Universite Chouaib Doukkali
Faculte Des Sciences
Department De Physique
El Jadida

Annee Universitaire : 2015/2016
Filière : Smp
Physique : M31
Module : Mecanique Quantique

**Exercices avec Solutions**

# 1 Exercices

**Exercice 1 : Etat général de spin $\frac{1}{2}$**

Dans la base orthonormée $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$ des vecteurs propres des opérateurs $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_z$, l'état de spin d'une particule est representé par le vecteur :

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|+\rangle_z + \beta\,|-\rangle_z. \tag{1}$$

1)- Déterminer les valeurs et vecteurs propres de $\hat{S}_x$ et $\hat{S}_y$ dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$.

2)- Quelles sont les probabilités pour que les mesures des grandeurs representées par $\hat{S}_x$ et $\hat{S}_y$ dans l'état $|\Psi\rangle$ donnent les valeurs $\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$.

3)- Déterminer les valeurs et vecteurs propres de l'opérateurs $\hat{S}_u = \vec{S}\cdot\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire définissant un axe quelconque. En déduire les probabilités pour que les mesures de $\hat{S}_u$ dans l'état $|\Psi\rangle$ donnent les valeurs $\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$.

**Exercice 2 : Evolution temporelle et rotation pour spin $\frac{1}{2}$**

On considére un moment cinétique de spin $\vec{S}$ de valeur $s = \frac{1}{2}$. On note par $|+\rangle_u$ et $|-\rangle_u$ les états propres communs à $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_u = \vec{S}\cdot\vec{u}$ où $\vec{u}$ un vecteur unitaire reperé dans le trièdre $oxyz$, par son angle $\theta$ et son angle azimutal $\varphi$. Sur la base des kets propres $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$ de $\hat{S}_z$ associés respectivement aux valeurs propres $\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$, on démontre les relations suivantes :

$$|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi/2}\,|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi/2}\,|-\rangle \tag{2}$$

$$|-\rangle_u = \sin\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi/2}\,|+\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi/2}\,|-\rangle. \tag{3}$$

1)- Trouver, à partir des expressions précédentes, les kets propres à $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_x$. Même question pour les kets propres communs à $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_y$. On éliminera tout facteur de phase n'ayant pas de signification physique.

2)- Un système est dant l'état $|+\rangle_z$. En se rappelant que $\hat{S}_x$ et $\hat{S}_u$ ont les mêmes valeurs propres que $\hat{S}_z$, calculer les probabilités des différents résultats de mesure de $\hat{S}_x$. Même question pour $\hat{S}_u$.

3)- On suppose maintenant que le système est preparé dans l'état $|+\rangle_u$, quelles sont les valeurs moyennes de $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ et $\hat{S}_z$.

4)- On plonge le système dans un champ magnétique uniforme statique $\vec{B}_0$ orienté suivant $oz$. L'intéraction du moment magnétique $\vec{M} = \gamma\vec{S}$ du système avec le champ magnétique peut être décrite par le Hamiltonien suivant :

$$\hat{H} = -\vec{M} \cdot \vec{B}_0. \tag{4}$$

a- Déterminer les valeurs et vecteurs propres de $\hat{H}$. On appellera $B_0$ le module de $\vec{B}_0$ et on posera $\omega_0 = -\gamma B_0$.

b- Si le système est décrit au temps $t = 0$ par le ket $|\xi(0)\rangle = |+\rangle_u$, quel sera son état de spin $|\xi(t)\rangle$ à l'instant $t$. On posera $\varphi(t) = \varphi + \omega_0 t$.

c- Déterminer l'evolution dans le temps de $< \vec{S} >$, on calculera explicitement les valeurs $< \hat{S}_x >$, $< \hat{S}_x >$ et $< \hat{S}_z >$. Donner un commentaire.

d- Considérons l'instant $t$ tel que $\omega_0 t = \alpha$. En comparant l'expression de $|\xi(t)\rangle$ avec celle de $|\xi(0)\rangle$, déterminer la matrice $\hat{R}(\alpha)$ d'ordre 2 par laquelle le vecteur d'état est transformé entre les instants 0 et $t$, c'est-a-dire

$$|\xi(t)\rangle = \hat{R}(\alpha)|\xi(0)\rangle. \tag{5}$$

Exprimer $\hat{R}(\alpha)$ sous forme d'une combinaison linéare des matrices identite $I$ et $\sigma_z$.

e- Donner l'expression de $|\xi(t)\rangle$ en fonction de $|\xi(0)\rangle$ dans les deux cas particuliers suivants: $\alpha = 2\pi$ et $\alpha = 4\pi$. Commenter le résultat obtenu.

