

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
Faculté des Sciences



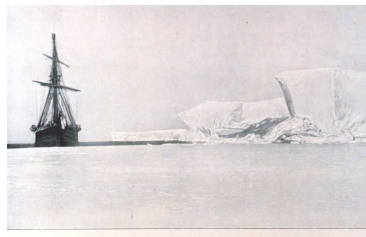
Océanographie Physique
VERSION PRELIMINAIRE

François Ronday et Jean-Marie Beckers

Année académique 2004-2005

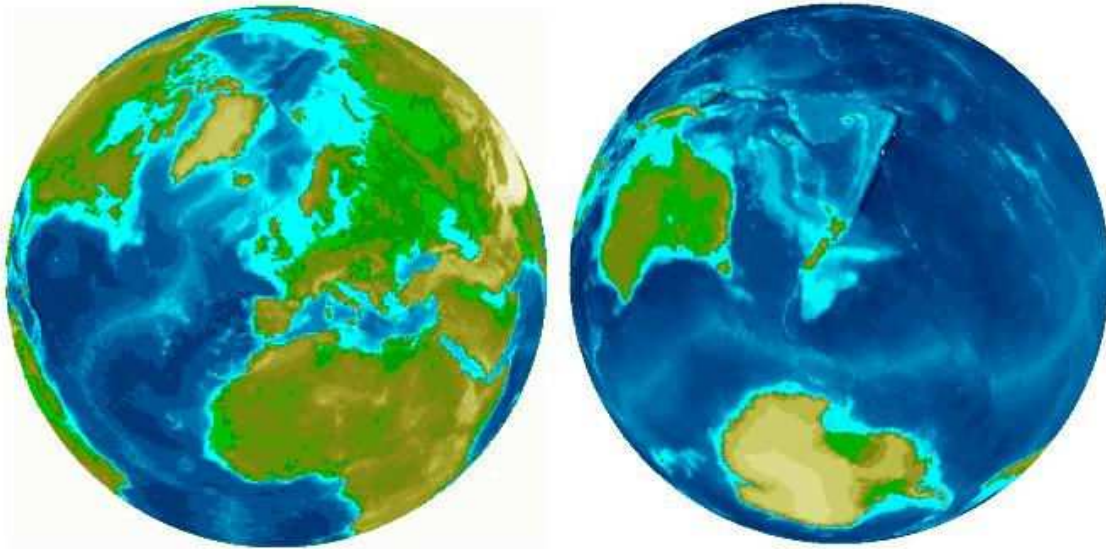
Chapitre 1

Description locale des océans



THE "FRAM" AT THE ICE EDGE, JANUARY, 1893.

© 18



© 21

Figure 1.1 : *Bassins océaniques.*

1.1 Système étudié, localisation

1.1.1 Géographie

L'océan couvre une grande partie de notre planète surtout dans l'hémisphère Sud (figure 1.1). L'océan dont la profondeur moyenne est de l'ordre de 3800 m (figure 1.3) est entouré par des plateaux continentaux (figure 1.2) qui, à certains endroits, peuvent être très vastes et former de véritables mers dites continentales comme la mer du Nord. Par convention, la limite du plateau continental est située près de la cassure à une profondeur de 200 m.

Les plateaux continentaux ne couvrent que 8% des espaces océaniques (figure 1.4) alors que les mers elles-mêmes couvrent 71% de la surface de la planète.

Notons que lors de l'étude du système marin, on distingue souvent les mers fermées (typiquement la Méditerranée ou la Mer Noire) qui n'ont qu'un échange restreint avec le reste de l'océan, les mers semi-fermées (Golfe du Mexique) où un même courant pénètre et ressort, les mers tropicales des mers arctiques etc ...sachant que cette caractérisation permet souvent de cerner le fonctionnement de la mer en comparaison avec d'autres mers du même type.

1.1.2 Discipline

Nous nous intéresserons à la dynamique des masses d'eau qui résulte de l'action du vent, des marées (lunaires et solaires), des anomalies de la masse volumique de l'eau et de la pente de la surface. Dans la suite, seront décrites les caractéristiques physiques de l'eau de mer et les propriétés de la glace marine et ses mécanismes de formation.

On peut noter que l'océanographie physique est encore une relativement jeune branche de la science. En effet, en dehors de la théorie mathématique des marées de Laplace en 1775,

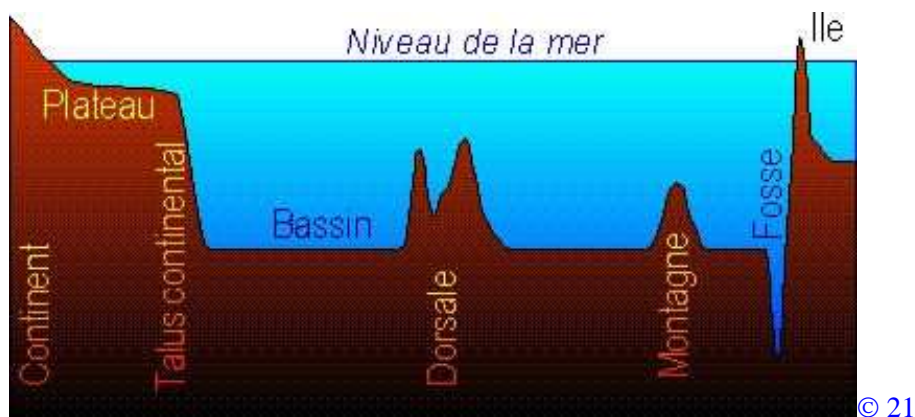


Figure 1.2 : Formes des bassins océaniques.

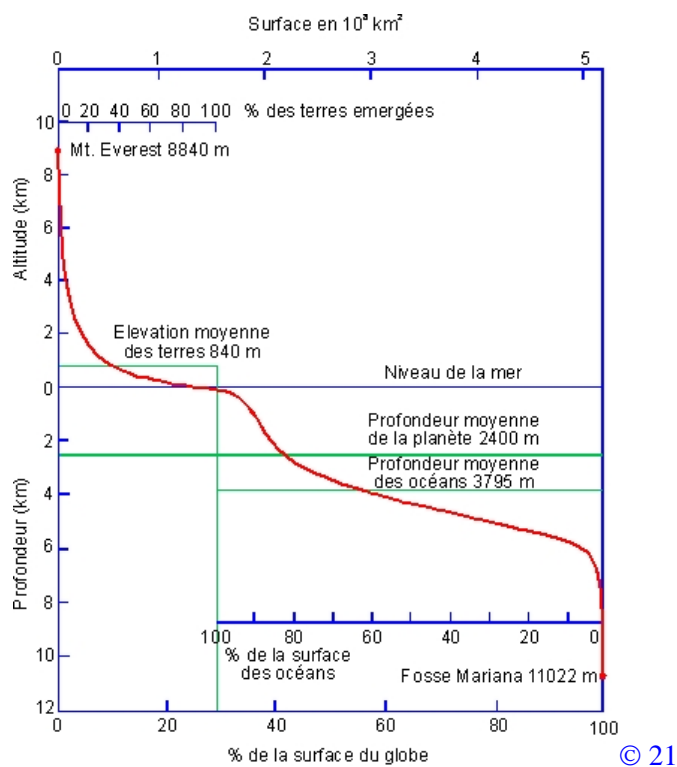


Figure 1.3 : Distribution de la topographie sur la terre.

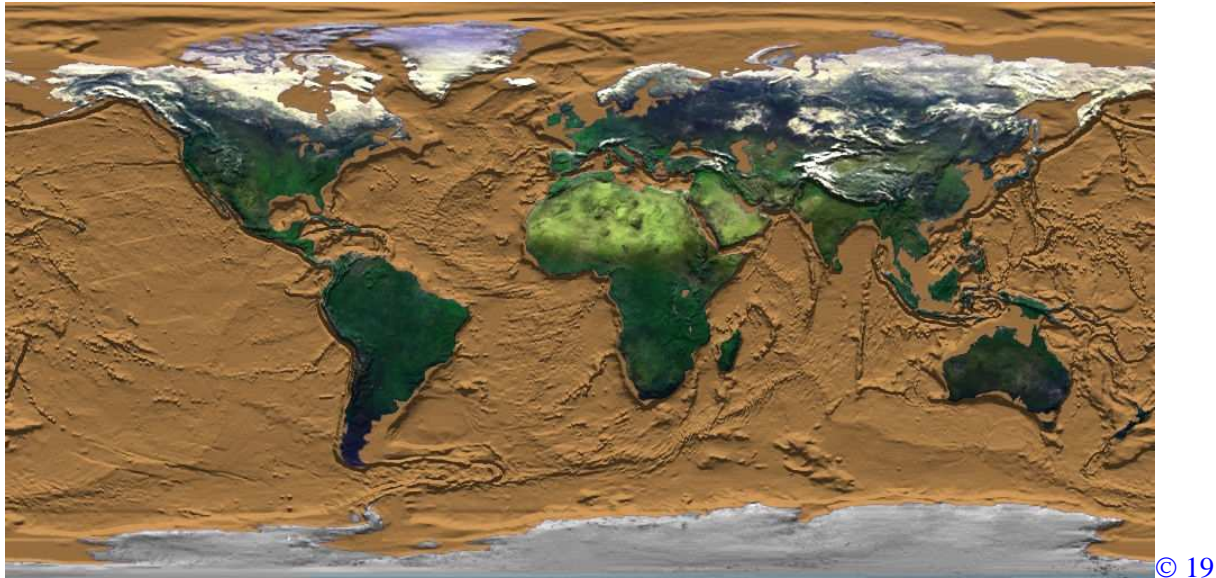


Figure 1.4 : *Topographie des fonds marins.*

l'océanographie physique était essentiellement descriptive et basée sur des observations faites lors des grandes expéditions du 15-16 ième siècle et l'ouverture des routes marchandes. Ces observations concernaient évidemment surtout les courants de surface et c'est seulement en 1751 que Henri Ellis a effectué des sondages dans les tropiques indiquant l'existence d'eaux froides en profondeur sans toutefois pouvoir expliquer leur origine (le mécanisme de refroidissement et de descentes aux pôles suivi de réchauffements et remontées à l'équateur fut proposé en 1800 par Rumford). Une étude systématique comme dans d'autres domaines de la science s'avérait nécessaire et l'expédition du Discovery (1872-1876) fut probablement l'initiateur de cette approche en océanographie. Les résultats de cette expédition ont été combinés avec les théories hydrodynamiques du 19ième siècle pour donner lieu à une première étude dynamique des océans. Ces théories ont ensuite été adaptées et particularisées pour les processus océaniques avant que l'avènement d'ordinateurs permette dans les années 60 d'élaborer des modèles numériques de circulation.

1.2 Propriétés physiques locales de l'eau de mer

Dans cette section, nous allons énumérer les propriétés physiques mesurables qui permettent de caractériser les eaux de mer sans faire appel à des processus dynamiques mais seulement à des quantités observables.

