^*\langle\varphi_0| + C_1^*\langle\varphi_1|\right)(a^2 + a^{+2} - 2N - 1)\left(C_0|\varphi_0\rangle + C_1|\varphi_1\rangle\right)$$

$$\Leftrightarrow \langle P^2\rangle = \frac{m\omega\hbar}{2}\left(C_0^*\langle\varphi_0| + C_1^*\langle\varphi_1|\right)(2N+1)\left(C_0|\varphi_0\rangle + C_1|\varphi_1\rangle\right)$$

$$\Leftrightarrow \langle P^2\rangle = \frac{m\omega\hbar}{2}\left(|C_0|^2 + 3|C_1|^2\right)$$

donc : $(\Delta P)^2 = \frac{m\omega\hbar}{2}\left(|C_0|^2 + 3|C_1|^2 - \left(C_0^*C_1 - C_1^*C_0\right)^2\right)$

b). $\langle H\rangle$ sur $|\psi(0)\rangle$:

$$|\psi(0)\rangle = C_0 |\varphi_0\rangle + C_1 |\varphi_1\rangle .$$

les energie possibles sont : $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$; $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$

$$P\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right) = |C_0|^2 \quad ; \quad P\left(\frac{3}{2}\hbar\omega\right) = |C_1|^2$$

$$\langle H\rangle = |C_0|^2 \frac{\hbar\omega}{2} + 3|C_1|^2 \frac{\hbar\omega}{2} = \sum_n E_n P(E_n)$$

En suppose que : $\langle H\rangle = \hbar\omega$ et on suppose que $|\psi(0)\rangle$ est normée: $|C_0|^2 + |C_1|^2 = 1$

$$\langle H\rangle = \hbar\omega = \hbar\omega\left(\frac{|C_0|^2}{2} + \frac{3}{2}|C_1|^2\right) \Rightarrow |C_0|^2 + 3|C_1|^2 = 2$$

$$\begin{cases} |C_0|^2 = 1/2 \\ |C_1|^2 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta_0} \\ C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta_1} \end{cases}$$

3/- : C_0 est un réel positif $\Rightarrow \theta_0 = 0$ et on pose $C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta_1}$

on suppose que $\langle X\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$; calcul de θ_1:

$$\langle X\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(C_0^* C_1 + C_1^* C_0\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta_1}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\Rightarrow e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1} = \sqrt{2} \Rightarrow 2\cos\theta_1 = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \boxed{|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_0\rangle + \frac{e^{+i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle}$$

donc : $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\omega}{2}t}|\varphi_0\rangle + \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\omega t\right)}}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\omega t .$$

$$\langle X(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{e^{+i\frac{\omega t}{2}}}{\sqrt{2}}\langle\varphi_0| + e^{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\omega t\right)}\langle\varphi_1|\right)(a + a^+)\left(e^{-i\frac{\omega t}{2}}|\varphi_0\rangle + e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\omega t\right)}|\varphi_1\rangle\right)$$

$$\Leftrightarrow \langle X(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \omega t\right)} + \frac{1}{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{4} - \omega t\right)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\langle X(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \omega t\right)}$$

Autre méthode :

$$\langle X \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(C_0^* C_1 + C_1^* C_0 \right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{1}{2} e^{+i(\frac{\pi}{4} - \omega t)} + \frac{1}{2} e^{-i(\frac{\pi}{4} - \omega t)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\langle X \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \omega t\right)}$$

Exercice 10 :

Partie A : Oscillateur harmonique à 2 dimension :

Soumis au potentiel : $V(X, Y) = \frac{1}{2} m\omega^2 (X^2 + Y^2)$

on pose : $a_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}_x)$; $a_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Y} + i\hat{P}_y)$.

soit : $|\varphi_{n_x}\rangle$ état propre de $N_x = a_x^+ a$ de valeur propre : n_x

soit : $|\varphi_{n_y}\rangle$ état propre de $N_y = a_y^+ a$ de VP : n_y

soit : $|\varphi_{n_x}\varphi_{n_y}\rangle \equiv |\varphi_{n_x n_y}\rangle = |\varphi_{n_x}\rangle \otimes |\varphi_{n_y}\rangle$

1°/ Montrons que : H s'écrit en fonction de H_x et H_y.

