PHYSIQUE QUANTIQUE

1.L'ESPACE DES FONCTIONS

1.1. Fonction d'onde :

$$\boxed{\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} \iiint_{esp\ \vec{p}} \tilde{\Psi}(\vec{p}) e^{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} d^3\vec{p}}$$

Densité de probabilité de présence :

$$\rho(\vec{r},t) = \left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2$$

Fonction de carré sommable :

$$\iiint_{esp} \left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2 = 1$$

$\tilde{\Psi}(\vec{p},t)$ est la transformée de Fourrier de $\Psi(\vec{r},t)$:

$$\tilde{\Psi}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} \iiint_{esp\ \vec{r}} \Psi(\vec{r}) e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} d^3\vec{r}$$

Relation entre $\vec{r}$ et $\vec{p}$:

$$\langle\vec{r}\rangle = \iiint_{esp} \Psi^*(\vec{r},t)\cdot\Psi(\vec{r},t)\,d^3\vec{r}$$

$$\langle\vec{p}\rangle = \iiint_{esp} \Psi^*(\vec{r},t).(-i\hbar)\vec{\nabla}\Psi(\vec{r},t)\,d^3\vec{r}$$

Equation de Schrödinger :

$$\boxed{\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V[\vec{r}]\right)\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)}$$

1.2. L'espace des états. Notation de Dirac. Kets et Bras.

$\langle\varphi|\psi\rangle$, produit scalaire avec $\langle\varphi|$, appelé bra et $|\psi\rangle$, appelé ket.

$$\lambda|\psi_1\rangle + \mu|\psi_2\rangle \xrightarrow[associé]{bra} \lambda^*\langle\psi_1| + \mu^*\langle\psi_2|$$

Bases orthonormées :

$$\boxed{\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{i,j}}$$

Projection sur une base :

$$\boxed{|\psi\rangle = \sum_i \langle u_i|\psi\rangle\cdot|u_i\rangle}$$

Relation de fermeture :

$$\boxed{\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = Id}$$

$$\iiint_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|.d^3\vec{p} = Id$$

où Id est l'opérateur identité.

Orthonormalisation au sens des bases continues :

$$\langle\vec{p}|\vec{p}'\rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}')$$

1.3. Opérateurs linéaires :

$$|\psi_1\rangle \xrightarrow{A} A|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$$

Les opérateurs sont linéaires si :

$$A\big(\lambda|\psi\rangle + \mu|\psi\rangle\big) = \lambda A|\psi\rangle + \mu A|\psi\rangle$$

Valeur propre et ket propre :

$\boxed{A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle}$ où $|\lambda\rangle \neq |0\rangle$, ket nul. Alors $|\lambda\rangle$ est un ket propre associé à la valeur propre λ

Action d'un opérateur sur un bra :

$$|\psi\rangle \xrightarrow{A} A|\psi\rangle \xrightarrow{\langle\varphi|} \langle\varphi|A|\psi\rangle$$

Adjoint d'un opérateur :

$$\langle\psi_1|A|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|A^+|\psi_1\rangle$$

$$(\lambda A)^+ = \lambda^* A^+$$

$$(BC)^+ = C^+B^+$$

Opérateur X :

$$\langle x|X|\psi\rangle = x.\psi(x)$$

$$\langle \psi|x\rangle = \psi^*(x)$$

$$X^+ = X$$

On dit que X est auto adjoint.

Opérateur hermitique :

$A^+ = A$, alors A est hermitique.

Les valeurs propres d'un opérateur hermitique sont réelles, et les kets propres associées à ces valeurs propres sont orthogonaux.

14. Commutateurs :

$$\boxed{[A,B] = AB - BA}$$

Propriétés des commutateurs :

$$[A, \lambda B + \mu C] = \lambda[A,B] + \mu[A,C]$$

$$[A,B] = -[B,A]$$

$$[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$$

Si A et B commutent, on peut trouver un ensemble de kets propres communs à A et B.