**Exercice 3 :** On considére une particule de spin $\frac{1}{2}$ dont l'eťat quantique est dećrit par le spineur de Pauli de composantes:

$$\begin{pmatrix} \Psi_+(\vec{r}) \\ \Psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Soit $\vec{S}$ son observable de spin et $\vec{L}$ son moment cinétique orbital. On suppose que :

$$\Psi_+(\vec{r}) = R(r)\left[Y_0^0(\theta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\theta,\varphi)\right] \tag{7}$$

$$\Psi_-(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{3}}R(r)\left[Y_1^1(\theta,\varphi) - Y_1^0(\theta,\varphi)\right] \tag{8}$$

avec $Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$, $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$, $Y_1^1 = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}$ et $R(r)$ une fonction donnée.

1/ Quelle est la condition de normalisation sur la fonction $R(r)$?

2/ a- Quelles sont les probabilités de trouver $\pm\frac{\hbar}{2}$ lors de la mesure de la composante $S_z$ de $\vec{S}$?

b- Même question pour la mesure de $S_x$.

3/ Quels sont les résultats de mesure de la composante $L_z$ de $\vec{L}$? et avec quelles probabilités?

4/ Déterminer l'action de l'opérateur $\vec{L} \cdot \vec{S}$ sur le spineur.

**Exercice 4 : Piègeage du muonium dans un cristal**

Le muonium est un pseudo-atome hydrogénoïde formé d'un électron et d'une particule, le moun $\mu^+$, instable de même spin et de même charge que le proton mais dont la masse est 207 fois celle de l'électron.

A/ Dans le vide, on décrit l'etat des deux spins par l'Hamiltonien:

$$H = E_0 + A\ \vec{\sigma}_\mu \cdot \vec{\sigma}_e \tag{9}$$

avec $\vec{\sigma}_\mu$ et $\vec{\sigma}_e$ sont les matrices de Pauli, A est une constante ayant les dimensions d'une énergie.

1) Ecrire la représentation matricielle de $H$ dans la base $\{|s_\mu, s_e, s, m\rangle\}$, notée $\{|s, m\rangle\}$, des états triplet et singlet. En déduire les énergies $E_T$ et $E_S$ de ces états.

2) On considère la représentation $\left(S_\mu^2, S_e^2, S_{\mu_z}, S_{e_z}\right)$.

a- Ecrire la matrice $H$ dans cette représentation et commenter.

b- On suppose maintenant que le système est dans l'état suivant: (i) le spin de $\mu^+$ est dans l'état $|+\rangle$ de $\sigma_{\mu_z}$, (ii) le spin de l'électron est dans un état quelconque normé $\{\xi\rangle\} = a|+\rangle + b|-\rangle$ avec $a, b$ sont des constantes. Exprimer l'état $|\Psi\rangle$ du spin du système dans la base $\{|s, m\rangle\}$ et déterminer son énergie $E$.

3) Quelles sont les probabilités $\mathcal{P}_\mathcal{T}$ et $\mathcal{P}_\mathcal{S}$ de trouver le système dans l'état triplet et l'état singlet respectivement.

B/ On piège le muonium dans un cristal de silicium afin de déterminer sa strucrure hyperfine (cette technique peut aussi renseigner sur la structure du cristal). Dans ces conditions, le Hamiltonien du système est

$$H = E_0 + A'\ \vec{\sigma}_\mu \cdot \vec{\sigma}_e + B\ \sigma_{\mu_z} \cdot \sigma_{e_z} \tag{10}$$

avec $\sigma_{\mu_z}$, $\sigma_{e_z}$ sont les composantes de $\vec{\sigma}_\mu, \vec{\sigma}_e$ suivant l'axe $z$ de quantification, ($A \neq A'$ car modification du pententiel colombien).