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (X^2 + Y^2) \quad \text{avec} \quad P^2 = P_x^2 + P_y^2.$$

$$= \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (X^2 + Y^2) = \left(\frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2\right) + \left(\frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 Y^2\right)$$

$$= H_x + H_y \quad \text{avec} \begin{cases} H_x = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 \\ H_x = \hbar\omega\left(N_x + \frac{1}{2}\right) \end{cases} ; \begin{cases} H_y = \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 Y^2 \\ H_y = \hbar\omega\left(N_y + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{H = \hbar\omega(N_x + N_y + 1)}$$

2°/ Etat propre de H :

Etats propres de H seront : $|\varphi_{n_x}\varphi_{n_y}\rangle \equiv |\varphi_{n_x n_y}\rangle$

Energie propre : $H|\varphi_{n_x n_y}\rangle = \hbar\omega(N_x + N_y + 1)|\varphi_{n_x n_y}\rangle$

$$\Rightarrow H|\varphi_{n_x n_y}\rangle = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)|\varphi_{n_x n_y}\rangle = E_{n_x n_y}|\varphi_{n_x n_y}\rangle$$

$$\Rightarrow E_{n_x n_y} = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$$

on pose $n_x + n_y = n \Rightarrow \boxed{E_{n_x n_y} = \hbar\omega(n + 1)}$

L'énergie de l'état fondamental : $E_0 = \hbar\omega \rightarrow |\varphi_{00}\rangle$ non dégénéré

l'énergie de 1er état excité : $E_1 = 2\hbar\omega \rightarrow |\varphi_{01}\rangle, |\varphi_{10}\rangle$ 2fois dégénéré

l'énergie de 2ème état excité : $E_2 = 3\hbar\omega \rightarrow |\varphi_{12}\rangle ; |\varphi_{02}\rangle$ et $|\varphi_{20}\rangle$ 3 fois dégénéré.

L'énergie de la $n^{ième}$ état excité : $E_n = (n+1)\hbar\omega$

$\rightarrow |\varphi_{0n}\rangle ; |\varphi_{1,n-1}\rangle ; |\varphi_{2,n-2}\rangle ; \cdots ; |\varphi_{n,0}\rangle$

L'énergie E_n est $(n+1)$ fois dégénéré.

$n = n_x + n_y$: $\underbrace{(0,n) ; (1,n-1) ; (2,n-2) ; \cdots ; (n-1;1)}_{(n+1) \text{ posibilité pour } (n_x ; n_y) \text{ telque } : n = n_x + n_y} ; (n,0)$

• un ECOC dans l'espace des états :

A une dimension : $\{H\}$ forme un ECOC (toutes les VP de H sont non dégénéré).

A deux dimension : $\{H\}$ ne forme pas un ECOC (car, il existe des valeur dégénéré).

$\{H_x ; H_y\}$; $[H_x, H_y] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} H_x |\varphi_{n_x n_y}\rangle = \hbar\omega(n_x + \frac{1}{2}) |\varphi_{n_x n_y}\rangle \\ H_y |\varphi_{n_x n_y}\rangle = \hbar\omega(n_y + \frac{1}{2}) |\varphi_{n_x n_y}\rangle \end{cases}$

pour $\{H_x, H_y\}$ il ensemble des VP $\{n_x ; n_y\}$ correspondant à un seul état : $|\varphi_{n_x n_y}\rangle \Rightarrow \{H_x, H_y\}$ est un ECOC.

3/ à $t=0$ l'état de la particule : $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_{00}\rangle + |\varphi_{01}\rangle)$

calcul de $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}(|\psi(0)\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)|\varphi_{00}\rangle + \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)|\varphi_{01}\rangle\right)$

$\Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-i\omega t)|\varphi_{00}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-2i\omega t)|\varphi_{01}\rangle}$

$$\mathcal{P}(E < 2\hbar\omega) = \mathcal{P}(E = \hbar\omega) = |\langle \varphi_{00} | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{P}(E \leq 2\hbar\omega) = \mathcal{P}(E = \hbar\omega) + \mathcal{P}(E = 2\hbar\omega) = |\langle \varphi_{00} | \psi \rangle|^2 + |\langle \varphi_{10} | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

4°/- On introduit les operateur : $a_d = (a_x - i a_y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $a_g = (a_x + i a_y) \frac{1}{\sqrt{2}}$

Mq : $|\varphi_{00}\rangle$; $|d\rangle = a_d^+ |\varphi_{00}\rangle$; $|g\rangle = a_g^+ |\varphi_{00}\rangle$.

* calcul de : $|d\rangle$: $|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^+ + i a_y^+) |\varphi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a_x^+ |\varphi_{00}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} a_y^+ |\varphi_{00}\rangle$.

$$\Leftrightarrow \boxed{|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_{10}\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |\varphi_{01}\rangle}$$