1.2.1 Pression

Une mesure simple effectuée en mer est la mesure de la pression (manomètres). Afin d'avoir une estimation des ordres de grandeur des pressions observées en mer, considérons (figure 1.5)

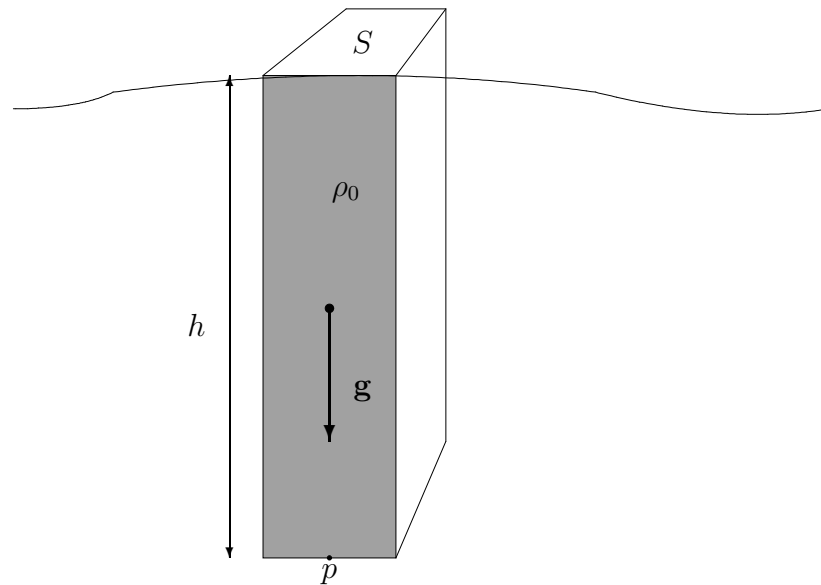


Figure 1.5 : Pression hydrostatique d'une colonne d'eau homogène de densité constante ρ_0 .

un océan homogène au repos¹. Dans ce cas, la pression, en équilibre hydrostatique, est le poids de la colonne d'eau surmontant le point en question par unité de surface²:

$$p = \frac{(\rho_0 h S) g}{S} = \rho_0 g h.$$

La densité de l'eau de mer vaut typiquement $\rho_0 = 1024 \text{ kg/m}^3$ (légèrement plus importante que la densité de l'eau pure, nous verrons dans la suite pourquoi), et la pression à 10 m vaut 100352 N/m^2 , soit une valeur proche de la pression atmosphérique³, alors qu'à 1000 m la pression sera 100 fois plus importante que la pression en surface.

Nous constatons que les pressions dans les océans sont énormes et que de la mesure de la pression on peut facilement estimer la profondeur à laquelle la mesure de pression a été effectuée $h \sim p/(0g)$. La mesure de la pression absolue sera en réalité utilisée dans les sondes CTD pour estimer la profondeur à laquelle la mesure a été effectuée. Comme la pression varie d'à peu près $10000 \text{ N/m}^2 = 0.1 \text{ bar}$ par m de profondeur, il est de coutume d'exprimer les mesures de pression en dbar = 0.1 bar, puisque dans ce cas, on sait immédiatement la profondeur approximative à laquelle la mesure a été effectuée, un dbar correspondant à un m. Pour la même raison on a fait abstraction de la pression atmosphérique.

On peut mentionner que la mesure de la position verticale par la longueur d'un câble est peu précise (et généralement moins précise que celle par l'utilisation de la pression) par l'inévitable extension sous tension du câble et le caractère non-vertical de la descente de sondes.

¹Cette analyse sera justifiée *a posteriori* par le fait que la pression dynamique est faible et que les variations de densité sont faibles par rapport à la valeur de ρ_0 .

²à laquelle il faudrait le cas échéant ajouter la pression atmosphérique.

³1 atm $\equiv 101325 \text{ N/m}^2$.

Notons déjà que les pressions absolues sont énormes mais que ce qui comptera dans la *dynamique* des mouvements sont les *différences* de pression entre les endroits, différences qui seront plusieurs ordres de grandeur plus faibles que la pression absolue.

1.2.2 Température

Une mesure simple et historiquement parmi les premières est évidemment la mesure de la température de l'eau de mer. Ici, sauf indication contraire, la température, désignée par T sera exprimée en Celsius.

1.2.3 Salinité

La salinité est un concept qui a évolué au cours des années. Les océanographes ont tout d'abord relié le concept de salinité à la quantité d'ions (table 1.1) présents dans l'eau de mer. Elle est alors définie comme étant le rapport de la masse de toutes les matières dissoutes à celle de l'échantillon d'eau de mer et de façon plus précise. Par définition, la salinité d'un échantillon de 1 kilogramme d'eau de mer est la masse totale des matières solides dissoutes dans l'eau de mer quand tous les carbonates sont convertis en oxydes, les bromures et iodures remplacés par des chlorures et toutes les matières organiques oxydées.

Comme on a constaté dès le voyage du Discovery que les sels dissouts sont toujours présents dans les mêmes proportions entre-elles (et que seule la quantité d'eau pure dans le mélange varie d'un endroit du globe à l'autre), la mesure de la concentration d'un des constituants permet de calculer la quantité totale de sels par une règle de proportionnalité. Ceci était utile par le fait que la définition originale de la salinité ne se prête pas facilement à une méthode de mesure *in situ* facile. Différentes mesures indirectes de la salinité ont donc été proposées. Au début, en supposant que les proportions des différents ions restent effectivement constantes, on pouvait déduire la salinité par une mesure de la chlorinité $[Cl]$ (en g/kg mesure par titrage facile au nitrate d'argent du chlore, brome et iode

$$S = \frac{34.482}{18.980 + 0.065 + 0.05} [Cl] = 1.806 [Cl]. \quad (1.1)$$

Ainsi, on a associé le concept de salinité à celui de chlorinité par une formule apparemment simple basée sur le fait expérimental que les rapports de la concentration des ions principaux à celle des ions chlores sont quasi-constants.

Cependant, avec l'avènement des capteurs mesurant la conductivité de l'eau de mer qui est directement reliée au nombre d'ions dans la solution et donc *in fine* à la salinité, on a préféré directement exprimer la salinité en fonction d'une conductivité mesurée et comparée à la mesure de conductivité d'une masse d'eau de référence à pression atmosphérique (ce qui nécessite le recalibrage régulier des CTD sur cette masse d'eau de référence).

C'est la valeur de la salinité qui est obtenue par cette mesure (et les formules en annexe A.4) qui est actuellement appelée "la salinité".

Remarque: Dans le passé, la salinité a donc été exprimée dans différentes unités (psu, pm) dont les valeurs numériques ne diffèrent que peu en fonction du type de mesures utilisé. Nous ne distinguerons pas ces cas dans la suite et nous nous

Ion	Pourcentage en poids de tous les sels dissous	Pourmille en poids d'une eau de mer moyenne
Cl ⁻	55.04	18.980
Na ⁺	30.61	10.556
SO ₄ ⁻⁻	7.68	2.649
Mg ⁺⁺	3.69	1.272
Ca ⁺⁺	1.16	0.400
K ⁺	1.10	0.380
HCO ₃ ⁻	0.41	0.140
Br ⁻	0.19	0.065
I ⁻	0.14	0.05
H ₂ BO ₃ ⁻	0.07	0.026
Sr ⁺⁺	0.04	0.013

Tableau 1.1 : Composition de l'eau de mer en proportion relative (par rapport aux autres ions) et par rapport à une eau de mer de salinité 34.482 (somme de la colonne de droite).

limiterons à l'utilisation de la salinité sans unité tel que recommandé actuellement par la système SI. Nous désignerons cette salinité par S et les valeurs numériques seront par exemple 38.0 pour une salinité en Méditerranée. Notons également que la mesure de la conductivité ou de la chlorinité ne permet de déterminer la salinité par les formules indiquées que pour une eau ayant la même proportion relative d'ions. Pour un lac particulier ou un estuaire particulier, ceci peut être mis à défaut et demande alors une détermination de la salinité classique et la densité déduite.

1.2.4 Masse volumique (ou densité)

La masse volumique et ses variations spatiales jouent des rôles très importants dans la dynamique des masses d'eau. Contrairement aux caractéristiques précédentes, on ne mesure généralement pas directement la masse volumique de l'eau de mer (à savoir la masse de l'eau de mer par unité de volume), mais on la déduit des variables T , S et p par une équation d'état. La thermodynamique nous apprend en effet l'existence d'une telle relation qui doit être établie expérimentalement. La masse volumique ρ de l'eau de mer s'exprime alors, en première approximation, en fonction des trois variables: température (T), salinité (S) et pression (p):

$$\rho = \rho(S, T, p). \quad (1.2)$$

L'équation d'état utilisée par la communauté scientifique est celle dite "Equation d'Etat Internationale (1980)" et est fournie en annexe A.1. Elle est aujourd'hui implementée dans différents codes de calculs pour les applications chiffrées réelles et utilise comme pression l'écart de pression par rapport à la pression atmosphérique en dbar.

Pour les besoins d'analyse théorique, on peut exploiter le fait que la densité de l'eau de mer ne varie pas énormément (finalement, le composant majeur de l'eau de mer reste l'eau!). Dans ce cas on peut effectuer un développement en série de la fonction donnant la masse volumique

autour d'un état de référence limité au premier ordre:

$$\rho = \rho(S_0, T_0, p_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial S} \right|_0 (S - S_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_0 (T - T_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0 (p - p_0), \quad (1.3)$$

où les dérivées sont prises au point de référence $T = T_0$, $S = S_0$, $p = p_0$ autour duquel la linéarisation a été effectuée.

On peut réécrire cette linéarisation de la façon suivante

$$\rho = \rho_0 (1 + k_S(S - S_0) - \beta(T - T_0) + k_p(p - p_0)), \quad (1.4)$$

où l'on a fait apparaître le coefficient d'expansion thermique β

$$\beta \equiv \left. \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_0, \quad (1.5)$$

le coefficient de contraction haline k_S

$$k_S \equiv \left. \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial S} \right|_0, \quad (1.6)$$

le coefficient de compression k_p

$$k_p \equiv \left. \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0, \quad (1.7)$$

et où l'indice montre que les variables sont évaluées au point de référence. Pour une eau de $T = 15^\circ\text{C}$, $S = 35$, $p = 0$ dbar:

$$\rho_0 = 1025.97 \text{ kg/m}^3,$$

$$\beta = 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1},$$

$$k_S = 7.5 \cdot 10^{-4},$$

$$k_p = 4.3 \cdot 10^{-6} \text{ dbar}^{-1},$$

indiquant par là que la salinité tend à augmenter la densité (ajout d'ions), la température à la diminuer (expansion thermique) et la pression à l'augmenter (légère compressibilité).

Remarque: le développement de la masse volumique limité au premier ordre ne peut expliquer certains phénomènes comme le cabelling (voir section 3.3.2: mélange de deux masses d'eau de même masse volumique).

La linéarisation autour de $T = 15^\circ\text{C}$, $S = 35$, $p = 0$ dbar montre que pour cette eau, une diminution de température rend l'eau plus dense. En réalité pour des températures suffisamment basses, il y a un maximum de densité au-delà duquel une diminution additionnelle de la température rend l'eau à nouveau plus légère. Cette propriété est bien connue en eau douce (les poissons dans les lacs gelés survivent parce que la densité de l'eau douce est maximale à 4°C et que cette eau dense reste au fond des lacs alors que la surface gèle). Pour l'eau de mer, ce

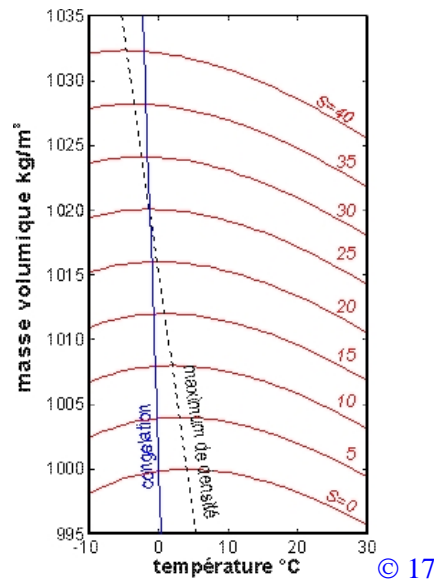


Figure 1.6 : Masse volumique en fonction de la température pour différentes valeurs de salinité. Indication du maximum de densité et de la température de congélation.

maximum de densité dépendra de la concentration en sels, et la température T_m du maximum de masse volumique (à pression atmosphérique) est donnée par

$$T_m = 3.95 - 0.2 S - 0.011 S^2 + 0.00002 S^3. \quad (1.8)$$

De même, la température T_f de congélation de l'eau de mer dépend de la salinité :

$$T_f = -0.0575 S. \quad (1.9)$$

Notons que l'océanographie descriptive fait souvent usage de l'excès de masse volumique σ (ou σ_t pour certains auteurs) (ou anomalie de densité, encore que cette désignation peut également indiquer une anomalie par rapport à une situation climatique ou saisonnière et que densité désigne parfois σ)

$$\sigma \equiv \rho - 1000 \quad (1.10)$$

Remarque: Dans la suite nous utiliserons de façon indifférente le nom densité et masse volumique pour désigner le poids de l'eau de mer par unité de volume.