1) Présiser l'effet du piègeage en calculant les énergies $E_n$ du muonium. Faire un diagramme des niveaux d'énergie (sans et avec piègeage).

2) On suppose que le spin de $\mu^+$ est dans l'état propre $|+\rangle_x$ de $\sigma_{\mu_x}$ et que celui de l'électron est dans l'état $|+\rangle$ de $\sigma_{e_z}$. Ecrire dans ce cas l'état $|\Psi_p\rangle$ du muonium piègé dans la base $\{|s, m\rangle\}$ et donner son énergie $E_p$. Que peut on dire du rapport $\frac{E}{E_p}$ lorsque $a = b$.

3) Quel serait l'état $|\Psi_p(t)\rangle$ si à $t = 0$, le système est dans l'état $|\Psi_p\rangle$. On posera $\omega_n = -\frac{E_n}{\hbar}$.

**Exercice 5 : Couplage spin-orbite et effet Zeeman**

On considère un système (electron $2p$ d'un atome) constitué d'un moment cinétique orbital $\vec{L}$ de nombre quantique $l = 1$ et d'un moment cinétique de spin $\vec{S}(s = \frac{1}{2})$, dont l'Hamiltonien se réduit au terme $W_{S.O}$ décrivant l'interaction spin-orbite est donné par

$$W_{S.O} = a\ \vec{L} \cdot \vec{S} \tag{11}$$

avec $a$ une constante réelle et positive (la constante de spin-orbite).

On désigne par $\{|l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle\} \equiv \{|m_l, m_s\rangle\}$ la base des kets propres communs à $L^2$, $L_z, S^2$ et $S_z$, avec $m_l = 1, 0, -1$ et $m_s = \pm$.

1) Ecrire $W_{S.O}$ en fonction de $L_+$, $L_-, S_+, S_-$, $L_z$, et $S_z$.

2) On rappelle les relations suivantes:

$$L_+|m_l\rangle = \hbar\sqrt{2}|m_l + 1\rangle, \quad m_l = -1 \text{ ou } 0, \qquad L_+|1\rangle = 0 \tag{12}$$

$$L_-|m_l\rangle = \hbar\sqrt{2}|m_l - 1\rangle, \qquad m_l = +1 \text{ ou } 0, \qquad L_+|-1\rangle = 0 \tag{13}$$

$$S_+|-\rangle = \hbar|+\rangle, \quad S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle, \quad S_+|+\rangle = S_-|-\rangle = 0 \tag{14}$$

et on pose $\epsilon = \frac{a\hbar^2}{2}$

a- Montrer que $|1, +\rangle$ et $|-1, -\rangle$ sont des kets propres de $W_{S.O}$ avec la même valeur propres que l'on déterminera.

b- Donner la matrice représentant $W_{S.O}$ dans le sous-espace engendré par les kets $|1, -\rangle$ et $|0, +\rangle$, remarquer que $W_{S.O}$ laisse invariant cet sous-espace. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres normés que l'on notera $|\Psi\rangle$ et $|\Psi'\rangle$.

c- Même question avec les kets $|-1, +\rangle$ et $|0, -\rangle$, on notera par $|\Phi\rangle$ et $|\Phi'\rangle$ les vecteurs propres normés obtenus.

d- Résumer les résultats des questions précédentes dans un diagramme en précisant les valeurs des énergies, les dégénéréscences des niveaux et les kets propres correspondants. Pour complèter ce diagramme, on peut considèrer qu'en absence du couplage spin-orbite l'énergie du système est une constante notée $E_0$: valeur propre d'un Hamiltonien atomique $H_0$ à symétrie sphérique et formant E.C.O.C. avec $L^2$, $L_z$, $S^2$ et $S_z$.