* calcul de : $|g\rangle$: $|g\rangle = a_g^+ |\varphi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - i a_y)$

$$\boxed{|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_{10}\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |\varphi_{01}\rangle}$$

$$H|\varphi_{00}\rangle = \hbar\omega |\varphi_{00}\rangle$$

$$H|d\rangle = H\left(\frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_{01}\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |\varphi_{10}\rangle\right) = \frac{2\hbar\omega}{\sqrt{2}} |\varphi_{01}\rangle + \frac{2i\hbar\omega}{\sqrt{2}} |\varphi_{10}\rangle$$

$$= 2\hbar\omega |d\rangle \Rightarrow E_d = 2\hbar\omega$$

$$H|g\rangle = 2\hbar\omega \Rightarrow E_g = 2\hbar\omega$$

$$\langle d | \varphi_{00}\rangle = \langle \varphi_{00} | d\rangle = 0 \; ; \; \langle g | \varphi_{00}\rangle = \langle \varphi_{00} | g\rangle = 0$$

$$\langle d | g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle \varphi_{10}| - i \langle \varphi_{01}|\right)\left(\frac{1}{2}\left(|\varphi_{10}\rangle - i|\varphi_{01}\rangle\right)\right) = \frac{1}{2}(1 + i^2) = 0$$

<u>Partie B</u> : Dans l'espace à 3 dimension :

L'energie à 3 dimension de la particule : $E = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$

1°/- L'hamiltonien H de cette particule :

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \quad \begin{cases} P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 \\ R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \end{cases}$$

$$H = \left(\frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2\right) + \left(\frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 Y^2\right) + \left(\frac{P_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 Z^2\right)$$

$$= H_x + H_y + H_z = \hbar\omega (N_x + N_y + N_z + 3/2)$$

2/. Etat propre et energie propres de H :

$$H = H_x + H_y + H_z$$

Etats propres de H sont : $|\varphi_{n_x}\rangle \otimes |\varphi_{n_y}\rangle \otimes |\varphi_{n_z}\rangle = |\varphi_{n_x n_y n_z}\rangle$

$\{|\varphi_{n_x}\rangle\}$ état propres de $H_x \rightarrow \hbar\omega(n_x + 1/2)$

$\{|\varphi_{n_y}\rangle\}$ état propres de $H_y \rightarrow \hbar\omega(n_y + 1/2)$

$\{|\varphi_{n_z}\rangle\}$ état propres de $H_z \rightarrow \hbar\omega(n_z + 1/2)$

$$H = H_x|\varphi_{n_x n_y n_z}\rangle + H_y|\varphi_{n_x n_y n_z}\rangle + H_z|\varphi_{n_x n_y n_z}\rangle = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)|\varphi_{\substack{n_x\\n_y\\n_z}}\rangle$$

On pose : $n = n_x + n_y + n_z \Rightarrow E_n = \hbar\omega(n + 3/2)$

l'energie de l'état fondamental : $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega \rightarrow |\varphi_{000}\rangle$

- Energie du 1er état exité : $E_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega \rightarrow |\varphi_{100}\rangle ; |\varphi_{010}\rangle ; |\varphi_{001}\rangle$
- Energie du 2ème etat exité : $E_2 = \frac{7}{2}\hbar\omega \rightarrow |\varphi_{110}\rangle ; |\varphi_{101}\rangle ; |\varphi_{011}\rangle$
  $|\varphi_{020}\rangle ; |\varphi_{200}\rangle ; |\varphi_{002}\rangle$

$\{H\}$ ne forme pas à lui un seul ECEC.

$\{H_x ; H_y\}$ ne forme pas un ECOC.

$\{H_x, H_y ; H_z\}$ forme un ECOC.

3/ degré de dégénérance de $n^{ième}$ niveau exité :

On cherche (n_x, n_y, n_z) tel que $n_x + n_y + n_z = n \Rightarrow n_y + n_z = n - n_x$

On fixe n_x ; on cherche le nombre de couple (n_y, n_z) : $(n_y, n_z) = (n - n_x ; 0)$

$(n - n_x - 1 ; 1) ; (n - n_x - 2, 2) - - - ; (0, n - n_x)$

il y a $(n - n_x + 1)$ façon décrire $(n_y ; n_z)$ tel que : $n_y + n_z = n - n_x$

le nombre de façon pour les triplets (n_x, n_y, n_z) tel que $n_x + n_y + n_z = n$.

$$g_n = \sum_{n_x=0}^{n} (n - n_x + 1)$$

$$= (n+1) + (n+1) - 1 + (n+1) - 2 + (n+1) \cdots$$

$$= (n+1)(n+1) - n$$

$$= (n+1)(n+1 - n/2) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

4/- Relation entre le $n^{\text{ième}}$ état et l'état fondamental.