1.5. Opérateurs position et impulsion, $\vec{R}$ et $\vec{P}$:

$$\boxed{\begin{aligned}\langle \vec{r}|\vec{R}|\psi\rangle &= \vec{r}\langle \vec{r}|\psi\rangle \\ \langle \vec{p}|\vec{P}|\psi\rangle &= \vec{p}\langle \vec{p}|\psi\rangle\end{aligned}}$$

Changement de base, $\vec{P}$ en représentation $\vec{r}$ et vice versa :

$$\boxed{\begin{aligned}\langle \vec{r}|\vec{P}|\psi\rangle &= -i\hbar\vec{\nabla}\langle \vec{r}|\psi\rangle \\ \langle \vec{p}|\vec{R}|\psi\rangle &= i\hbar\vec{\nabla}\langle \vec{p}|\psi\rangle\end{aligned}}$$

Commutateur :

$$[X, P_X] = i\hbar.Id$$

On donne :

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{px}{\hbar}}$$

1.6. Représentation d'un opérateur dans une base :

L'ensemble des $\langle u_i|A|u_j\rangle$ est la matrice (A) :

$$(A) = \begin{pmatrix} \langle u_1|A|u_1\rangle & \langle u_1|A|u_2\rangle & \dots \\ \langle u_2|A|u_1\rangle & \langle u_2|A|u_2\rangle & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

(A) représente A dans la base $\{|u_i\rangle\}$

Adjoint de l'opérateur:

$$(A^+) = {}^t(A)^*$$

2. LES POSTULATS DE LA MECANIQUE QUANTIQUE .

2.1. Postulats de représentation :

A un instant t fixé, l'état d'un système physique est représenté par un ket $|\psi(t)\rangle$ appartenant à l'espace des états : $\mathcal{E}$. L'espace $\mathcal{E}$ est un espace de Hilbert.

Toute grandeur physique mesurable A, est représenté par un opérateur A agissant dans l'espace des états $\mathcal{E}$. L'opérateur A est une observable.

2.2. Postulats de mesure :

La mesure d'une grandeur physique $\mathcal{A}$ ne peut donner comme résultat que l'une des valeurs propres de l'observable A correspondante.

Lors de la mesure d'une grandeur physique $\mathcal{A}$ sur un système dans l'état $|\psi\rangle$ normé, la probabilité d'obtenir comme résultat la valeur propre a_n dégénéré g_n fois de l'observable A correspondante est,

- dans le cas d'un spectre discret :

$$\boxed{\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} \left|\langle a_n^i | \psi\rangle\right|^2}$$

où les $\left\{|a_n^i\rangle ; i = 1, g_n\right\}$ constituent une base orthonormée du sous-espace propre de A associé à la valeur propre a_n .

- dans le cas d'un spectre continu, la probabilité d'obtenir un résultat compris entre α et $\alpha + d\alpha$ vaut :

$$\boxed{d\mathcal{P}(\alpha) = \left|\langle \alpha | \psi\rangle\right|^2 d\alpha}$$

où $|\alpha\rangle$ est le ket propre « normé » de l'observable A associé à la valeur propre α .

Si la mesure d'une grandeur physique $\mathcal{A}$ sur un système dans l'état $|\psi\rangle$ normé a donné le résultat a_n , l'état du système immédiatement après la mesure est la projection normée de $|\psi\rangle$ sur le sous-espace propre de A associé à a_n : (cas d'un spectre discret) :

$$\boxed{|\psi\rangle \xrightarrow[\mathcal{A}\to a_n]{\text{mesure de}} \frac{\sum_{i=1}^{g_n} |a_n^i\rangle\langle a_n^i|\psi\rangle}{\left(\sum_{i=1}^{g_n} \left|\langle a_n^i|\psi\rangle\right|^2\right)^{1/2}}}$$

2.3. Postulat d'évolution :

L'équation décrivant l'évolution dans le temps de l'état $|\psi(t)\rangle$ d'un système physique est l'équation de Schrödinger :

$$\boxed{H|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle}$$

où le Hamiltonien H est l'observable associée à l'énergie totale du système.

2.4. Règles de quantification :

L'observable A correspondant à la grandeur physique $\mathcal{A}$ définie classiquement s'obtient en remplaçant dans l'expression convenablement symétrisée de $\mathcal{A}$ les variables $\vec{r}$ et $\vec{p}$ par les observables $\vec{R}$ et $\vec{P}$. Les observables ne correspondant pas à des grandeurs physiques classiques seront bâties directement.

2.5. Interprétation des postulats sur la mesure :

Valeur moyenne :

$$\boxed{\langle \mathcal{A}\rangle_{|\psi\rangle} = \langle\psi|A|\psi\rangle}$$

on notera souvent $\langle \mathcal{A}\rangle = \langle A\rangle$

Ecart quadratique moyen :

$$\boxed{(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle_{|\psi\rangle} - \langle A \rangle_{|\psi\rangle}^2}$$

2.6. Compatibilité des mesures :

A et B deux observables :

$$\boxed{\Delta A . \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A,B] \rangle \right|^2}$$

Cas particulier :

$$\begin{cases} \Delta X . \Delta P_x \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \Delta Y . \Delta P_y \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \Delta Z . \Delta P_z \geq \dfrac{\hbar}{2} \end{cases}$$

2.7. Evolution de la valeur moyenne :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\langle A \rangle (t)\right) = \frac{1}{i\hbar} \langle [A,H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle}$$

si $\dfrac{d}{dt}\langle A \rangle = 0 \Rightarrow \langle A \rangle$ est une constante du mouvement, alors on peut trouver une base de vecteurs propres à A et H, on trouvera toujours la même valeur si on mesure A ultérieurement, on parle alors de bon nombre quantique pour a.