Nous devons également mentionner que dans l'expression de la masse volumique, les températures et salinités sont les grandeurs mesurées *in situ* et non celles que l'on pourrait mesurer en prenant un échantillon en profondeur (par une bouteille) et en mesurant ensuite en surface. En effet, amener la bouteille en surface (outre l'échange thermique éventuel lors de la remontée) modifie la pression à laquelle la masse d'eau est soumise. Comme l'eau est faiblement compressible, cela se traduira par une modification de sa température par décompression (l'air comprimé d'une pompe à vélo est chauffé et le gaz qui s'échape d'une bombe de spray refroidi) et également de densité.

1.2.5 Température et densité potentielle

Un des problèmes de la température et de la densité *in situ* est le fait qu'elles varient, même si on déplace la masse d'eau sans échanges thermiques et de sels, par simple effet de compression. Il devient alors difficile de comparer des masses d'eau situées à des profondeurs différentes. Comment, en effet savoir, sans faire de calculs détaillés, qu'une masse d'eau à une certaine profondeur est réellement différente d'une autre masse d'eau située ailleurs à une profondeur différente (et donc comprimée différemment)? Pour ce faire il faudrait ramener (sans échange de chaleur et de sels, cad de façon adiabatique) ces deux masses d'eau vers une même profondeur commune avant d'en mesurer les propriétés. Ceci n'est évidemment pas faisable en pratique et on introduit une notion de densité potentielle qui permet de calculer (et non mesurer) la valeur de la densité d'une masse d'eau quand on la déplacerait de son niveau réel vers une profondeur de référence conventionnellement prise en surface. On appelle cette densité la densité potentielle ρ_θ (et de même excès de masse potentiel σ_θ), qui serait donc la densité que la masse d'eau en question aurait en surface si elle était amenée de sa position réelle vers la surface de façon adiabatique. De la même façon on définit la température potentielle θ comme étant la température que la masse d'eau aurait en surface si on l'amenait à la surface de façon adiabatique. Avec ces définitions, la comparaison des masses d'eau deviendra plus aisée car on pourra comparer leur densité (ou température) potentielle⁴.

Tout comme l'équation d'état, le calcul de la densité (et la température) potentielle est effectué par des formules approximatives programmées, mais du point de vue théorique il faudrait calculer la température potentielle par intégration de

$$\theta = T - \int_0^p \Gamma dp, \quad (1.11)$$

où Γ est appelé le gradient vertical adiabatique de température (chapitre 3.2)

$$\Gamma \equiv \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_{S,\eta}, \quad (1.12)$$

où la dérivée s'effectue à salinité et entropie η constante (par définition de la remontée virtuelle adiabatique et sans échange de sels).

Les différences entre températures locales et températures potentielles se marquent surtout dans les régions profondes (figure 1.7) et pour une analyse d'eaux de surface, la compressibilité de l'eau de mer est généralement négligée, de sorte que l'on travaille indifféremment avec la température locale ou la température potentielle.

1.2.6 Chaleur massique

L'étude des modifications de température de la masse d'eau requiert la connaissance de la chaleur massique et plus particulièrement la chaleur massique $C_p(S, T, p)$ à pression constante. L'ordre de grandeur de sa variabilité, à la pression atmosphérique standard, est : $C_p(40, 40, 0) = 3980 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ et $C_p(0, 0, 0) = 4217 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$.

⁴La salinité définie par la chlorinité n'est que peu influencée par la pression et on ne distingue pas la salinité pratique (salinité "potentielle") de la salinité locale.

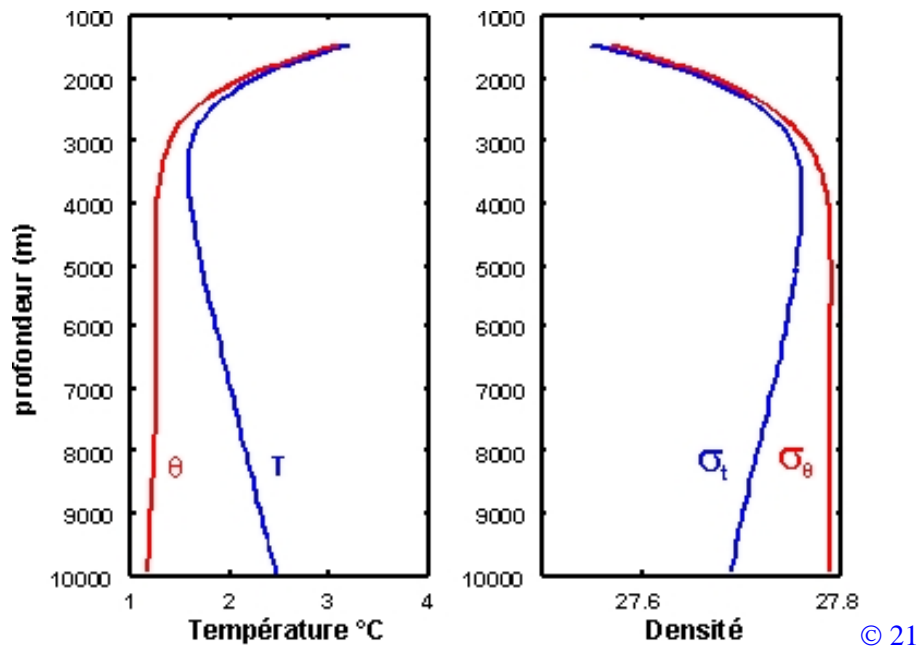


Figure 1.7 : Comparaison des températures *in situ* et potentielles dans la fosse Mindanao près des Philippines

L'influence de la pression sur cette chaleur massique est très faible: $C_p(0, 0, 1000 \text{ dbar}) = 4169 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$.

Adopter une valeur constante de chaleur massique de $4100 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ conduit donc à une faible erreur. En pratique pour les calculs quantitatifs, les formules approximatives existent pour calculer la valeur de C_p en fonction de S, T, p .

Notons que la chaleur massique de l'air est de l'ordre de $1000 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ mais que ce sont des valeurs par kg. Comme la densité de l'air n'est que de l'ordre de $1.2 \text{ kg}/\text{m}^3$, il s'en suit qu'une colonne d'air de 10 km a la même capacité de stocker la chaleur qu'une colonne d'eau de hauteur $\frac{1000 \cdot 1.2}{4100 \cdot 1020} \cdot 10000 = 2.85 \text{ m}$. Ceci explique pourquoi on considère que l'océan joue un rôle majeur dans l'évolution du climat.

1.2.7 Chaleur latente d'évaporation

L'océan ne permet pas seulement d'emmagasiner de la chaleur par sa chaleur massique, mais également par des changements de phase. En effet, évaporer de l'eau de mer requiert $2.25 \cdot 10^6 \text{ J}$ par kg d'eau, et inversement, la condensation de vapeur libèrera la même quantité. Cette quantité de chaleur est appelée chaleur latente d'évaporation:

$$L = 2.25 \cdot 10^6 \text{ J}/\text{kg}. \quad (1.13)$$

1.2.8 Vitesse du son

L'eau est un milieu très efficace pour la transmission du son puisque l'énergie se propage avec une atténuation beaucoup plus faible que dans l'air. Cette caractéristique est utilisée dans

de nombreuses techniques d'investigation du milieu marin.

Quelques sources peuvent être identifiées selon leurs fréquences :

- bateaux 50 à 500 Hz;
- bruit généré par l'action du vent (vagues, pluies) 1 à 20 kHz;
- bulles d'air résultant d'un processus de cavitation 10 à 400 Hz;
- poissons et crustacés 1 à 10 kHz .

La vitesse du son est une grandeur importante en acoustique sous marine : sa valeur caractéristique est de l'ordre de 1450 m/s. Cette vitesse c est reliée, dans le cas d'une transformation isotherme, au coefficient de compressibilité par:

$$c^2 = \frac{1}{\rho k_p}, \quad (1.14)$$

et pourrait donc être calculée à l'aide de l'équation d'état. En pratique, il existent plusieurs formules approchées donnant cette vitesse du son directement en fonction de T, S, p comme par exemple (pour une eau de mer typique) en annexe A.2. Les vitesses typiques sont de l'ordre de

$$c \sim 1500 \text{ m/s}. \quad (1.15)$$

On peut mentionner que la vitesse du son augmente avec la température, la salinité et la pression.

Comme les ondes acoustiques (ondes de pression longitudinales) intéressant le monde océanographique ont une bande spectrale s'étalant de 15 Hz à 1.5 MHz, les longueurs d'onde correspondantes varient entre 10^{-3} et 10^2 m puisque la vitesse du son est de l'ordre de 1500 m/s.

Durant sa propagation, l'onde acoustique subit une atténuation sur laquelle se superposent des réflexions et des réfractions.

Atténuation

L'atténuation par absorption consiste en la transformation de l'énergie mécanique en chaleur. Une partie de l'énergie mécanique est également utilisée dans des mécanismes chimiques. L'absorption de l'énergie acoustique par viscosité est dominante pour l'eau douce aussi bien aux basses qu'aux hautes fréquences. Dans l'eau de mer, aux moyennes et basses fréquences, une partie de l'énergie mécanique est absorbée dans les processus de dissociation de l'ion $Mg(SO)_4$ et du complexe $B(OH)_3$. Les inhomogénéités de la colonne d'eau sont responsables de l'atténuation de l'énergie acoustique dans la région de quelques centaines de Hz.

La dispersion des ondes conduit également à une atténuation du signal. Cette dispersion résulte de réflexions multiples et de dispersions par les bulles d'air et les particules en suspension. La figure ci-dessus (figure 1.8) montre l'atténuation de l'énergie acoustique en fonction de la fréquence pour différents types d'eau.

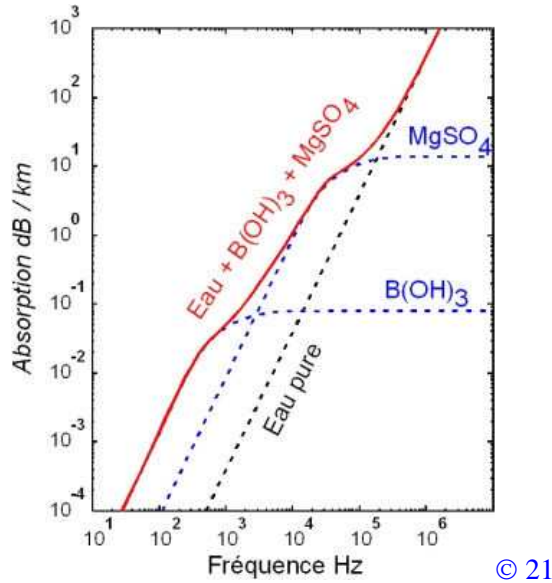


Figure 1.8 : Absorption du son.

Réfraction

Etant donné la variabilité spatiale de la température et de la salinité, il en résulte une variabilité spatiale de la vitesse du son influençant ainsi la propagation des ondes acoustiques : phénomènes de réfraction, zones d'ombre et canaux acoustiques.

Une onde qui se propage est sujette à des processus de réfraction et de réflexion. L'étude de la propagation des ondes acoustiques est facilitée par la technique des rayons acoustiques (l'équivalent des rayons lumineux).