A une dimension : $|\varphi_n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_0\rangle$

A trois dimension : $|\varphi_n\rangle = |\varphi_{n_x}\rangle \otimes |\varphi_{n_y}\rangle \otimes |\varphi_{n_z}\rangle$

avec $n = n_x + n_y + n_z$.

$$|\varphi_{n_x}\rangle = \frac{(a_x^+)^{n_x}}{\sqrt{n_x!}} |\varphi_{0x}\rangle ; \quad |\varphi_{n_y}\rangle = \frac{(a_y^+)^{n_y}}{\sqrt{n_y!}} |\varphi_{0y}\rangle ; \quad |\varphi_{n_z}\rangle = \frac{(a_z^+)^{n_z}}{\sqrt{n_z!}} |\varphi_{0z}\rangle$$

$$\Longrightarrow |\varphi_{n_x, n_y, n_z}\rangle = \frac{(a_x^+)^{n_x} \cdot (a_y^+)^{n_y} \cdot (a_z^+)^{n_z}}{\sqrt{n_x!\, n_y!\, n_z!}} |\varphi_{000}\rangle .$$

Exercice 11

Soit $|\varphi_n\rangle$ état propre d'un oscillateur harmonique.

on pose : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

1/- on donne $|\varphi_\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle$; α scalaire.

Mq : $|\varphi_\alpha\rangle$ VP de a avec la VP α.

$\Longleftrightarrow$ $a |\varphi_\alpha\rangle = \alpha |\varphi_\alpha\rangle$.

$$a|\varphi_\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} a|\varphi_n\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n \sqrt{n}}{\sqrt{n!}} |\varphi_{n-1}\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \alpha \sum_n \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{n-1}} |\varphi_{n-1}\rangle = \alpha \underbrace{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{n-1}} |\varphi_{n-1}\rangle}_{= |\varphi_\alpha\rangle}$$

$\Rightarrow a|\varphi_\alpha\rangle = \alpha|\varphi_\alpha\rangle$.

2/- $t=0$; $|\psi(0)\rangle = |\varphi_\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle$

$\Rightarrow$ Valeur de l'énergie possible sont $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$

$$P(E_n) = |\langle\varphi_n|\varphi_\alpha\rangle|^2 = \left| e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right|^2$$

$$\Leftrightarrow P(E_n) = \frac{e^{-|\alpha|^2} \cdot \alpha^{2n}}{n!}$$

Etat du système à l'instant t :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\varphi_\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \cdot \sum_n \frac{\alpha^2}{\sqrt{n!}} \exp(-i\omega(n+1/2)t)|\varphi_n\rangle$$

3/- Dans un intervalle $[0,\tau]$; $\tau \ll 1$ on applique : $V = \hbar\Omega N^2$
$N = a^+a$

$N|\varphi_n\rangle = n|\varphi_n\rangle$ on suppose $\Omega \gg \omega$

$\Rightarrow$ pendant $[0,\tau]$ $H+V \sim V$. Mq : $|\varphi_n\rangle$ VP de V

$V|\varphi_n\rangle = \hbar\Omega N^2|\varphi_n\rangle = \hbar\omega\Omega n^2|\varphi_n\rangle$.

$\Rightarrow |\varphi_n\rangle$ est VP de V avec la VP $\hbar\Omega n^2$

4/- Pendant $[0,\tau]$ l'oscillateur est soumis à $V \Rightarrow$ L'hamiltonien du système : $H+V=V \Rightarrow |\psi(\tau)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}V\tau}|\psi(0)\rangle$.

$$|\psi(\tau)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}V\tau} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi(\tau)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp - i\Omega n^2\tau \, |\varphi_n\rangle.$$

5/- $|\psi(\tau)\rangle$ pour $\tau = \frac{\pi}{2\Omega}$: $|\psi(\tau)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(\frac{-i\Omega n^2}{2\Omega}\right)|\varphi_n\rangle$

$$|\psi(\tau)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp - in\frac{\pi}{2} |\varphi_n\rangle$$

Mq : $|\psi(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)|\varphi_\alpha\rangle + \exp\left(+\frac{i\pi}{4}\right)|\varphi_\alpha\rangle\right)$

si n est pair : $\exp\left(-\frac{i\pi n^2}{2}\right) = 1$

si n est impaire : $n = 2p+1$: $\exp\left(\frac{-i\pi n^2}{2}\right) = -i$

Cette condition est verifié en rassemblant en equation suivante

$$\exp -\frac{i\pi n^2}{2} = \frac{1}{2}\left((1-i) + (1)^n(1+i)\right)$$

$$\exp\left(\frac{-i\pi n^2}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\pi/4} + (-1)^n e^{i\pi/4}\right)$$

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{-i\pi/4} \quad ; \quad \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$$

$$|\psi(\tau)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\frac{-in^2\pi}{2} |\varphi_n\rangle$$

$$= \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2}} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left(e^{-i\pi/4} + (-1)^n e^{-i\pi/4}\right)|\varphi_n\rangle$$

$$= \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle + (-1)^n \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle$$

$$= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} |\varphi_\alpha\rangle + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{(-\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{+i\pi/4}|\varphi_\alpha\rangle + e^{i\pi/4}|\varphi_\alpha\rangle\right)$$