3) On introduit le moment cinétique total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ caractérisé par ses nombres quantiques $j$ et $m$.

a- Donner, sans démonstration, les valeurs possibles de $j$ et celles de $m$ correspopndantes. On désigne par $\{|l, s, j, m\rangle\}$ que l'on note $\{|j, m\rangle\}$ la base des kets communs à $L^2$, $S^2$, $J^2$ et $J_z$.

b- Ecrire $W_{S.O}$ en fonction de $L^2$, $S^2$ et $J^2$.

c- Montrer que $W_{S.O}$ est diagonal dans la base $\{|j, m\rangle\}$, retrouver ses valeurs propres et commenter.

4) On soumet le système à un champ magnetique $\vec{B}$ dirigé suivant l'axe $oz$.

a- Ecrire le terme d'interaction, note $W_B$, qu'il faut rajouter à l'Hamiltonien du système. On posera $\omega = -\gamma_0 B$, dite pulsation de Larmor, avec $\gamma_0$ étant le rapport gyromagnétique orbital.

b- Montrer que $|1, +\rangle$ et $|-1, -\rangle$ restent kets propres de $H$:

$$H = W_{S.O} + W_B \tag{15}$$

et donner les énergies correspondantes.

c- Donner la matrice représentant $H$ dans le sous-espace engendré par les kets $|1, -\rangle$ et $|0, +\rangle$ et déterminer ses valeurs propres.

d- Même question avec les kets $|-1, +\rangle$ et $|0, -\rangle$.

e- On suppose que $\hbar\omega >> 2\epsilon$ que deviennent les énergies calculées précédemment. Reprendre le diagramme tracé à la question 2) b- et ajouter l'effet du terme $W_B$ puis conclure.

Données: Soit $(A)$ une matrice d'ordre 2 représentant, dans une base donnée, un opérateur hérmitique $A$:

$$\begin{pmatrix} (A) = A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{16}$$

avec $A_{11}, A_{22}$ sont réels et $A_{12} = A_{21}^*$. La diagonalisation de $(A)$ conduit aux valeurs propres:

$$\lambda\pm = \frac{1}{2}\left(A_{11} + A_{22}\right) \pm \sqrt{\left(A_{11} + A_{22}\right)^2 + |A_{12}^2|}. \tag{17}$$

**Exercice 6 : Spin et moment magnétique du deutérium**

On désigne par $\vec{J}$ l'observable moment cinétique total du nuage électronique d'un atome et par $\vec{I}$ celle de son noyau. Les observables moments magnétiques respectives sont:

$$\vec{\mu}_J = \frac{g_j \mu_B}{\hbar}\vec{J}, \qquad \vec{\mu}_I = \frac{g_i \mu_N}{\hbar}\vec{I} \tag{18}$$

avec $\mu_B, \mu_N$ sont, respectivement, les magnétons de Bohr et nucléaire et $g_j, g_i$ sont des facteurs sans dimensions. L'énergie d'interaction magnétique du nuage électronique et du noyau est

$$W = a\vec{\mu}_J \cdot \vec{\mu}_I \tag{19}$$

où $a$ est une constante qui dépend de la distribution des électrons au voisinage du noyau.

1) On suppose que l'énergie $E_I$: le carré du moment cinétique $i(i+1)\hbar^2$ ainsi que $E_J$: le carré du moment cinétique $j(j+1)\hbar^2$. Quelles sont les valeurs $k(k+1)\hbar^2$ possibles de carré du moment cinétqiue total $K$ de l'atome?

2) Exprimer $W$ en fonction de $I^2$, $J^2$ et $K^2$.

3) Donner en fonction de $i, j$ et $k$ l'expression des niveaux d'énergie de l'atome (niveaux hyperfins).

4) Calculer la séparation en énergie de deux niveaux hyperfins consécutifs.

5) En Plaçant un atome de deutérium dans un champ magnétique uniforme $B$ faible, on observe que les deux niveaux hyperfins $E_k$ et $E_{k'}$ du fondamental se clinent et se déplacent en fonction de $B$ suivant le diagramme ci-dessous. Sachant que l'électron (unique) de cet atome est dans l'état fondamental de moment cinétique orbital $l = 0$, en déduire la valeur $i$ du moment $I$ du noyau de cet atome.

