UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE DES SCIENCES SEMLALIA
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
MARRAKECH

Année universitaire 2014/2015
(24 Janvier 2015- Durée: 2H)

SMP/ S5

Contrôle de MÉCANIQUE QUANTIQUE

==========

I. Question de Cours (Facultative - 2 points)

Décrire en quelques lignes l'expérience de Stern et Gerlach en rappelant le but et le principe de l'expérience, le résultat obtenu et son interprétation dans le cadre de la théorie générale du moment cinétique.

II. Piégeage du muonium dans un cristal (14 points)

Le muonium est un pseudo-atome hydrogénoïde formé d'un électron et d'une particule, le muon μ^+, instable de même spin et de même charge que le proton (mais dont la masse est 207 fois celle de l'électron).

A/ Dans le vide, on décrit l'état des deux spins par l'hamiltonien :

$$H = E_0 + A\ \vec{\sigma}_\mu . \vec{\sigma}_e$$

$\vec{\sigma}_\mu$ et $\vec{\sigma}_e$ sont les matrices de Pauli, E_0 et A sont des constantes ayant les dimensions d'une énergie.

1) On introduit l'opérateur moment cinétique de spin total $\vec{S} = \vec{S}_\mu + \vec{S}_e$ et on considère la base couplée $\{|s_\mu, s_e, s, m\rangle\}$, que l'on note $\{|s,m\rangle\}$.

a) Exprimer H en fonction de $\vec{S}^2$ et des constantes du problème.

b) Montrer que le ket $|s,m\rangle$ est vecteur propre de H associé à une valeur propre que l'on précisera. En déduire les énergies du système et préciser leur dégénérescence.

2) On considère maintenant la base découplée : $\{|s_\mu, s_e, m_\mu, m_e\rangle\}$ notée $\{|m_\mu, m_e\rangle\}$.

a) Ecrire les éléments de cette base (on utilisera la notation du cours) puis exprimer ces éléments en fonction des kets $|s,m\rangle$.

b) on suppose maintenant que les états des particules du système sont :

- le spin de μ^+ est dans l'état $|+\rangle$ de σ_{μ_z}
- le spin de l'électron est dans un état quelconque normé : $|\phi\rangle = \alpha\ |+\rangle + \beta\ |-\rangle$

Ecrire l'état globale $|\Psi\rangle$ du spin du système puis exprimer cet état dans la base $\{|s,m\rangle\}$.
Déterminer l'énergie moyenne, notée E, du système dans l'état $|\Psi\rangle$.

B/ On piège le muonium dans un cristal de silicium afin de déterminer sa structure hyperfine (cette technique peut aussi renseigner sur la structure du cristal). Dans ces conditions, le hamiltonien du système est de la forme :

$$H_p = E_0 + A'\ \vec{\sigma}_\mu . \vec{\sigma}_e + B\ \sigma_{\mu_z} . \sigma_{e_z}$$

σ_{μ_z} et σ_{e_z} sont les composantes de $\vec{\sigma}_\mu$ et $\vec{\sigma}_e$ suivant l'axe z de quantification, ($A' \neq A$ car modification du potentiel coulombien).

1) a) Exprimer H_p en fonction de $\vec{S}^2$, S_z^2 et des constantes du problème.

b) Choisir la base couplée et calculer les énergies $E_{s,m}$ associées aux états $|s,m\rangle$ du muonium. Préciser l'effet du piégeage et faire un diagramme des niveaux d'énergie avec les états correspondants (sans et avec le piégeage).

2) **a)** On suppose que le spin de μ^+ est dans l'état propre $|+\rangle_x$ de σ_{μ_x} et celui de l'électron est dans l'état $|+\rangle$ de σ_{e_z}. Ecrire l'état $|\Psi_p\rangle$ du muonium piégé dans la base $\{|s,m\rangle\}$ et donner son énergie moyenne, notée E_p, dans l'état $|\Psi_p\rangle$. L'interaction spin-spin a-t-elle dans ce cas un effet ?

b) Que peut-on dire des états $|\Psi_p\rangle$ et $|\Psi\rangle$ quand $\alpha=\beta$?

Données :

° $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ et pour une particule de spin s=1/2 on a : $\sigma_\alpha^2 = \mathbb{1}$ avec α = x,y,z ($\mathbb{1}$ étant l'opérateur identité)

° $|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$

° On donne la table des coefficients de Clebsch-Gordan pour $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. Un signe $\sqrt{\ }$ est sous-entendu devant chaque coefficient.

1/2x1/2	1		
	1		
1/2 1/2	1	1 0 0 0	
	1/2 −1/2 −1/2 1/2	1/2 1/2 1/2 −1/2	1 −1
		−1/2 −1/2	1

III. Perturbation d'un oscillateur harmonique (6 points)

Soit H_0 l'hamiltonien non perturbé d'un oscillateur harmonique à <u>deux dimensions</u> :

$$H_0 = H_x + H_y \quad \text{où} \quad H_\mu = (N_\mu + \frac{1}{2})\,\hbar\,\omega \quad \text{et} \quad N_\mu = a_\mu^+ a_\mu \qquad (\mu = x,y)$$

avec $a_\mu^+ |n_\mu\rangle = \sqrt{n_\mu + 1}\,|n_\mu + 1\rangle$ et $a_\mu |n_\mu\rangle = \sqrt{n_\mu}\,|n_\mu - 1\rangle$

1) On considère l'état $|n_x,n_y\rangle = |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle$.

Montrer que $H_0 |n_x n_y\rangle = E^0_{n_x n_y} |n_x n_y\rangle$ et expliciter $E^0_{n_x n_y}$.

2) On perturbe H_0 par $W = \lambda XY$ où X et Y sont donnés par :

$X = \alpha (a_x + a_x^+)$ et $Y = \alpha (a_y + a_y^+)$; α étant un réel.

a) Quel est l'effet de W au premier ordre sur le niveau d'énergie $E^0_{n_x n_y} = \hbar\omega$?

b) On considère maintenant le niveau d'énergie $E^0_{n_x n_y} = 2\hbar\omega$. Etudier l'effet de la perturbation sur ce niveau et préciser s'il y a lieu une levée de la dégénérescence. Résumer vos résultats dans un diagramme de niveaux d'énergie avec les états correspondants (sans et avec la perturbation).

))

Barème :

II : A/ 1)3pts ; 2)5pts ; B/ 1)4pts ; 2)2 pts.

III : 1)1pt ; 2)5pts.