2.8. Théorème d'Erenfest :

$$[\vec{R}, H] = \frac{i\hbar}{m} \vec{P} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\langle \vec{R} \rangle = \frac{\langle \vec{P} \rangle}{m}}$$

$$[\vec{P}, H] = [\vec{P}, V(\vec{R})] = -i\hbar (\vec{\nabla} V)(\vec{R}) \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\langle \vec{P} \rangle = -\langle \vec{\nabla} V(\vec{R}) \rangle}$$

2.9. Opérateur d'évolution :

$$U(t,t_0) |E_n\rangle = e^{-iE_n \frac{t-t_0}{\hbar}} |E_n\rangle$$

Dans le cas des états stationnaires :

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = e^{-iE_n \frac{t-t_0}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle}$$

2.10. Fréquences de Bohr :

$$\upsilon_{n'n} = \frac{|E_n' - E_n|}{h}$$

avec $2\pi\hbar = h$.

2.11. Relation d'incertitude temps-énergie :

Etat stationnaire, l'énergie est une valeur sûre, $\Delta E = 0$, donc il n'y à pas d'évolution, $\Delta T = \infty$.

Période d'évolution pour seulement deux fréquences possibles :

$$T = \frac{h}{|E_2 - E_1|}$$

On a alors :

$$\frac{\Delta A}{\left| \frac{d}{dt} \langle A \rangle \right|} = \tau_A \text{ et } \tau_A . \Delta E = \frac{\hbar}{2}$$

3. L'OSCILLATEUR HARMONIQUE.

3.1. Le Hamiltonien :

$$\boxed{H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2}$$

Si on pose :

$$\begin{cases} \hat{X} = \sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}} X \\ \hat{P} = \dfrac{1}{\sqrt{\hbar m\omega}} P \end{cases} \rightarrow H = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right)$$

Soit alors,

$$\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right)}$$

$$\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = \frac{1}{\hbar}\left[X, P\right] = i.Id$$

Il faut alors résoudre l'équation aux valeurs propres :

$$\hat{H}\left|\varepsilon\right\rangle = \varepsilon\left|\varepsilon\right\rangle$$

A nouveau, on pose :

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right) \\ a^+ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{X} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(a + a^+\right) \\ \hat{P} = \dfrac{1}{i\sqrt{2}}\left(a - a^+\right) \end{cases}, \text{ et}$$

$$N = a^+ a \Rightarrow \boxed{\hat{H} = N + \frac{1}{2}.Id}$$

3.2. Valeurs propres

On calcule :

$$\boxed{Na\left|\upsilon\right\rangle = \left(\upsilon - 1\right) a\left|\upsilon\right\rangle}, \text{ avec } Na = aN - a$$

Comme N est hermitique, $a\left|\upsilon\right\rangle$ est ket propre de N associé à la valeur propre $\left(\upsilon - 1\right)$ sauf si $a\left|\upsilon\right\rangle = \left|0\right\rangle$, ket nul.

3.3. Vecteurs propres :

On calcule :

$$\boxed{Na^+\left|\upsilon\right\rangle = \left(\upsilon + 1\right) a^+\left|\upsilon\right\rangle}, \text{ avec } Na^+ = a^+N + a^+$$

Si $\left|\upsilon\right\rangle$ est ket propre de N avec valeur propre υ, alors $a^+\left|\upsilon\right\rangle$ est ket propre de N associé à la valeur propre $\upsilon + 1$.

Soit $\left|n\right\rangle$ un ensemble de kets propres normé de l'opérateur a^+, il vient :

$$\left|n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^+\right)^n\left|0\right\rangle \text{ et } a\left|n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} n\left|n-1\right\rangle$$

Il faut vérifier les relations de fermetures et d'orthonormalisation pour faire de $\left\{\left|n\right\rangle\right\}$ une base de l'observable H.