6) Sachant que dans le deutérium, le neutron et le proton ont un moment cinétique orbital nul, quel est leur état de spin?

7) Application: Sachant que le terme

$$A = a g_i g_j \mu_B \mu_N = \frac{2}{3} \cdot 1,3610^{-6} eV \tag{20}$$

à quelle fréquence doit-on accorder un radiotélescope pour tenter de détecter du deutérium dans le milieu interstellaire?

## 2 Solutions

**<u>Solution 1</u>** : Soit $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ une base et un état $|\,\psi\,\rangle$ tel que

$$|\,\psi\,\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle \tag{21}$$

Le spin est relié aux matrices de Pauli par :

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \tag{22}$$

avec

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Dans la suite on perend $\hbar = 1$.

**1)- Valeurs et vecteurs propres** :

- Pour $\sigma_x$ :

$$\det\left(\sigma_x - \lambda\mathbb{I}\right) = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_\pm = \pm 1 \tag{24}$$

$\Longrightarrow$ les Valeurs et vecteurs propres de $S_x$ :

$$s_{x\pm} = \pm\frac{1}{2} \tag{25}$$

$$|\,\pm\,\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm |-\rangle\right) \tag{26}$$

- Pour $\sigma_y$ :

$$\det\left(\sigma_y - \lambda\mathbb{I}\right) = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_\pm = \pm 1 \tag{27}$$

$\Longrightarrow$ les Valeurs et vecteurs propres de $S_y$ :

$$s_{y\pm} = \pm\frac{1}{2} \tag{28}$$

$$|\,\pm\,\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm i|-\rangle\right) \tag{29}$$

**2)- Probabilités** : En général, la probabilité est donnée par

$$\mathcal{P}_{S_i}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = |_i\langle\pm\,|\,\psi\,\rangle|^2, \qquad i = x, y \tag{30}$$

Application pour $S_x$ et $S_y$ :

$$\mathcal{P}_{S_x}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = |_x\langle\pm\,|\,\psi\,\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left|\alpha \pm \beta\right|^2 \tag{31}$$

$$\mathcal{P}_{S_y}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = |_y\langle\pm\,|\,\psi\,\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left|\alpha \mp i\beta\right|^2 \tag{32}$$

**3)- Opérateur $\hat{S}_u$ :**

$$\vec{S}\cdot\vec{u} = S_x u_x + S_y u_y + S_y u_y \tag{33}$$

ce qui donne la matrice

$$\left(\vec{S}\cdot\vec{u}\right) = \begin{pmatrix} u_z & u_- \\ u_+ & -u_z \end{pmatrix} \tag{34}$$

avec $u_\pm = u_x \pm i u_y$. Les valeurs propres :

$$\det\left(\vec{S}\cdot\vec{u} - \lambda\mathbb{I}\right) = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_\pm = \pm\frac{1}{2} \tag{35}$$

Pour $\lambda_+ = \frac{1}{2}$ :

$$|+\rangle_u = a|+\rangle + b|-\rangle \tag{36}$$

avec $a$ et $b$ sont deux coefficients a déterminer a travers l'equation aux valeurs propres. Donc on trouve

$$a = -\frac{u_-}{1+u_z}b \tag{37}$$

La condition de normalisation implique

$$|a|^2 = \frac{1+u_z}{2} \tag{38}$$

Donc on obtient à un faceur de phase prés

$$|+\rangle_u = \sqrt{\frac{1+u_z}{2}}\left(|+\rangle + \frac{u_+}{1+u_z}\right) \tag{39}$$

De même pour Pour $\lambda_- = -\frac{1}{2}$ :

$$|-\rangle_u = \sqrt{\frac{1+u_z}{2}}\left(|+\rangle - \frac{u_+}{1-u_z}\right) \tag{40}$$

La probabilité est :

$$\mathcal{P}_{S_u}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = |_u\langle\pm|\psi\rangle|^2 \tag{41}$$

$$= \frac{1\pm u_z}{2}\left|\alpha \pm \frac{u_+}{1\pm u_z}\beta\right|^2 \tag{42}$$

On observe que dans la direction $u_x = 1$ et $u_y = u_z = 0$, on retrouve $\mathcal{P}_{S_x}\left(\pm\frac{1}{2}\right)$. Pareil pour les autres : $\mathcal{P}_{S_y}\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ et $\mathcal{P}_{S_z}\left(\pm\frac{1}{2}\right)$.