Exercice 14 :

On considère une particule sans spin de moment cinétique orbital l

dans $|l,m\rangle$ de L^2 et L_z : $\begin{cases} L^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|lm\rangle \\ L_z|l,m\rangle = m\hbar|l,m\rangle \end{cases}$

1/ calcul des états de matrice de L^2 :

$$\langle l'm'|L^2|lm\rangle = \hbar^2 l(l+1)\langle l'm'|lm\rangle = \hbar^2 l(l+1)\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

élément de matrice de L_z :

$$\langle l'm'|L_z|lm\rangle = m\hbar\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

élément de matrice pour $L_\pm$:

$$\langle l'm' | L_\pm | lm \rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\, \delta_{ll'} \cdot \delta_{mm'}$$

élément de matrice de L_x : $L_x = \dfrac{L_+ + L_-}{2}$

$$\langle l'm' | L_x | lm \rangle = \frac{\hbar}{2}\left[\sqrt{l(l+1) - m(m+1)} + \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\right] \cdot \delta_{ll'}\delta_{mm'\pm 1}$$

élément de matrice de L_y : $L_y = \dfrac{L_+ - L_-}{2i}$

$$\langle l'm' | L_y | lm \rangle = \frac{\hbar}{2i}\left[\sqrt{l(l+1) - m(m+1)} - \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\right] \delta_{ll'}\delta_{mm'\pm 1}$$

2/ Valeur moyenne de L_x et L_y sur un état $|l, m\rangle$

$$\langle L_x \rangle = \langle lm | L_x | lm \rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\, \delta_{ll}\delta_{m,m+1} + \sqrt{\cdots}\, \delta_{ll'}\delta_{m,m-1}\right)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \langle L_y \rangle = \langle lm | L_y | lm \rangle = 0$$

- calcul de $\Delta L_x^2 = \langle L_x^2 \rangle - \langle L_x \rangle^2 = \langle L_x^2 \rangle$.

$$L_x^2 = \frac{(L_+ + L_-)^2}{4} = \frac{L_+^2 + L_-^2 + L_+L_- + L_-L_+}{4}$$

$$\Rightarrow \langle L_x^2 \rangle = \frac{\langle L_+^2 \rangle + \langle L_-^2 \rangle + \langle (L_+L_-) \rangle + \langle (L_-L_+) \rangle}{4}$$

$\Leftrightarrow$ • $\langle L_+^2 \rangle = \langle lm | L_+L_+ | lm \rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\, \langle lm | L_+ | l_{m+1} \rangle$

$$= \hbar^2\sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \cdot \sqrt{l(l+1) - (m+1)(m+2)}\, \delta_{ll}\delta_{m,m+2} = 0$$

• $\langle L_-^2 \rangle = (\cdots)\, \delta_{ll} \cdot \delta_{m,m-2} = 0$

• $\langle L_+L_- \rangle = \langle lm | L_+L_- | lm \rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\, \langle lm | L_+ | l_{m-1} \rangle$

$$\langle L_+L_- \rangle = \hbar^2\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\sqrt{l(l+1) - (m-1)m} \cdot \delta_{ll'}\delta_{mm}$$

$$\langle L_+L_- \rangle = \hbar^2(l(l+1) - m(m-1))$$

• $\langle L_- L_+ \rangle = \langle lm | L_- L_+ | lm \rangle = | L_+ | lm \rangle |^2$

$$\Rightarrow \langle L_- L_+ \rangle = \hbar^2 \left(l(l+1) - m(m+1) \right)$$

donc : $\langle L_x^2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\hbar^2 \left(2l(l+1) - 2m^2 \right) \right)$.

$$\Rightarrow \boxed{\Delta L_x^2 = \langle L_x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \left(l(l+1) - m^2 \right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left(l(l+1) - m^2 \right)^{1/2}}$$

- calcul de $(\Delta L_y)^2 = \langle L_y^2 \rangle - \langle L_y \rangle^2 = \langle L_y^2 \rangle$.

$$L_y^2 = -\frac{1}{4} \left(L_+^2 + L_-^2 - L_+ L_- - L_- L_+ \right)$$

$$\Rightarrow \langle L_y^2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\underbrace{\langle L_+^2 \rangle}_{0} + \underbrace{\langle L_-^2 \rangle}_{0} - \langle L_+ L_- \rangle - \langle L_- L_+ \rangle \right)$$

$$\Leftrightarrow \langle L_y^2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\langle L_+ L_- \rangle + \langle L_- L_+ \rangle \right).$$

$$\Leftrightarrow (\Delta L_y)^2 = \frac{\hbar^2}{2} \left(l(l+1) - m^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left(l(l+1) - m^2 \right)^{1/2}}$$