Les lois de la réflexion et de la réfraction (identiques à celles de l'optique géométrique) sont données ci-dessous :

Pour un rayon incident réfracté entre deux milieux de vitesse de propagation respectifs c_i et c_r

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_i}{c_r}, \quad (1.16)$$

alors que pour un rayon réfléchi (si $\sin i > \frac{c_i}{c_r}$)

$$i = r', \quad (1.17)$$

où i, r', r sont les angles que font les rayons incidents, réfléchis et réfractés par rapport à la normale à la surface de discontinuité (figure 1.9).

A un profil de température caractéristique (chapitre 2.2.2) de l'océan correspond une structure en trois régions pour la vitesse du son et le "ray diagram" (figure 1.10) présente la forme des rayons acoustiques émis par une source ponctuelle. La plupart des rayons sont "concentrés" dans une région située au minimum de la vitesse du son. Dans cette zone, les rayons réfractés sont piégés par réfraction : cette zone porte le nom de canal acoustique. Par contre les zones situées en dessous d'un maximum de la vitesse du son ne sont pas atteintes par les sons émanants de la surface. Une zone d'ombre est donc située en dessous du maximum de la vitesse du son (figure 1.11).

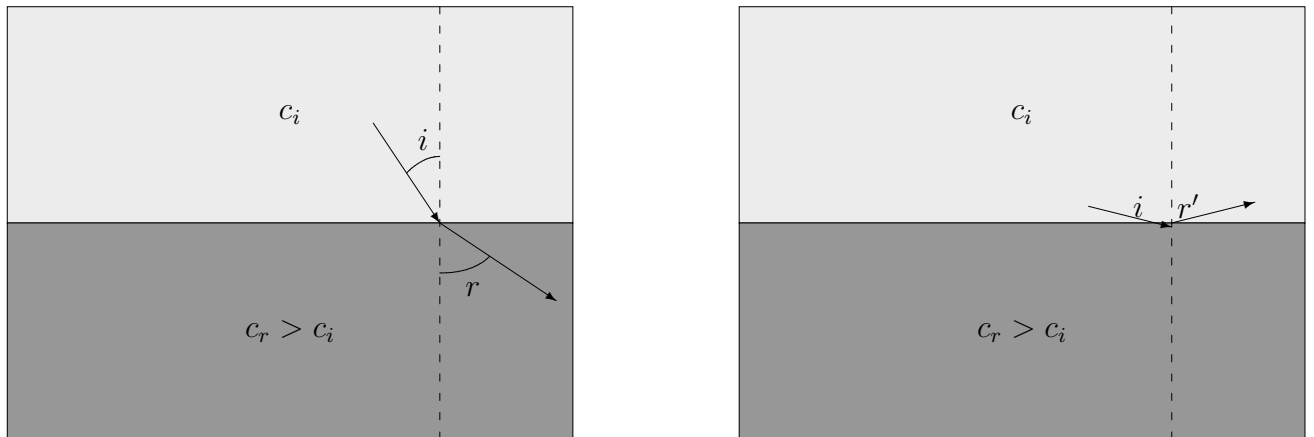


Figure 1.9 : Réfraction et réflexion à une discontinuité.

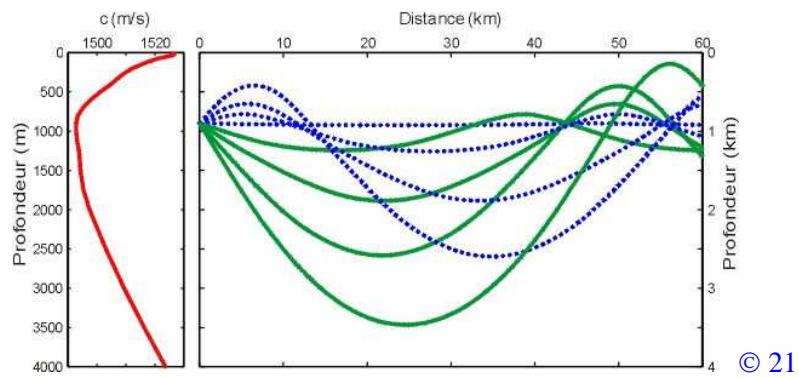


Figure 1.10 : Vitesse du son sur une verticale et propagation d'ondes dans une section verticale associée: guide d'onde.

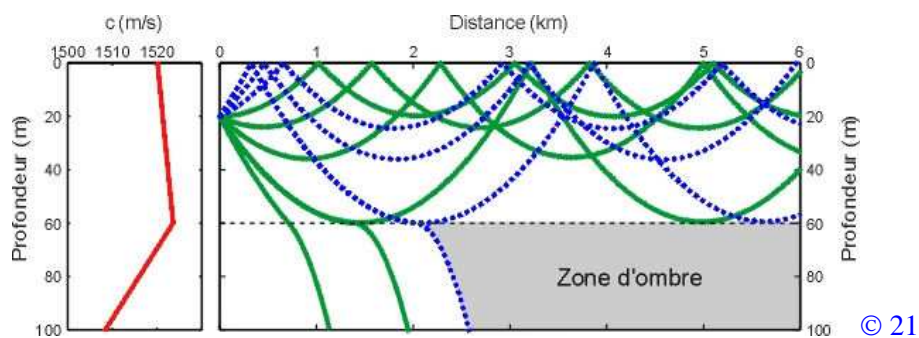


Figure 1.11 : Vitesse du son sur une vertical donnant lieu à des zones "d'ombre".

Matériau	Vitesse du son c (m/s)	Coefficient de réflexion dans l'eau de mer
Air (20°C)	343	100
Eau salée ($S = 35$, $T = 15$ °C)	1500	
Chair d'un poisson frais	1450	1.9
Squelette d'un poisson frais	1700	24
Acier	6100	94
Calcaire	3300	67
Argile	3000	67
Granit	5925	82

Tableau 1.2 : Coefficients de réflexion entre l'eau de mer et différents milieux.

Réflexion sur des obstacles

La réflexion d'une onde acoustique se produit à la surface de discontinuité entre deux milieux de nature différente. Pour une réflexion normale (à la surface de discontinuité), la réflectibilité (coefficient de réflexion de l'énergie acoustique) varie dans de grandes proportions suivant la nature du milieu.

Un coefficient de 100% signifie que toute l'onde acoustique est réfléchi sur l'interface.

L'étude de la propagation des ondes acoustiques conduit à de nombreuses applications:

- Ecoute des bruits émis par les mammifères marins, les poissons, bateaux et sous-marins ;
- Echosondages en géophysique ;
- Télémétrie sous-marine
- Tomographie acoustique (méthode inverse à l'étude de la propagation du son) pour identifier et analyser les systèmes tourbillonnaires aux méso-échelles et les masses d'eau.

1.2.9 Viscosité, diffusion et conduction thermique

Dans le voisinage immédiat de l'interface air mer, lorsque la vitesse du vent est très faible, et autour de petits organismes marins, les transferts moléculaires de matière et de quantité de mouvement sont prépondérants.

Il est à remarquer (table 1.3) que la viscosité moléculaire baisse lorsque la température augmente alors que c'est le contraire pour les diffusivités. En présence de turbulence, les effets moléculaires sont cependant masqués par les effets turbulents qui seront décrits dans un chapitre ultérieur.

1.2.10 Propriétés optiques

La propagation de la lumière dans l'océan est une discipline en soi et on n'abordera les processus que de façon globale. En réalité, pour connaître la quantité de lumière d'une certaine longueur d'onde qui arrive en un endroit (c'est en général ce qui nous intéresse pour connaître

	Eau pure 0	Eau pure 20	Eau salée (S=35) 0	Eau salée (S=35) 20
Température				
Viscosité cinématique ν	17.87	10.04	18.26	10.49
Diffusivité thermique κ	1.34	1.43	1.39	1.49
Diffusivité $NaCl$	0.0074	0.0141	0.0068	0.0129
Diffusivité O_2			0.012	0.023
Diffusivité CO_2			0.010	0.020

Tableau 1.3 : Coefficients de transport moléculaires ($\times 10^7$ m²/s) dans l'eau à la pression atmosphérique standard (Kraus 1994).

l'apport d'énergie associé), il faudrait suivre le chemin de chaque rayon lumineux arrivant de l'atmosphère. Ceci n'est en pratique pas possible et on se limite parfois à suivre les rayons directs du soleil du côté (flux directs) et les rayons indirects (lumière diffuse). La répartition entre ces deux types de flux dépend de l'inclinaison du soleil, de l'état de l'atmosphère, et de la longueur d'onde.

Pour ce qui est de la dynamique océanique, on suppose connu le rayonnement qui pénètre finalement dans la couche de surface. On observe (figure 1.12) que l'énergie qui arrive à la surface des océans possède un maximum autour de 500 nm (bleu turquoise, à savoir la couleur du ciel) avec un spectre étendu vers l'infrarouge. Après pénétration dans de l'eau claire, on constate que le spectre modifie sa forme et que le maximum d'énergie se situe vers des longueurs d'onde plus courtes (bleu plus foncé) alors que les rayons dans l'infrarouge sont rapidement atténués. Ceci explique que les rayons infrarouges contribuent à l'échauffement de la couche superficielle seulement.

Dans ce cas, on peut calculer la quantité d'énergie E_λ contenue entre une longueur d'onde λ et $\lambda + d\lambda$ absorbée au fur et à mesure de la pénétration par une loi de Beer classique

$$\frac{dE_\lambda}{dz} = k_\lambda E_\lambda, \quad (1.18)$$

où k_λ est un coefficient d'atténuation qui dépend de la longueur d'onde considérée. Comme on suppose connaître E_λ en surface E_λ^0 , il suffit d'intégrer selon la vertical cette équation différentielle pour connaître E_λ en profondeur. Ceci est particulièrement simple quand le coefficient d'atténuation est constant (ce qui nécessite une colonne d'eau homogène):

$$E_\lambda = E_\lambda^0 e^{k_\lambda z}. \quad (1.19)$$

Quand on souhaite connaître l'énergie totale entre deux longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 , il suffit d'intégrer sur toutes les longueurs d'ondes:

$$Q = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_\lambda d\lambda. \quad (1.20)$$

Quand il y a des matières en suspension dans la colonne d'eau, la situation se complique d'avantage, car l'absorption des rayons dépendra de la nature de la matière en suspension. Ainsi (figure 1.13), des eaux troubles atténuent très fortement l'intensité (le coefficient d'atténuation

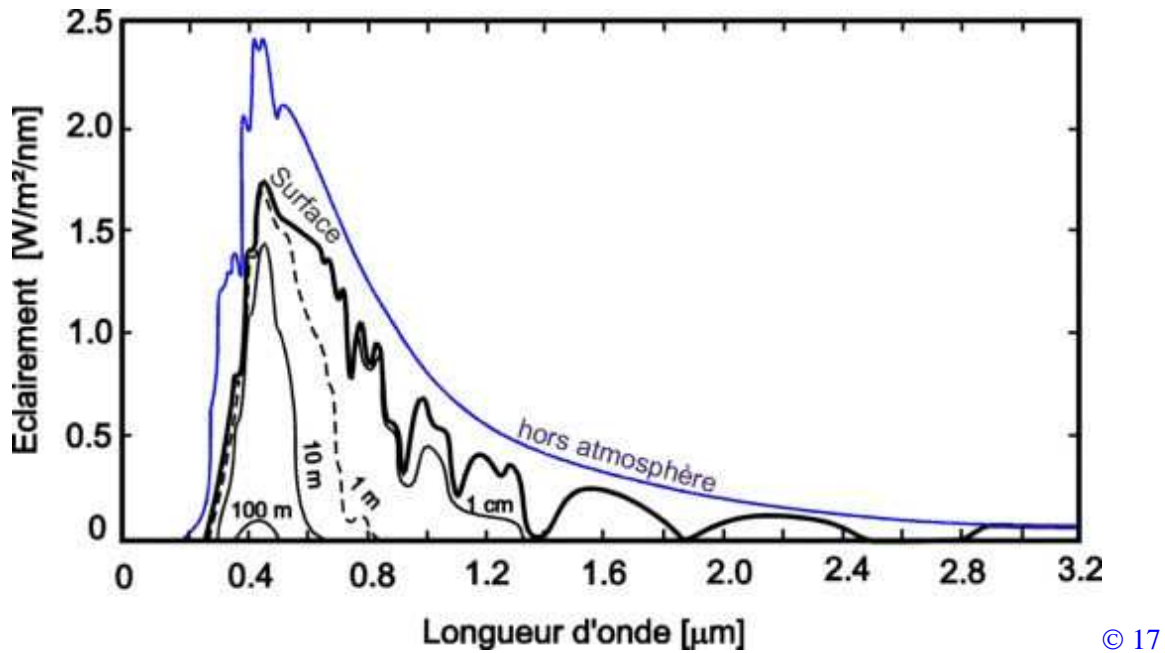


Figure 1.12 : Spectre de la lumière naturelle dans l'atmosphère et dans l'eau très claire.

est plus élevé), mais ce de façon différente en fonction de la longueur d'onde. Dans le cas illustré, les eaux troubles riches en matière organiques absorbent d'avantage dans une plage de 300 – 450 nm et 650 – 700 nm de sorte que l'énergie qui arrive plus en profondeur se situe plutôt dans la plage autour de 550 nm.