Vecteurs propres de a et a^+ :

$$N\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle, \quad \textit{n est un entier}$$

$$\boxed{\begin{cases} a\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle \\ a^+\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle \end{cases}}$$

3.4. Projection de $\left|n\right\rangle$ sur la base des $\left|x\right\rangle$:

$$\boxed{\left\langle x | n\right\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}.x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}},$$

où H_n est un polynôme de Hermite.

4. LE MOMENT CINETIQUE EN MECANIQUE QUANTIQUE :

4.1. Moment cinétique orbital :

Le moment cinétique orbital est défini par l'opérateur vectoriel :

$\boxed{\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{P}}$.

$\vec{L}$ est hermitique.

Commutateurs :

$$\vec{L} \rightarrow \begin{cases} L_x = YP_z - ZP_y \\ L_y = ZP_x - XP_y \\ L_z = XP_y - YP_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[L_x, L_y\right] = i\hbar L_z \\ \left[L_y, L_z\right] = i\hbar L_x \\ \left[L_z, L_x\right] = i\hbar L_y \end{cases}$$

On appellera moment cinétique orbital tout opérateur vectoriel $\vec{L}$ dont les composantes cartésiennes satisferont les relations de commutation précédentes.

Généralisation :

On bâtit : $\boxed{\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2}$, alors $\vec{J}^2$ est une observable.

Commutateurs :

$$\begin{cases} \left[\vec{J}^2, J_x\right] = 0 \\ \left[\vec{J}^2, J_y\right] = 0 \\ \left[\vec{J}^2, J_z\right] = 0 \end{cases}$$

4.2. Valeurs propres et kets propres du moment cinétique :

On cherche des kets propres communs à $\vec{J}^2$ et J_z :

On définit deux opérateurs :

$$\boxed{\begin{cases} J_+ = J_x + iJ_y \\ J_- = J_x - iJ_y \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} J_x = \dfrac{1}{2}\left(J_+ + J_-\right) \\ J_y = \dfrac{1}{2i}\left(J_+ - J_-\right) \end{cases}$$

Relations de commutation :

$$\begin{cases} \left[J_+, J_z\right] = -\hbar J_+ \\ \left[J_-, J_z\right] = \hbar J_- \end{cases}$$

$$\left[J_+, J_-\right] = 2\hbar J_z$$

$$\left[\vec{J}^2, J_+\right] = \left[\vec{J}^2, J_-\right] = 0$$

Réécriture de $\vec{J}^2$:

$$\boxed{\vec{J}^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) + J_z^2}$$

4.3. Equations aux valeurs propres de $\vec{J}^2$ et J_z :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{J}^2 \left| jm \right\rangle = j\left(j+1\right)\hbar^2 \left| jm \right\rangle \\ J_z \left| jm \right\rangle = m\hbar \left| jm \right\rangle \end{cases}}, \text{ avec } \begin{cases} m \in \square \\ j \in \square^+ \end{cases}$$

4.4. Propriétés des kets $J_+ \left| jm \right\rangle$ et $J_- \left| jm \right\rangle$:

$$\begin{cases} \left\| J_+ \left| jm \right\rangle \right\|^2 = \hbar^2 \left[j\left(j+1\right) - m\left(m+1\right) \right] \\ \left\| J_- \left| jm \right\rangle \right\|^2 = \hbar^2 \left[j\left(j+1\right) - m\left(m-1\right) \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \vec{J}^2 J_+ \left| jm \right\rangle = j\left(j+1\right)\hbar^2 J_+ \left| jm \right\rangle \\ J_z J_+ \left| jm \right\rangle = \left(m+1\right)\hbar J_+ \left| jm \right\rangle \end{cases} \\ \begin{cases} \vec{J}^2 J_- \left| jm \right\rangle = j\left(j+1\right)\hbar^2 J_- \left| jm \right\rangle \\ J_z J_- \left| jm \right\rangle = \left(m-1\right)\hbar^2 J_- \left| jm \right\rangle \end{cases} \end{cases}$$

Il vient alors :

$$J_+ | jm\rangle = C_+ | jm+1\rangle \text{, et}$$

$$J_- | jm\rangle = C_- | jm-1\rangle .$$

<u>4.5. Valeurs propres</u> de $\vec{J}^2$ et J_z :

Limites de m :

$$\begin{cases} \left\| J_+ | jm\rangle \right\|^2 = 0 \Rightarrow m = j \\ \left\| J_- | jm\rangle \right\|^2 = 0 \Rightarrow m = -j \end{cases} \Rightarrow \boxed{-j \le m \le j}$$

<u>4.6. Kets propres communs</u> à $\vec{J}^2$ et à J_z

$$\boxed{\begin{cases} J_+ | j\ m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\, | j\ m+1\rangle \\ J_- | j\ m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\, | j\ m-1\rangle \end{cases}}$$

dans une base standard, on a choisit une phase.