3/- On considère que $l = 1$; $m = 1, 0, -1$: element de matrice L^2

Les elements de la base $|1,1\rangle$; $|1,0\rangle$; $|1,-1\rangle$:

$$L^2 |1,1\rangle = 2\hbar^2 |1,1\rangle \; ; \quad L^2 |1,0\rangle = 2\hbar |1,0\rangle.$$

$$L |1,-1\rangle = 2\hbar^2 |1,-1\rangle.$$

$$M_{L^2} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} |1,1\rangle & |1,0\rangle & |1,-1\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2\hbar^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar^2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} |1,1\rangle \\ |1,0\rangle \\ |1,-1\rangle \end{array} = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et : $L_z |1,1\rangle = \hbar |1,1\rangle$; $L_z |1,0\rangle = 0$.

$$L_z |1,-1\rangle = -\hbar |1,-1\rangle.$$

$$M_{L_z} = \begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

element de matrice L_+ et L_- :

$L_+|1,1\rangle = \hbar\sqrt{2-2} = 0$; $L_+|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,1\rangle$; $L_+|1,-1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0\rangle$

$$M_{L_+} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0\rangle$; $L_-|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,-1\rangle$; $L_-|1,-1\rangle = 0$

$$M_{L_-} = \begin{pmatrix} \hbar\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

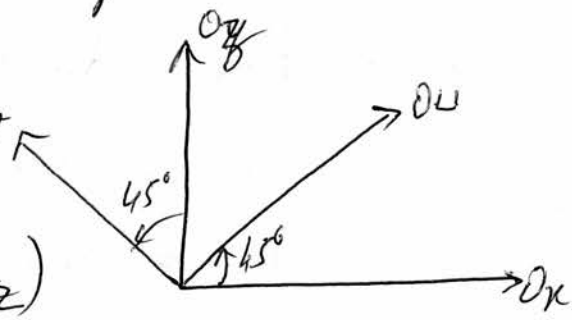
$$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2} \Rightarrow M_{L_x} = \frac{1}{2}(M_{L_+} + M_{L_-}) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_y = \frac{L_+ - L_-}{2i} \Rightarrow M_{L_y} = \frac{1}{2i}(M_{L_+} - M_{L_-}) = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{L_y} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

4/- La particule est soumise à un potentiel l'hamiltonien : $H_0 = \frac{\omega_0}{\hbar}(L_u^2 - L_v^2)$

L_u et L_v composantes de L dans le plan xOz du direction Ov et Ou à $45°$ au Ox et Oz.



$L_u = \cos 45° . L_x + \sin 45° L_z = \frac{\sqrt{2}}{2}(L_x + L_z)$

$L_v = -\sin 45° L_x + \cos 45° L_z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-L_x + L_z)$

$$\left.\begin{aligned} (L_u)^2 &= \frac{1}{2}(L_x^2 + L_z^2 + L_x L_z + L_z L_x) \\ (L_v)^2 &= \frac{1}{2}(L_x^2 + L_z^2 - L_x L_z - L_z L_x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow H_0 = \frac{\omega_0}{\hbar}(L_x L_z + L_z L_x)$$

calculons les elements de matrice H_0 dans : $\{|1,1\rangle ; |1,0\rangle ; |1,-1\rangle\}$

$$\left.\begin{array}{l} L_x L_z |1,1\rangle = \hbar L_x |1,1\rangle = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}} |1,0\rangle \\ L_z L_x |1,1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} L_z |1,0\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow H_0 |1,1\rangle = \frac{\sqrt{2}\hbar\omega_0}{2} |1,0\rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x L_z |1,0\rangle = 0 \\ L_z L_x |1,0\rangle = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}} |1,1\rangle - \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}} |1,-1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow H_0 |1,0\rangle = \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} |1,1\rangle - \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} |1,-1\rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x L_x |1,-1\rangle = -\hbar L_x |1,-1\rangle = -\frac{\hbar^2}{\sqrt{2}} |1,0\rangle \\ L_z L_x |1,-1\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow H_0 |1,-1\rangle = -\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} |1,0\rangle.$$

donc la matrice qui represente H_0 : $M_{H_0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{M_{H_0} = \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

5/ Niveaux d'energie $\Rightarrow$ ce sont les valeurs propre.

soit λ valeurs propres de H_0 : $\det(H_0 - \lambda \mathbb{1}) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & -\lambda & -\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda\left(+\lambda^2 - \frac{\hbar^2\omega_0^2}{2}\right) + \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}\left(-\lambda \cdot \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - \hbar^2\omega^2) = 0$$

donc : $\lambda = 0$; $\lambda = +\hbar\omega_0$; $\lambda = -\hbar\omega_0$.