Cette absorption préférentielle dans certaines plages de longueurs d'ondes s'explique par la photosynthèse qui se réalise en absorbant, selon les matières organiques présentes, dans une plage bien spécifique du spectre (figure 1.14).

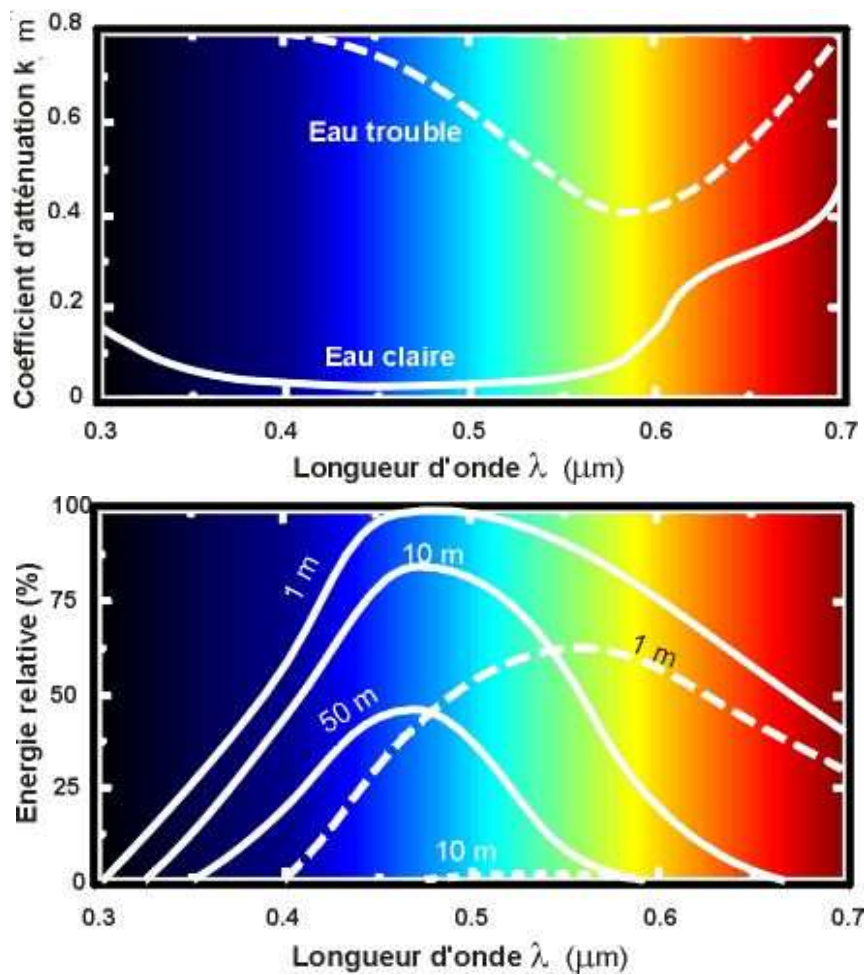
Comme les matières organiques ne sont souvent pas distribuées de façon homogène, le coefficient d'atténuation sera alors fonction de la profondeur à travers la présence de matières organiques.

Quand on souhaite calculer l'absorption d'énergie et de rayonnement dans la colonne d'eau, il faut donc en connaître la composition et les coefficients d'atténuation en fonction de la longueur d'onde.

Pour simplifier d'avantage, on fait souvent appel à une globalisation du rayonnement. Comme du point de vue photosynthèse, la partie intéressante du spectre se situe dans la plage de 350 – 700 nm, on définit le rayonnement photosynthétiquement actif (PAR= photosynthetically active radiation) comme étant l'énergie totale contenue dans la bande 350 – 700 nm et on intègre l'énergie entre $\lambda_1 = 350$ nm $\lambda_2 = 700$ nm à ne pas confondre avec l'énergie totale du rayonnement entre $\lambda_1 = 0$ nm $\lambda_2 = \infty$ nm. Le rapport entre la PAR et l'énergie de rayonnement total se situant typiquement autour d'une moyenne de 0.48.

Dans l'eau claire, le coefficient d'atténuation ne varie pas de façon importante dans la plage 350 – 700 nm (figure 1.13), et dans ce cas on peut intégrer facilement pour obtenir

$$PAR(z) = PAR^0 e^{kz}. \quad (1.21)$$



© 17

Figure 1.13 : Evolution du coefficient d'atténuation en fonction de la longueur d'onde et énergie relative (100% à la surface) pour une eau claire et pour une eau trouble riche en matières organiques.

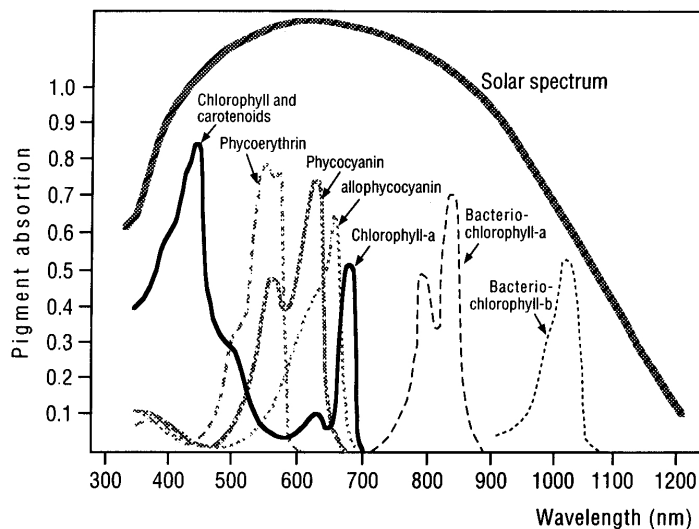


Figure 1.14 : Spectre absorption de pigments importants.

1.2.11 Albédo

Typiquement de 4% à 10% de la radiation incidente est réfléchi (et l'albédo correspondant vaut 0.04 à 0.1), dépendant du zénith du soleil, de l'état de la mer et de la longueur d'onde.

1.3 Propriétés de la glace marine

Quand l'eau de mer est plus froide que sa température de congélation T_f (1.9), elle ne peut rester sous forme liquide et se transforme en glace.

La glace est d'une importance fondamentale tant du point de vue de la navigation que de celui de l'océanologie et de la climatologie. Le rôle de la glace est considérable en raison de sa capacité thermique élevée, de la chaleur latente de changement de phase et de l'albédo de sa surface qui peut atteindre 90% (à comparer à celui d'une interface air-eau de 10%). De plus, la glace flottante transporte des quantités énormes d'énergie. Les échanges entre la mer et l'atmosphère sont évidemment réduits puisque la glace diminue fortement les échanges de chaleur, de quantité de mouvement et de matière au travers de l'interface air-mer.

1.3.1 Masse volumique et expansion thermique

Le coefficient d'expansion thermique est positif ou négatif en fonction de l'intensité de la température et/ou de la salinité. La glace d'eau douce se contracte de manière quasi-constante, son coefficient d'expansion thermique β_{ice} est de l'ordre de :

$$\beta_{ice} \sim 1.7 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}. \quad (1.22)$$

La présence de sels modifie donc le comportement du coefficient d'expansion thermique et la dilatation de la glace marine durant le refroidissement contribue à la formation de ridges de pression et à expulser les embruns.

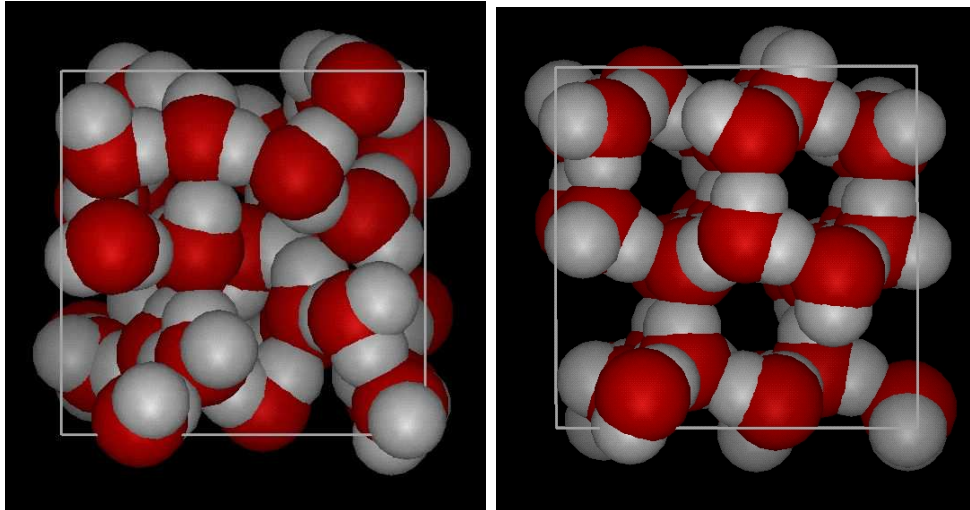


Figure 1.15 : Molécules d'eau (à gauche) et de glace (à droite).

$S \backslash T (^{\circ}\text{C})$	-2	-4	-6	-8	-10	-14	-18	-20
2	-22.10	-4.12	-1.06	0.16	0.83	1.23	1.33	1.38
4	-45.89	-9.92	-3.81	-1.31	-0.02	0.78	0.96	1.07
6	-69.67	-15.73	-6.55	-2.90	-0.88	0.33	0.60	0.76
8	-93.46	-21.53	-9.30	-4.43	-1.73	-0.13	0.23	0.45
10	-117.25	-27.34	-12.05	-5.95	-2.59	-0.59	-0.13	0.14
15	-176.72	-41.85	-18.92	-9.79	-4.73	-1.72	-1.03	-0.63

Tableau 1.4 : Coefficients d'expansion thermique de la glace ($\times 10^4 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$) dans l'eau en fonction de la salinité et la température.

1.3.2 Chaleur massique

La chaleur massique C_{gm} de la glace marine est proche de la valeur de la glace d'eau douce $C_{go} = 2114 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ mais dépend également de la salinité et de la température. La littérature donne différentes relations entre ces grandeurs ; celle qui apparaît la moins contestée est donnée en annexe A.6.

1.3.3 Viscosité et conduction

Comme la glace marine n'est pas un fluide, il faut faire appel à la mécanique du solide déformable pour décrire la déformation de la glace et les déplacements induits par les forces appliquées. Ceci sort du cadre du cours et fait appel à la rhéologie des glaces. Ici nous nous limitons à mentionner les équations constitutives liées aux flux de chaleur. Le coefficient de conduction thermique κ_{go} de la glace d'eau douce est de l'ordre de

$$\kappa_{go} = 2.03 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C}). \quad (1.23)$$

Comme pour la chaleur de fusion de la glace marine, on ne peut donner de relation précise pour le coefficient de conduction de la glace marine .

