►**Exercice 2:**

On considère un système quantique conservatif à trois niveaux ayant pour hamiltonien H_0. Soient $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$ les états propres normés de H_0 d'énergies respectives E_1, E_2 et E_3; On suppose $E_1 \prec E_2 \prec E_3$.

1. L'état du système à l'instant $t = 0$ est donné par

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle$$

1.1/ On mesure à cet instant l'énergie du système. Quelle est la probabilité de trouver la valeur E_3? Dans quels états peut-on trouver le système lors de cette mesure et avec quelles probabilités?

$P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$D = d\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2/ Calculer la valeur moyenne de H_0 dans l'état $|\Psi(0)\rangle$.

1.3/ Déterminer, à partir de $|\Psi(0)\rangle$ l'état $|\Psi(t)\rangle$ du système à l'instant t.

2. On considère l'observable D attachée à ce système et representée dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ par la matrice dont les seuls éléments non nuls sont: $\langle u_1|D|u_2\rangle = \langle u_2|D|u_1\rangle = d$.

2.1/ Cette observable est-elle une constante du mouvement?

2.2/ Calculer à l'aide de la valeur moyenne de D à l'instant t. Montrer qu'elle s'écrit sous la forme $dcos(\omega_{21}t)$ où ω_{21}est la fréquence de Bohr donnée par $\omega_{21} = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}$.

3. On suppose maintenant que le système est décrit par l'hamiltonien $H(t) = H_0 + H_I(t)$ où est une observable dépendante du temps.

3.1/ Ecrire l'équation de Schrodinger qui décrit l'évolution de l'état $|\Psi(t)\rangle$ de ce système.

3.2/ On pose $|\Psi(t)\rangle = e^{\frac{-i}{\hbar}H_0 t}|\varphi(t)\rangle$; quelle est l'équation d'évolution dans le temps de l'état $|\varphi(t)\rangle$?

4. L'observable $H_I(t)$ est representée dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ par une matrice dont les seuls éléments non nuls sont: $\langle u_3|H_I(t)|u_2\rangle = \langle u_2|H_I(t)|u_3\rangle = \omega_1 \sin\omega t$, où ω_1 est une constante réelle.

Si on pose $|\varphi(t)\rangle = \alpha_1(t)|u_1\rangle + \alpha_2(t)|u_2\rangle + \alpha_3(t)|u_3\rangle$, donner le système d'équations différentielles satisfaites par les $\alpha_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. On posera $\omega_{32} = \frac{E_3 - E_2}{\hbar}$.

Contrôle final

Exo 2 :

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix}$$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle$$

1.1) On a : $H|\psi\rangle = E_m|\psi\rangle$

D'après la matrice H_0 $\begin{cases} H_0|u_1\rangle = E_1|u_1\rangle \\ H_0|u_2\rangle = E_2|u_2\rangle \\ H_0|u_3\rangle = E_3|u_3\rangle \end{cases}$

$$P_{(E_3)} = |\langle u_3|\psi(0)\rangle|^2 = 0$$

$$P_{(E_1)} = |\langle u_1|\psi(0)\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P_{(E_2)} = |\langle u_2|\psi_0\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

1.2) $\langle H_0\rangle = \langle\psi(0)|H_0|\psi(0)\rangle$

$$= \sum_{n=1}^{3} E_n P_{(E_n)}$$

$$= E_1 P_{(E_1)} + E_2 P_{(E_2)} + E_3 P_{(E_3)}$$

$$\langle H_0\rangle = \frac{E_1+E_2}{2}$$

1.3) On a : $i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H_0|\psi\rangle$

$$\int_0^t \frac{d|\psi\rangle}{d\psi} = \int_0^t -\frac{iH_0}{\hbar}\,dt$$

$$\ln\left(\frac{|\psi(t)\rangle}{|\psi(0)\rangle}\right) = -\frac{iH_0t}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \frac{|\psi(t)\rangle}{|\psi(0)\rangle} = e^{-\frac{iH_0t}{\hbar}}$$

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle e^{-\frac{iH_0t}{\hbar}}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iH_0t}{\hbar}}\frac{|u_1\rangle + |u_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

2) $D = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \langle u_1| \\ \langle u_2| \\ \langle u_3| \end{matrix}$

2.1) NB : $\forall A$ = observable

Cte du Mvt $[H, A] = 0$

Pas cte du mouvement $[H, A] \neq 0$

$$[H_0, D] = H_0D - DH_0$$

$$H_0D = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & dE_1 & 0 \\ dE_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DH_0 = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & dE_2 & 0 \\ dE_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $H_0D \neq DH_0$ d'où D pas cte du MVt.

2.2) $\langle D\rangle_t = d\cos(\omega_{21}t)$

avec $\omega_{21} = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}}|u_2\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \left[|u_1\rangle + e^{\frac{i(E_2-E_1)t}{\hbar}} |u_2\rangle \right]$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \left[|u_1\rangle + e^{i\omega_{21} t} |u_2\rangle \right]$$

$$\langle D\rangle_t = \langle \psi(t)| D |\psi(t)\rangle$$

$$\langle D\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{iE_1 t}{\hbar}} \left(1, e^{-i\omega_{21} t}, 0\right) \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\omega_{21} t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{iE_1 t}{\hbar}} \left(d e^{-i\omega_{21} t}, d, 0 \right) \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\omega_{21} t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left(d e^{i\omega_{21} t} + d e^{-i\omega_{21} t} \right)$$

$$\boxed{\langle D\rangle_t = d \cos \omega_{21} t}$$

3.1) En a : $i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H(t)|\psi(t)\rangle$

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \left(H_0 + H_I(t)\right)|\psi(t)\rangle$$

3.2) $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} |\varphi(t)\rangle$

En a : $i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \left(H_0 + H_I(t)\right)|\psi(t)\rangle$

$$i\hbar \left[\frac{d\left(e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}\right)}{dt} |\varphi(t)\rangle + e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} \frac{d|\varphi(t)\rangle}{dt} \right]$$

$$= H_0 e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} |\varphi(t)\rangle + H_I(t) e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} |\varphi(t)\rangle$$

$$\cancel{H_0 e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} |\varphi(t)\rangle} + i\hbar \cancel{e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}} \frac{d|\varphi(t)\rangle}{dt} = \cancel{H_0 e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} |\varphi(t)\rangle} + H_I(t) \cancel{e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}} |\varphi(t)\rangle$$

$$\boxed{i\hbar \frac{d|\varphi(t)\rangle}{dt} = H_I(t)|\varphi(t)\rangle}$$

4) $H_I(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 \sin\omega t \\ 0 & \omega_1 \sin\omega t & 0 \end{pmatrix}$

$$|\varphi(t)\rangle = \alpha_1(t)|u_1\rangle + \alpha_2(t)|u_2\rangle + \alpha_3(t)|u_3\rangle$$

$$i\hbar \frac{d|\varphi(t)\rangle}{dt} = H_I(t)|\varphi(t)\rangle$$

$$i\hbar \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) \\ \dot{\alpha}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 \sin\omega t \\ 0 & \omega_1 \sin\omega t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i\hbar \dot{\alpha}_1(t) = 0 \\ i\hbar \dot{\alpha}_2(t) = \alpha_3(t)\omega_1 \sin\omega t \\ i\hbar \dot{\alpha}_3(t) = \alpha_2(t)\omega_1 \sin\omega t \end{cases}$$