Etat propre : soit $|\varepsilon_1\rangle$ VP de H associe à $\hbar\omega$:

$$|\varepsilon_1\rangle = \alpha_1 |1\rangle + \beta_1 |0\rangle + \gamma_1 |-1\rangle$$

$|\varepsilon_1\rangle$ est normé $\Rightarrow |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 + |\gamma_1|^2 = 1$

$$H|\varepsilon_1\rangle = \hbar\omega |\varepsilon_1\rangle \Leftrightarrow H|\varepsilon_1\rangle = \hbar\omega \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\beta_1}{\sqrt{2}} = \alpha_1 \\ \alpha_1 - \gamma_1 = \sqrt{2}\beta_1 \\ -\beta_1 = \gamma_1\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{2}}$$

$$|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 + |\gamma_1|^2 = \frac{\beta_1^2}{2} + \beta_1^2 + \frac{\beta_1^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_1^2 = 1/2 \Rightarrow \beta_1 = 1/\sqrt{2}. \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \gamma_1 = -1/2$$

$$\Rightarrow \boxed{|\varepsilon_1\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{2}|-1\rangle}$$

soit $|\varepsilon_2\rangle$ état propre de H avec VP 0.

$$|\varepsilon_2\rangle = \alpha_2|1\rangle + \beta_2|0\rangle + \gamma_2|-1\rangle$$

$$|\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 + |\gamma_2|^2 = 1.$$

$$\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \beta_2 = 0.$$

$$\alpha_2 - \gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = \alpha_2$$

$$\Rightarrow \boxed{|\varepsilon_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle}.$$

soit $|\varepsilon_3\rangle$ VP de H avec la VP $-\hbar\omega$:

$$|\varepsilon_3\rangle = \alpha_3|1\rangle + \beta_3|0\rangle + \gamma_3|-1\rangle$$

$$\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = -\hbar\omega\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_3 = -\alpha_3 \; ; \quad \alpha_3 - \gamma_3 = -\sqrt{2}\,\beta_3 \; ; \; -\beta_3 = \sqrt{2}\,\gamma_3$$

$$\alpha_3 = -\gamma_3. \Rightarrow \alpha_3 = -\gamma_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_3$$

$$|\alpha_3|^2 + |\beta_3|^2 + |\gamma_3|^2 = \frac{\beta_3^2}{2} + \beta_3^2 + \frac{\beta_3^2}{2} = 1 \Rightarrow \beta_3 = 1/\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = -1/2 \; ; \quad \gamma_2 = 1/2$$

$$\Rightarrow \boxed{|\varepsilon_3\rangle = -\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}|-1\rangle}.$$

6/ – A l'instant $t=0$: $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |-1\rangle)$.

L'état du système à l'instant t $\quad |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle$.

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{\frac{iH}{\hbar}t}|\varepsilon_2\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\times 0\times t}|\varepsilon_2\rangle = |\psi(0)\rangle.$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_2\rangle = |\psi(0)\rangle$$

si $|\Psi'(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |-1\rangle\right)$

il faut chercher ; $|1\rangle$; $|0\rangle$, $|-1\rangle$ de $|\varepsilon_1\rangle$; $|\varepsilon_2\rangle$; $|\varepsilon_3\rangle$

$$\begin{cases} |\varepsilon_1\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{2}|-1\rangle \\ |\varepsilon_2\rangle = \frac{1}{2}\left(|1\rangle + |-1\rangle\right) \\ |\varepsilon_3\rangle = -\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}|-1\rangle \end{cases}$$

$$|\varepsilon_1\rangle - |\varepsilon_3\rangle = |1\rangle - |-1\rangle$$

$$|\Psi'(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |-1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varepsilon_1\rangle - |\varepsilon_3\rangle\right)$$

$$\Rightarrow |\Psi'(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\varepsilon_1\rangle - e^{-\frac{iH}{\hbar}t}|\varepsilon_3\rangle\right)$$

$$|\Psi'(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}|\varepsilon_1\rangle - e^{i\omega t}|\varepsilon_3\rangle\right)$$

or : $\begin{cases} |\varepsilon_1\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{2}|-1\rangle \\ |\varepsilon_3\rangle = -\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}|-1\rangle \end{cases}$

$$\Rightarrow |\Psi'(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}\left(\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{2}|-1\rangle\right) - e^{i\omega t}\left(\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}|-1\rangle\right)\right)$$

$$|\Psi'(t)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\omega t\,|1\rangle - i\sqrt{2}\sin\omega t\,|0\rangle - \cos\omega t\,|-1\rangle\right)$$

Exercice 15 :

On considère un système quantique sans spin.

le moment cinétique orbital $\vec{L}$; on considère la base $|lm\rangle$

formé par les VP L^2 et L_z.