L'ordre de grandeur du coefficient de conduction thermique κ_n de la neige est:

$$\kappa_n = 0.31 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C}), \quad (1.24)$$

ce qui indique que la neige est un relativement bon isolant. Notons que l'âge de la neige influence son coefficient de conduction thermique.

1.3.4 Chaleur latente

La chaleur latente de fusion L_{fg} de la glace d'eau pure à la pression atmosphérique vaut:

$$L_{fg} = 3.3 \cdot 10^5 \text{ J}/\text{kg}. \quad (1.25)$$

Etant donné la grande variabilité dans la composition de la *glace marine*, il est difficile de donner une relation empirique précise entre la chaleur latente de fusion de la glace marine, la température et la salinité, mais l'ordre de grandeur reste proche de celle de la glace d'eau douce.

1.3.5 Albédo

Comme indiqué, l'albédo de la glace peut atteindre des valeurs de 0.9, indiquant par là que 90% des rayons incidents sont réfléchis.

Exercices

1.1 COMPOSITION RELATIVE DE L'EAU DE MER [N] *Quelle pourrait-être la raison pour laquelle les proportions des constituants (ions de sels) de l'eau de mer sont partout les mêmes et que seul la quantité totale des sels dans l'eau varie d'un endroit à l'autre?*

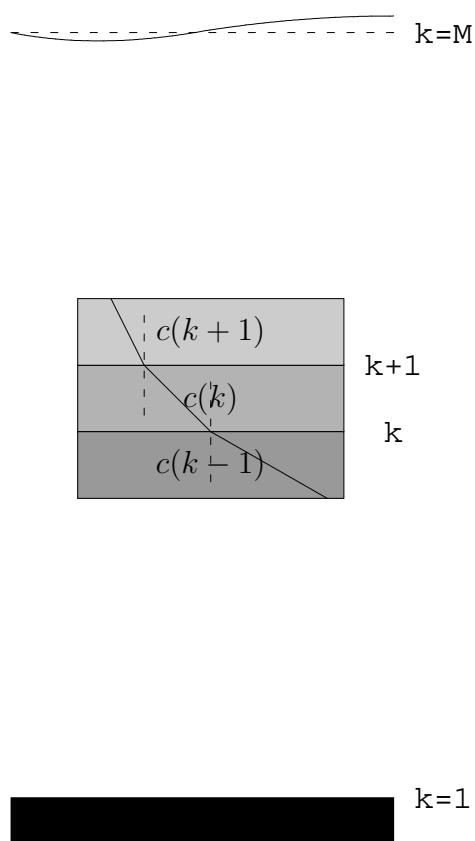


Figure 1.16 : Conventions de notations pour le calcul des rayons sonores.

1.2 EQUATION D'ÉTAT [N] On mesure une eau de surface de $T = 18^\circ\text{C}$ et de salinité $S = 38$ à Calvi alors qu'à 100 m de profondeur $T = 14^\circ\text{C}$ et $S = 38.2$. Calculer la densité pour ces deux mesures. Commenter.

Pour le calcul de la densité, les outils suivants peuvent être utilisés et éventuellement comparés au résultat de l'équation d'état linéarisée (1.4).

- [Calculateur java ies80js.html](#)© 21
- [Même calculateur ies80.m](#)© 21 mais pour [MATLAB](#)®
- [Calculateur seawater.html](#)© 23

1.3 GUIDE D'ONDE SONORE [TD] On calculera la propagation de rayons sonores en découpant un profil de vitesse du son en couches homogènes auxquelles on applique les lois de réfraction/réflexion aux interfaces entre les couches.

- Pour le code de calcul on s'inspirera d'un code existant ([code Fortran soundw.f](#)), où on repère par $c(k)$ la vitesse du son de la couche k , et la position de l'interface en dessous de cette couche par κ (de sorte que la position verticale de cette interface est $z = -\Delta z(M - k)$, où Δz est la hauteur de chaque couche)

- On supposera une réflexion totale en surface
- On supposera que si on arrive à la dernière couche de calcul ($\kappa=1$), le rayon est absorbé (ou continue en dehors du domaine).
- [Calculateur seawater.html](#)© 23 peut être utilisé pour le calcul d'un profil de vitesse du son en fonction de S, T, p .

1.4 EQUATION D'ÉTAT LINÉARISÉE [N] En utilisant les fonctions de dérivation formelle et la [fonction densité](#) pour [Mathematica](#)® établir une équation d'état linéarisée autour de $T = 15^\circ\text{C}$, $S = 38$ et $p = 0$ dbar

$$\text{Solution: } \rho = 1028.29 - 0.225109(T - 15) + 0.77236(S - 38) + 0.00441959 p$$

1.5 INTERNATIONALISATION [F] Votre collègue vous fait savoir qu'il vient de mesurer une température de 55°F (Fahrenheit) à une profondeur de 3000 pieds en Méditerranée avec une salinité de 38.4. Que vaut la densité?

$$\text{Solution: } \rho = 1033.11 \text{ kg/m}^3$$

1.6 DÉTECTION DE SOUS-MARINS EN MÉDITERRANÉE [N] Les profils de T, S en Méditerranée indiquent en certains endroits la présence d'eau relativement chaude et salée (l'eau levantine intermédiaire LIW) vers 500 m de profondeur en dessous d'une eau plus froide et moins salée et au-dessus d'une eau également plus froide et moins salée (les eaux profondes). Si un "ping" est utilisé en surface, un sous-marin qui ne voudrait pas être détecté par ce ping, aurait-il intérêt à rechercher ou non à se retrouver en dessous de cette eau intermédiaire?

1.7 LINÉARISATION D'ÉQUATION D'ÉTAT PAR DIFFÉRENCE FINIE [F] Etablir une équation d'état linéarisée autour de $T = 15^\circ\text{C}$, $S = 38$ et $p = 0$ dbar par une différence finie sur la fonction ρ calculée par [Calculateur java ies80js.html](#)© 21.

CHAPITRE II

VARIABILITE DES PRINCIPALES VARIABLES MELANGE et STABILITE DES MASSES D'EAU

II.1 Introduction

Le concept de variabilité des grandeurs physiques caractérisant l'océan est un sujet très vaste. Il existe en effet des variabilités spatiales et temporelles aux petites, moyennes et grandes échelles. La variabilité aux petites échelles, souvent assimilée à de la turbulence (agitation désordonnée), sera discutée brièvement dans le chapitre traitant des courants de surface engendrés par le vent.

Dans ce chapitre sera présentée la variabilité de la température, de la salinité et de la couverture de glace aux grandes échelles temporelles (temps caractéristique supérieur à un jour) et spatiales (longueur caractéristique horizontale supérieure à 100 km et verticale à une centaine de mètres).

II.2 Variabilité spatiale et temporelle de la température

Les valeurs caractéristiques du champ de température sont relativement bien connues et données au Tab.II.1. Elles sont obtenues par le traitement de données déduites, soit de mesures directes basées sur l'utilisation de thermomètres ou de sondes CTD (conductivité, température, profondeur), soit de mesures radio-métriques effectuées à partir d'avions ou de satellites.

*Mean surface temperatures of the oceans
by latitude (°C)*

<i>Latitude</i>	<i>Atlantic Ocean</i>	<i>Indian Ocean</i>	<i>Pacific Ocean</i>
(°N)			
70–60	5.6	–	–
60–50	8.7	–	5.7
50–40	13.2	–	10.0
40–30	20.4	–	18.6
30–20	24.2	26.1	23.4
20–10	25.8	27.2	26.4
10–0	26.7	27.9	27.2
0–10	25.2	27.4	26.0
10–20	23.2	25.9	25.1
20–30	21.2	22.5	21.5
30–40	16.9	17.0	17.0
40–50	8.7	8.7	11.2
50–60	1.8	1.6	5.0
60–70	–1.3	–1.5	–1.3
(°S)			

From H. U. Sverdrup, et al., *The Oceans: their physics, chemistry and general biology*, Englewood Cliff, NJ: Prentice-Hall, 1970.

Tableau II.1 Températures annuelles moyennes des couches superficielles de l'océan. (Extrait de Sverdrup et al., 1970).

La variabilité spatiale et/ou temporelle de la température dans les couches superficielles de l'océan dépend en grande partie de la latitude. Suivant la verticale, les températures décroissent rapidement dans les couches superficielles de l'océan, surtout aux latitudes moyennes, ensuite la décroissance est moins forte.

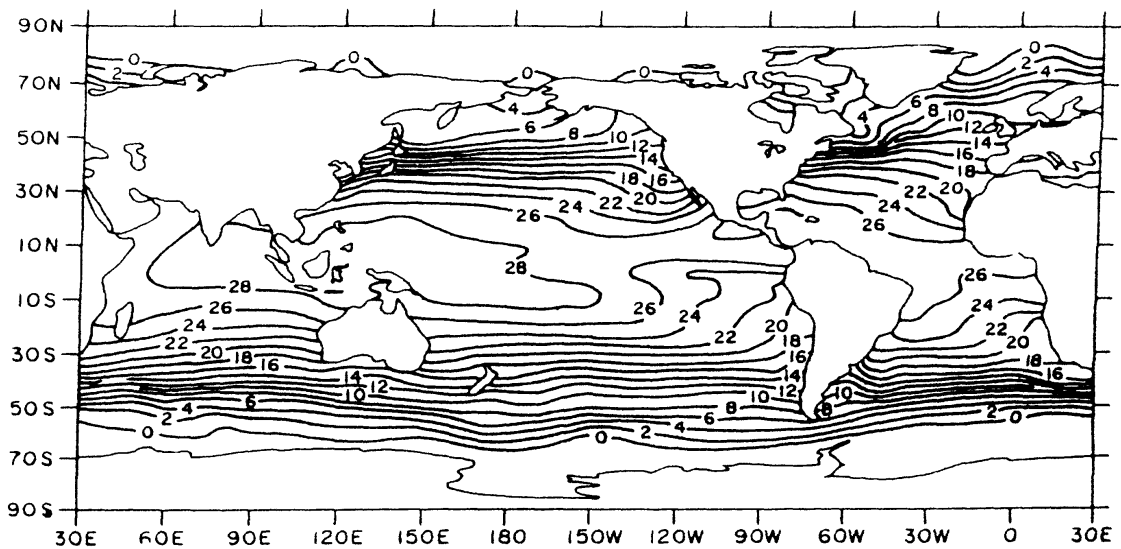


Figure II.1 Températures superficielles annuelles moyennes.

(Extrait de Alexander et Mobley, 1976)

Une coupe verticale dans la partie ouest de l'océan Atlantique (Fig.II.2) donne une idée plus précise de la structure spatiale du champ des températures. Les couches supérieures des océans sont sensibles aux variations temporelles et spatiales des flux énergétiques à l'interface air-mer. Les vents mélangent ces couches et conduisent à une homogénéisation partielle ou complète.

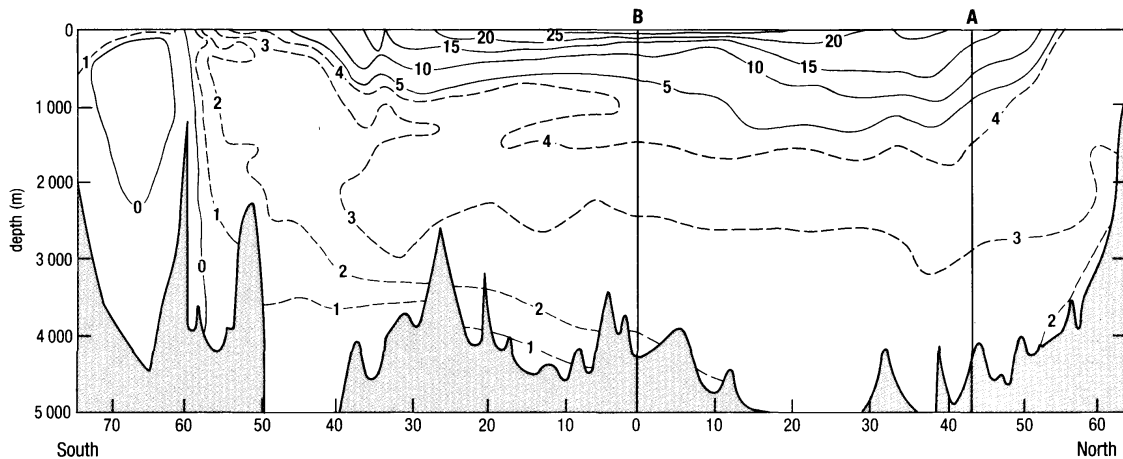


Figure II.2 Distribution de la température dans la partie ouest de l'océan Atlantique. (Extrait de Brown et al., 1989)

La Fig.II.3 présente les structures verticales de température à différentes latitudes et l'évolution temporelle du profil vertical de T au cours d'une année.