**<u>Solution 2</u>** :

Rappel :

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \tag{43}$$

avec les matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

On a

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \qquad \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \tag{45}$$

D'aprs̀ excercice 1, on a

$$|+\rangle_u = \sqrt{\frac{1+u_z}{2}}\left(|+\rangle + \frac{u_+}{1+u_z}\right) \tag{46}$$

avec $\hat{S}_u = \vec{S}\cdot\vec{u}$ et $\vec{u}$ est vecteur unitaire qui s'écrit en coordonnées sphériques comme

$$u_x = \sin\theta\cos\varphi \tag{47}$$

$$u_x = \sin\theta\sin\varphi \tag{48}$$

$$u_z = \cos\theta \tag{49}$$

ce qui implique

$$u_+ = u_x + iu_y = \sin\theta e^{i\varphi} \tag{50}$$

On note que

$$\frac{1+u_z}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2\ \frac{\theta}{2} \tag{51}$$

Donc Eq. (46) devient

$$|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \frac{\sin\theta\ e^{i\varphi}}{2\cos\frac{\theta}{2}}|-\rangle \tag{52}$$

$$= \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\ e^{i\varphi}|-\rangle \tag{53}$$

qui peuy s'écrire en fonction de Eq. (2) comme

$$|+\rangle_u = e^{i\varphi}\left(\cos\frac{\theta}{2}\ e^{-i\varphi}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\ e^{i\varphi/2}|-\rangle\right) \tag{54}$$

De même pour Eq. (3).

**1)- Kets propres à $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_i$ ($i = x, y$) :**

- Pour $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_x$ il suffit de prendre $\left(\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0\right)$ :

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm |-\rangle\right) \tag{55}$$

- Pour $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_y$ on $\left(\theta = \frac{\pi}{2} = \varphi\right)$ :

$$|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm i|-\rangle\right) \tag{56}$$

**2)- Système dans l'état** $|+\rangle$ : Les résultats de mesure de $\hat{S}_x$ sont $\pm\frac{\hbar}{2}$ et de même pour $\hat{S}_u$. Donc les probbalités sont

$$\mathcal{P}_{S_x}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = |_x\langle\pm|+\rangle|^2 = \frac{1}{2} \tag{57}$$

$$\mathcal{P}_{S_u}\left(+\frac{1}{2}\right) = |_u\langle+|+\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2} \tag{58}$$

$$\mathcal{P}_{S_u}\left(-\frac{1}{2}\right) = |_u\langle-|+\rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2} \tag{59}$$

**3)- Système dans l'état** $|+\rangle_u$ :

$$\langle\hat{S}_\alpha\rangle = {}_x\langle+|\hat{S}_\alpha|+\rangle_u, \qquad \alpha = x, y, z \tag{60}$$

avec

$$|+\rangle_u = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\ e^{-i\varphi/2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\ e^{i\varphi/2}\end{pmatrix}, \qquad {}_u\langle+| = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\ e^{i\varphi/2} & \sin\frac{\theta}{2}\ e^{-i\varphi/2}\end{pmatrix} \tag{61}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\langle\hat{S}_x\rangle &= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\ e^{i\varphi/2} & \sin\frac{\theta}{2}\ e^{-i\varphi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\ e^{-i\varphi/2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\ e^{i\varphi/2}\end{pmatrix} && (62)\\ &= \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos\varphi && (63)\end{aligned}$$

Même raisonnement pour $\langle\hat{S}_y\rangle$ et $\langle\hat{S}_z\rangle$ :

$$\langle\hat{S}_y\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin\varphi \tag{64}$$

$$\langle\hat{S}_z\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos\theta \tag{65}$$