1/ Exprimer L_+L_- et L_-L_+ en fonction de L^2 et L_z :

$$L_+L_- = (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) = L_x^2 + L_y^2 + i(L_yL_x - L_xL_y)$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z \Rightarrow L_x^2 + L_y^2 = L^2 - L_z^2$$

$$L_+L_- = L^2 - L_z^2 + i[L_yL_x] = L^2 - L_z^2 + i(-i\hbar L_z)$$

$$\Rightarrow L_+L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$$

$$L_-L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$$

En déduit que $L_\pm |lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-(m\pm1)}\,|l,m\pm1\rangle$

D'après le lemme : si $|lm\rangle$ est $\vec{VP}$ de L^2 et L_z

$\Rightarrow L_\pm |lm\rangle$ sont $\vec{VP}$ de L^2 et L_z avec les VP $\hbar l(l+1)$ et $\hbar(m\pm1)$

$\Leftrightarrow L_\pm |lm\rangle = C_\pm |l, m\pm1\rangle \Leftrightarrow \| L_\pm |lm\rangle\|^2 = |C_\pm|^2$

et on a : $\| L_\pm |lm\rangle\|^2 = \langle lm| L_\mp L_\pm |lm\rangle = \langle lm| L^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z |lm\rangle$

$$= \langle lm| \hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 (m^2 \pm m) |lm\rangle$$

$$= \hbar^2 (l(l+1) - m(m\pm1))$$

$$\Rightarrow C_\pm = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}$$

$$\Rightarrow L_+ |lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+m)-m(m\pm1)}\,|lm\pm1\rangle$$

$$L_+|lm\rangle \longrightarrow L_-L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$$

$$L_-|lm\rangle \longrightarrow L_+L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$$

2/- a/- Matrice représentant L^2 :

$$\left.\begin{aligned} L^2|1,1\rangle &= 2\hbar^2|1,1\rangle \\ L^2|1,0\rangle &= 2\hbar^2|1,0\rangle \\ L^2|1,-1\rangle &= 2\hbar|1,-1\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_{L^2} = 2\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} L_z|1,1\rangle &= \hbar|1,1\rangle \\ L_z|1,0\rangle &= 0|1,0\rangle = 0 \\ L_z|1,-1\rangle &= -\hbar|1,-1\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_{L_z} = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} L_+|1,1\rangle &= \hbar\sqrt{0}|\,\rangle = 0 \\ L_+|1,0\rangle &= \hbar\sqrt{2}\,|1,1\rangle \\ L_+|1,-1\rangle &= \hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_{L_+} = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & +i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \beta_2 = 0 \text{ et } \alpha_2 = \gamma_2$$

$$\Rightarrow |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |-1\rangle\right)$$

$*$ $|-\hbar\rangle = \alpha_3|1\rangle + \beta_3|0\rangle + \gamma_3|-1\rangle$ ..$\sqrt{}$ Associé à la VP $-\hbar$

et $|\alpha_3|^2 + |\beta_3|^2 + |\gamma_3|^2 = 1$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = -\hbar\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-i}{\sqrt{2}}\beta_3 = -\alpha_3 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha_3 - \gamma_3) = -\beta_3 \\ +\frac{i}{\sqrt{2}}\beta_3 = -\gamma_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |-\hbar\rangle = \frac{i}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{2}|-1\rangle$$

3/ Ce système est un noyau atomique soumis à un champ $\vec{B}$ selon la direction unitaire $u(\sin\theta\cos\varphi ; \sin\theta\sin\varphi ; \cos\theta)$

On suppose que $\gamma < 0$ et on pose : $\omega = -\gamma B_1$

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} \quad \text{avec : } \mu = \gamma\vec{I} \Rightarrow H = -\gamma\vec{J}\cdot\vec{B_1} = -\gamma B_1 \vec{J}\cdot\vec{U}.$$

$$\Rightarrow H = \omega\left(J_x \sin\theta\cos\varphi + J_y \sin\theta\sin\varphi + J_z\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow H = \omega\cdot\left(\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\sin\theta\sin\varphi + \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow H = \omega\hbar\begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta\cos\varphi - i\sin\theta\sin\varphi & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta(\cos\varphi + i\sin\theta)) & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

donc : $M_H = \hbar\omega \begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} & 0 \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & 0 & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ 0 & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$

b - les energies propres :

les valeurs propres $\Rightarrow \det(M_H - \lambda \mathbb{I}) = 0$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} & 0 \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & -\lambda & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \\ 0 & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\cos\theta - \lambda)\left[+\lambda(\cos\theta + \lambda) - \frac{\sin^2\theta}{2} \quad \ldots \right] = 0$$

$\lambda = 1, 0, -1$. sont les valeurs propres multiplié par $\hbar\omega$

$\Rightarrow VP = \{\hbar\omega ; 0, -\hbar\omega\}$.

fin de TD.