Une couche de surface bien mélangée (mixed surface layer) se forme : de l'ordre de 200 à 300m aux latitudes moyennes (Fig.II.3). L'épaisseur de la couche dépend de sa position géographique (longitude et latitude). Juste au-dessous de la « mixed layer » les variations verticales de température sont très grandes et la zone caractérisée par ces maxima de gradient constitue la thermocline principale (Fig.II.3). Au-dessous de la thermocline principale, les variations temporelles et spatiales de la température sont faibles. Le temps de résidence de l'eau est supérieur à un siècle dans les couches profondes de l'océan.

Aux latitudes moyennes, la variabilité temporelle des flux énergétiques est importante et une thermocline saisonnière s'installe en été dans la couche de surface mélangée (mixed surface layer) et disparaît en hiver.

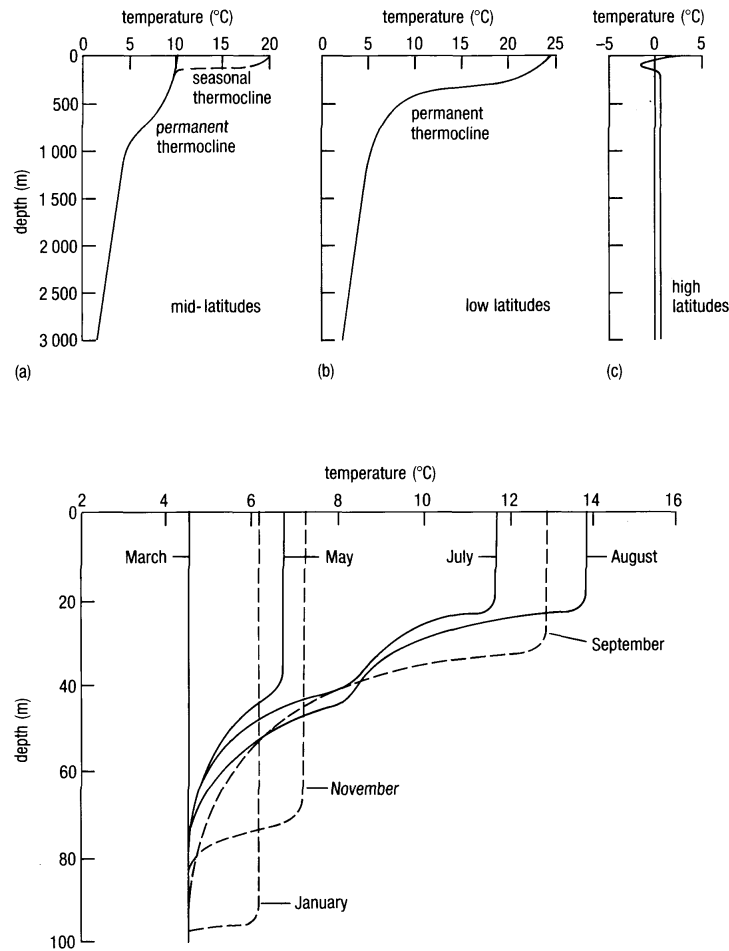


Figure II.3 a) Profils verticaux de la température à différentes latitudes.
 b) Evolution temporelle de la température dans la couche de surface aux latitudes moyennes. (Extrait de Brown et al., 1989)

L'analyse de coupes transversales telles que celle présentée à la Fig.II.2 se fera dans le cadre «océanographie descriptive» du cours d'océanographie physique.

II.3 Variabilité spatiale de la salinité

A part les régions estuariennes et certaines franges littorales, la salinité de l'eau de mer varie dans de faibles proportions. Des valeurs anormalement hautes sont observées en mer Rouge où elle dépasse 40. Les figures II.4 et 5 donnent les variabilités spatiales verticale et horizontale de la salinité. La distribution spatiale de la salinité est liée aux phénomènes d'évaporation et de précipitation.

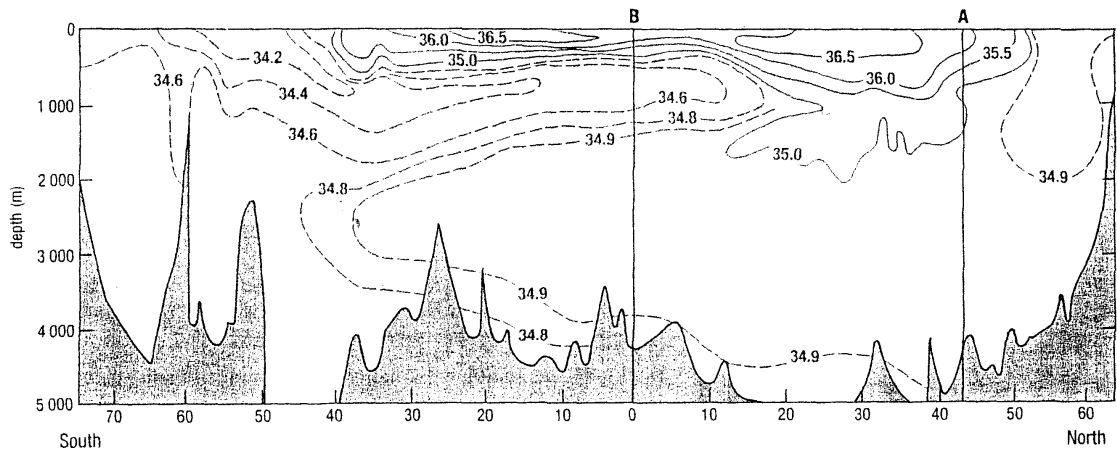


Figure II.4 Salinité moyenne dans une section verticale de la partie ouest de l'océan Atlantique. (Extrait de Brown et al., 1989)

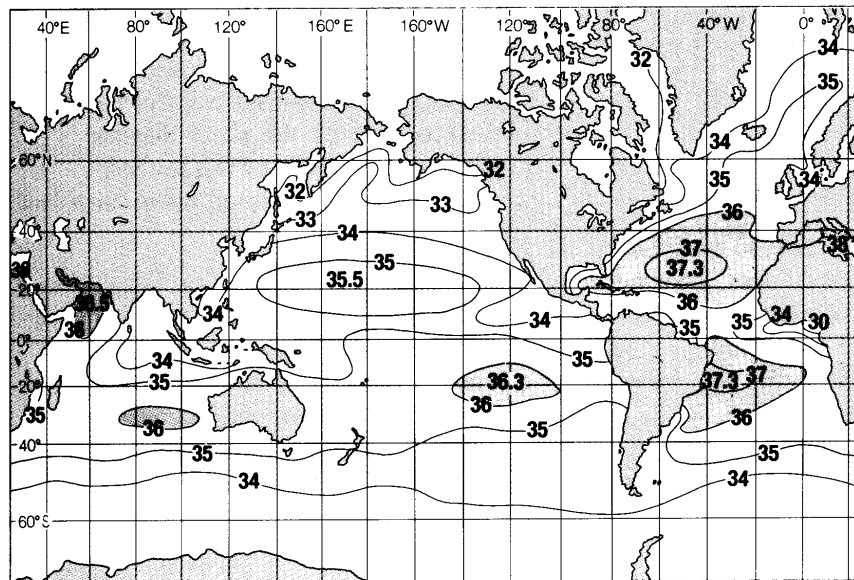


Figure II.5 Distribution de la salinité annuelle moyenne. (Extrait de Brown et al., 1989)

Remarques

- Des eaux très salées flottent au-dessus d'eaux moins salées dans les régions tropicales.
- On observe la formation d'eaux profondes dans les régions proches du Groenland.
- La structure verticale de salinité (ou température) ne peut s'expliquer complètement sans tenir compte des effets thermique (ou halins) et de la stabilité de la colonne d'eau.

II.4 Variabilité spatiale de la vitesse du son.

Les champs de température et de salinité déterminent la distribution spatiale de la vitesse du son. Comme la variabilité temporelle et spatiale de la température dans les couches superficielles de l'océan est grande, il ne sera présenté à la figure ci-dessous que la distribution de la vitesse du son calculée sur une base annuelle.

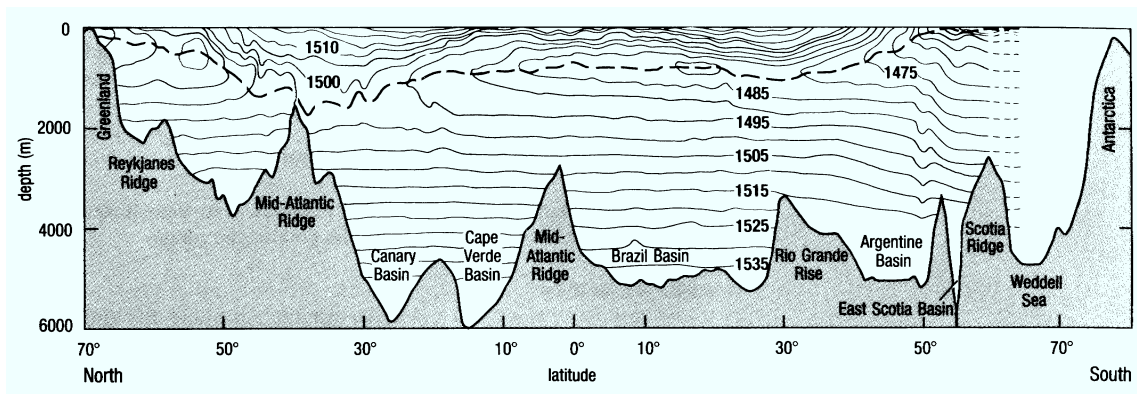


Figure II.6 Coupe nord-sud dans l'Atlantique présentant la distribution spatiale de la vitesse du son calculée sur une base annuelle.
Le cœur du canal acoustique est représenté par un train interrompu.
(Extrait de Brown et al., 1989)

Cette coupe justifie le fait la structure verticale typique de la vitesse du son présentée au chapitre précédent.

II.5 Glace marine

La glace couvre en moyenne 7% du globe terrestre mais il existe des variations saisonnières importantes et inter-annuelles.

La calotte polaire arctique flotte sur l'océan et se caractérise par une:

- banquise permanente qui résiste à la fonte estivale (environ 3 mètres) au centre du bassin;
- banquise saisonnière (quelques centimètres à deux mètres) qui se forme à la fin de l'automne.

Dans l'Arctique (Fig.II.7), la réduction de surface couverte par les glaces en été n'est pas symétrique par rapport au pôle en raison de la contrainte des continents et l'existence d'un courant océanique qui fait fondre certaines parties de la banquise. Dans l'Antarctique, la banquise est de nature saisonnière (Fig.II.8) et sa disparition est plus ou moins symétrique par rapport au pôle. Si toute la glace continentale de l'Antarctique fondait, le niveau moyen des mers augmenterait de plus de 30 mètres.