**4)- Moment magnétique** :

- a/- On a $\vec{M} = \gamma\vec{S}$, $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$ et $\omega_0 = \gamma B_0$, on peut écrire le Hamiltonien comme

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -\vec{M}\cdot\vec{B}_0 && (66)\\ &= -\gamma\vec{S}\cdot\vec{B}_0 && (67)\\ &= \omega_0\hat{S}_z && (68)\\ &= \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z && (69)\end{aligned}$$

  Il est caire que les vecteurs propres de $\hat{H}$ sont ceux de $\sigma_z$ : $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ associés aux valeurs propres $\frac{\hbar\omega_0}{2}$ et $-\frac{\hbar\omega_0}{2}$.

- b/- Système à $t = 0$ est dans par l'état $|\,\chi(0)\,\rangle = |+\rangle_u$, puisque $\hat{H}$ ne dépend pas du temps alors à l'instant $t$ donné le système est dans l'état

$$|\,\chi(t)\,\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\,\chi(0)\,\rangle \tag{70}$$

$$= \cos\frac{\theta}{2}\; e^{-\frac{i}{2}(\omega_t+\varphi)}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\; e^{\frac{i}{2}(\omega_0 t+\varphi)}|-\rangle \tag{71}$$

qui peut s'ecrire encore comme

$$|\,\chi(t)\,\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\; e^{-\frac{i}{2}\varphi(t)}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\; e^{\frac{i}{2}\varphi(t)}|-\rangle \tag{72}$$

avec $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi$.

- c/- Valeurs moyennes:

$$\langle\hat{S}_\alpha\rangle = \langle\chi(t)\,|\hat{S}_\alpha|\,\chi(t)\,\rangle, \qquad \alpha = x, y, z \tag{73}$$

Donc la solution donnée par la reponse **3)-** en remplaçant $\varphi$ par $\varphi(t)$ :

$$\langle\hat{S}_x\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos(\omega_0 t+\varphi) \tag{74}$$

$$\langle\hat{S}_y\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin(\omega_0 t+\varphi) \tag{75}$$

$$\langle\hat{S}_z\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos\theta \tag{76}$$

Les probabilités :

$$\mathcal{P}_{S_z}\left(\frac{\hbar}{2}\right) = |\langle+\,|\,\chi(t)\,\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2} \tag{77}$$

$$\mathcal{P}_{S_z}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = |\langle-\,|\,\chi(t)\,\rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2} \tag{78}$$

qui ne dépendent pas du temps par contre on voit $\mathcal{P}_{S_x}\left(\pm\frac{\hbar}{2}\right)$ et $\mathcal{P}_{S_y}\left(\pm\frac{\hbar}{2}\right)$ dépendent du temps.

- d/- Opérateur rotation :

$$|\,\chi(t)\,\rangle = \hat{R}(\alpha)|\,\chi(0)\,\rangle, \qquad \alpha = \omega_0 t \tag{79}$$

mais $|\,\chi(t)\,\rangle$ est

$$|\,\chi(t)\,\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\varphi)}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i}{2}(\alpha+\varphi)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-\frac{i}{2}\alpha} & 0\\ 0 & e^{\frac{i}{2}\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i}{2}\varphi}\end{pmatrix} \tag{80}$$

Identifions Eqs. (79) et (80) pour trouver

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix}e^{-\frac{i}{2}\alpha} & 0\\ 0 & e^{\frac{i}{2}\alpha}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2} & 0\\ 0 & \cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}\sin\frac{\alpha}{2} & 0\\ 0 & -\sin\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix} \tag{81}$$

ou bien

$$R(\alpha) = \mathbb{I}\cos\frac{\alpha}{2} - i\sigma_z\sin\frac{\alpha}{2} \tag{82}$$

- e/- Cas particuliers :

$$\alpha = 2\pi \qquad \Longrightarrow \qquad R(2\pi) = -\mathbb{I} \tag{83}$$

$$\alpha = 4\pi \qquad \Longrightarrow \qquad R(4\pi) = \mathbb{I} \tag{84}$$