Avec $\{| j\ m\rangle\}$ une base orthonormée.

Orthogonalité :

$$\langle l\ m | l'\ m'\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Fermeture :

$$\sum_{lm} | l\ m\rangle\langle l\ m| = Id$$

<u>4.7. Application au moment cinétique orbital :</u>

$$\boxed{\left(\vec{L}\right)_{\{|\vec{r}\rangle\}} = -i\hbar\vec{r} \wedge \vec{\nabla}}$$

avec $\vec{\nabla} = \vec{u}_r . \dfrac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + \vec{u}_\varphi \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$

Pour les composantes de $\vec{L}$, on a donc :

$$\boxed{\begin{cases} (L_x)_{\{|\vec{r}\rangle\}} = i\hbar\left(\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\cos\varphi}{\tan\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ (L_y)_{\{|\vec{r}\rangle\}} = i\hbar\left(-\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\sin\varphi}{\tan\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ (L_z)_{\{|\vec{r}\rangle\}} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \end{cases}}$$

$$\begin{cases} (L_+)_{\{|\vec{r}\rangle\}} = \hbar e^{i\varphi}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{i}{\tan\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ (L_-)_{\{|\vec{r}\rangle\}} = \hbar e^{-i\varphi}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{i}{\tan\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right) \end{cases}$$

Equations aux valeurs propres en coordonnées sphériques :

$$\boxed{\left(\vec{L}\right)_{\{|\vec{r}\rangle\}} = -\hbar^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{\tan\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)}$$

<u>4.8. Harmoniques sphériques</u> :

$$\begin{cases} (L_+)Y_l^m(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}.Y_l^{m+1}(\theta,\varphi) \\ (L_-)Y_l^m(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}.Y_l^{m-1}(\theta,\varphi) \end{cases}$$

Et on a pour les opérateurs moments cinétique :

$$\begin{cases} (L_z)Y_l^m(\theta,\varphi) = \hbar m Y_l^m(\theta,\varphi) \\ \left(\vec{L}^2\right)Y_l^m(\theta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1)Y_l^m(\theta,\varphi) \end{cases}$$

On obtient :

$$\boxed{Y_l^m(\theta,\varphi)=(-1)^{m+|m|}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}}$$

LE SPIN.

On bâtit l'opérateur de spin, $\vec{S}$, tel que : $\vec{S}$ est un moment cinétique,

$\vec{S}$ est une observable pour l'espace des états de spin.

$$\begin{cases}[S_x,S_y]=i\hbar S_z\\ [S_y,S_z]=i\hbar S_x\\ [S_z,S_x]=i\hbar S_y\end{cases}$$

S_x, S_y, S_z et $\vec{S}$ agissent dans un nouvel espace, l'espace des états de spin : $\mathcal{E}_S$ dans lequel $\{\vec{S}^2,S_z\}$ constituent un ECOC . Une base de ces états est $\{|sm_s\rangle\}$:

$$\begin{aligned}\vec{S}^2|sm_s\rangle&=\hbar^2.s(s+1)|sm_s\rangle\\ S_z|sm_s\rangle&=\hbar.m_s|sm_s\rangle\end{aligned}.$$

Cas du spin $1/2$:

$$s=\frac{1}{2}\Rightarrow m_s=\begin{cases}+1/2\\ -1/2\end{cases}$$

Dans la base des états de spin $\left\{\left|1/2\ 1/2\right\rangle,\left|1/2\ -1/2\right\rangle\right\}$, on a les représentation matricielles :

$$(S_+)=\begin{pmatrix}0&\hbar\\0&0\end{pmatrix},\quad (S_x)=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad (S_z)=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$(S_-)=\begin{pmatrix}0&0\\\hbar&0\end{pmatrix},\quad (S_y)=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad (\vec{S}^2)=\frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

<u>2. Matrices de Pauli :</u>

On appelle matrice toute matrice σ telle que :

$\boxed{(\vec{S})=\frac{\hbar}{2}(\vec{\sigma})}$, ici :

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Principales propriétés des matrices de Pauli :

$$\sigma_x^{\ 2}=\sigma_y^{\ 2}=\sigma_z^{\ 2}=Id$$

$$\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x=0$$

$$\sigma_x\sigma_y=i\sigma_z$$

$$\sigma_y\sigma_z=i\sigma_x$$

$$\sigma_z\sigma_x=i\sigma_y$$