La glace des icebergs est formée dans le voisinage immédiat des côtes et sur la terre ferme (glaciers s'avancant en mer). Elle est caractérisée par une salinité nulle ou très faible. La glace marine (sea ice) se forme par contre en pleine mer et se caractérise par une salinité peu élevée. La salinité de la glace marine diminue encore lorsqu'elle vieillit en raison du phénomène de double diffusion (de chaleur et de sel) .

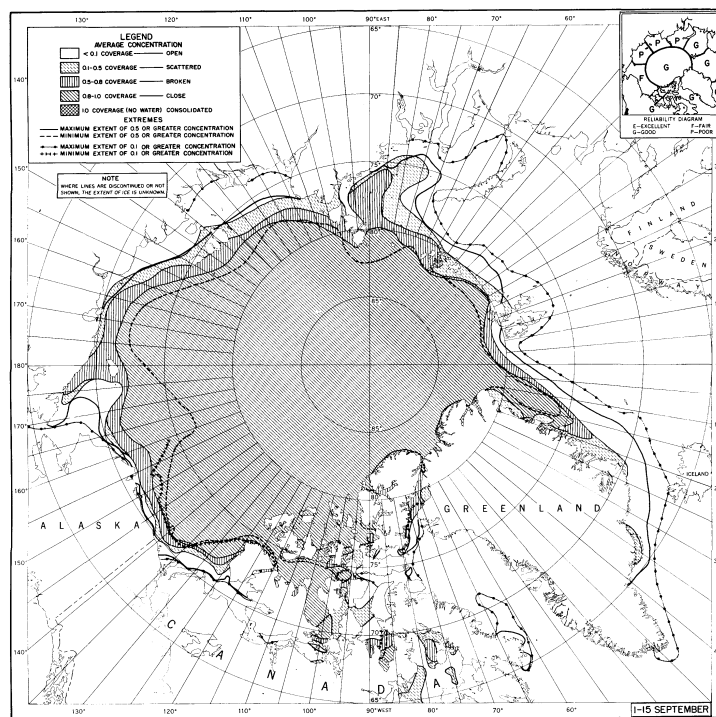


Figure II.7a Couverture de glace en Arctique en été.

L'épaisseur de la glace marine est de l'ordre de quelques mètres (une dizaine de mètres au maximum) et celles de icebergs de 300 à 400 mètres. Il convient de rappeler que les 9/10 de la glace flottante se trouvent sous le niveau de la surface de l'eau en raison d'une masse volumique plus faible que celle de l'eau de mer.

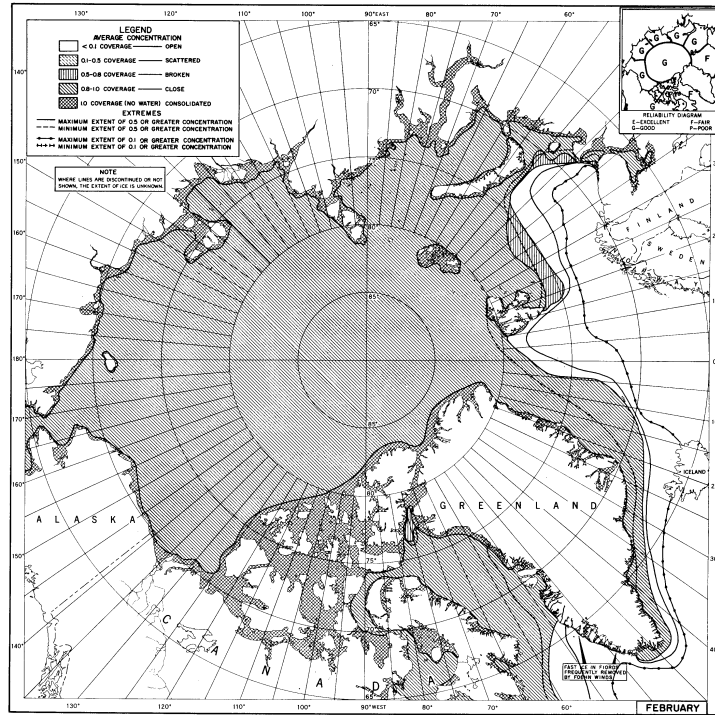


Figure II.7b Couverture de glace en Arctique en hiver.

Les mouvements de la glace marine et des icebergs sont engendrés par les courants océaniques et l'action directe du vent. Des mouvements convergents provoquent des amas où l'épaisseur de la glace dépasse 10 mètres et des mouvements divergents des chenaux libres de glace (appelés "leads"): l'eau de l'océan s'y engouffre et on y observe de grandes différences de températures.

L'homogénéité horizontale de la surface de la mer n'est pas parfaite même à petite échelle en raison de la polymérisation de l'eau. La congélation a tout d'abord lieu dans l'eau la moins salée. Restent donc des enclaves d'eau très salées qui subissent l'action du vent : des embruns se forment au niveau de l'interface air-mer

La glace nouvelle (glace d'hiver dont l'âge est inférieur à une an) a une salinité faible de l'ordre de 2 pour mille.

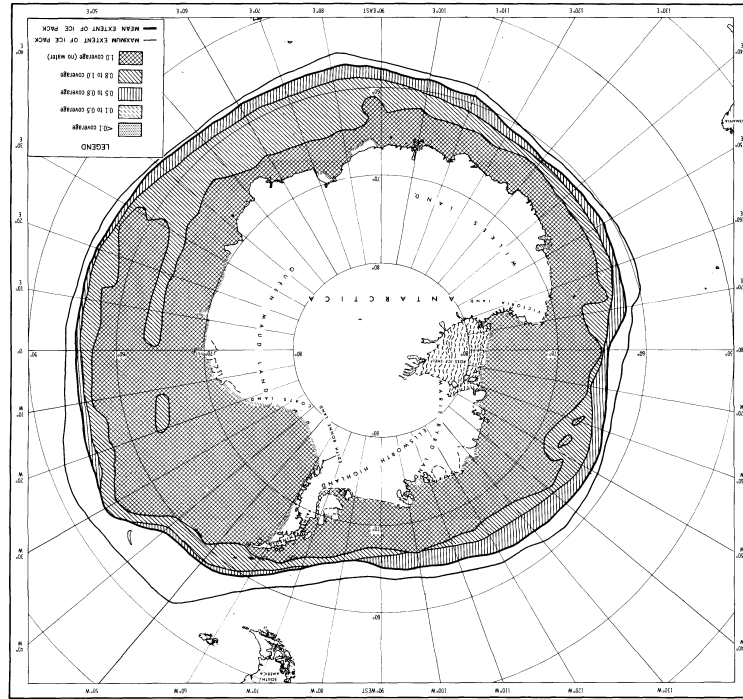


Figure II.8a Couverture de glace en Antarctique en hiver.

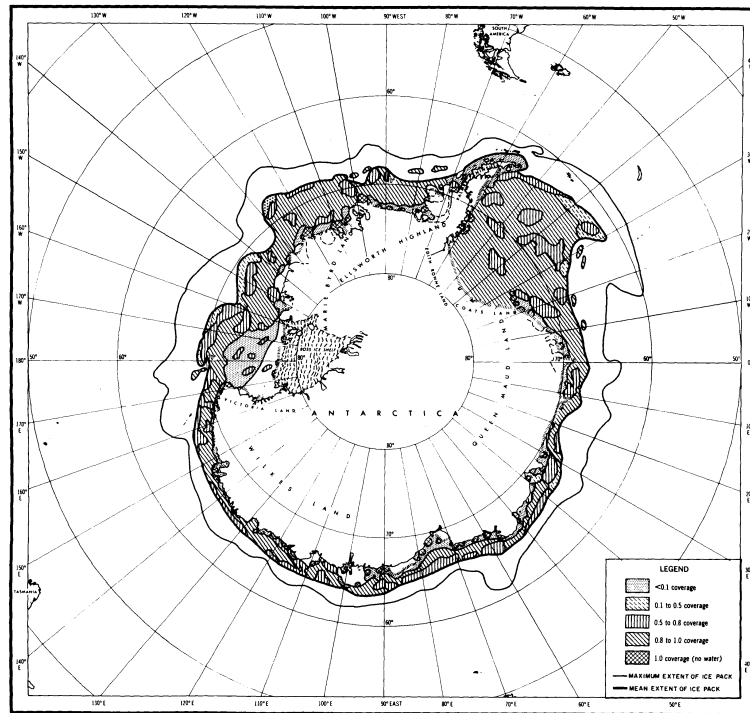


Figure II.8b Couverture de glace en Antarctique en été.

II.6 Equilibre quasi-hydrostatique

Aux échelles de temps moyennes et grandes, le temps caractéristique des variations temporelles des grandeurs vitesses (et à fortiori de température et de salinité) est supérieur ou égal à 10^5 sec. A ces échelles on peut supposer, en bonne approximation, que l'équilibre de pression est bien réalisé :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (\text{II.1})$$

où g est la gravité apparente et ρ la masse volumique du fluide.

Cette relation est formellement identique à celle qui serait la solution du problème hydrostatique. Nous rappelons les conséquences de l'hypothèse « statique ».

L'équation de la dynamique des fluides (cfr. Chapitre III) n'est qu'une forme particulière de la loi de Newton. Elle exprime que la masse multipliée par l'accélération est la somme de toutes les forces (force de pesanteur, force de pression et forces dissipatives).

Dans la cas statique, l'équation de la dynamique devient :

$$-\nabla p_0 + \rho_0 g = 0 \quad (\text{II.2a})$$

l'indice inférieur $_0$ est relatif à l'état de repos.

La projection verticale de (II.2) donne (II.1) en très bonne approximation aux moyennes et grandes échelles.

L'équation (II.2) contient en elle-même la première loi et la deuxième loi de l'hydrostatique.

- Le repos est caractérisé par un gradient horizontal de pression nul.
- La variation verticale de la pression est proportionnelle à la masse volumique qui ne peut dans le cas statique être qu'une fonction de z .
- Dans le cas de l'eau, la masse volumique s'écarte très peu d'une valeur de référence $\rho_{réf}$; il en résulte l'intégration de (II.2a) suivante:

$$p_{réf} = -\rho_{réf} g z \quad (\text{II.2b})$$

avec $\rho_0 = \rho_{réf}$

L'intégration verticale de (II.1) depuis le niveau z jusqu'au niveau ζ de l'interface air-mer où la pression est la pression atmosphérique donne :

$$p(x,y,z) = p_{atm} + \rho_{réf} g (\zeta - z) + g \int_z^{\zeta} \sigma^* (T, S, p) dz \quad (\text{II.3a})$$

ou

$$p(x,y,z) = p_{réf} + p_{atm} + \rho_{réf} g \zeta + g \int_z^{\zeta} \sigma^* (T, S, p) dz \quad (\text{II.3b})$$

avec $\rho = \rho_{réf} + \sigma^*$

$\rho_{réf}$ et σ^* représentent respectivement une masse volumique de référence (1000 kg/m³) et l'écart de masse volumique par rapport à la masse volumique de référence. Si on choisit une masse volumique de référence de 1000 kg/m³, alors $\sigma^* = \sigma$ l'anomalie de masse volumique σ .

Le premier terme du membre de droite de (II.3b) ne contribue nullement à la dynamique des courants puisque ses variations horizontales, liées aux mouvements horizontaux, sont nulles, alors qu'il constitue le terme très largement dominant de la pression existant à un niveau z .

Le deuxième et le troisième termes du membre de droite de (II.4) constituent la contribution « dite » barotrope et le quatrième la contribution « dite » barocline de la pression. La composante barocline de la pression, à un niveau donné, dépend des caractéristiques de température et de salinité de toute la colonne d'eau entre ce niveau et l'interface.

L'intérêt de cette décomposition se justifie lorsqu'on étudie de la dynamique des courants (cfr. Chap.IV).

En océanographie et en météorologie on introduit souvent le concept de la poussée de Boussinesq. Dans l'équation de la dynamique, le terme de pression et de gravité peuvent se mettre sous une autre forme.

$$-\nabla p + \rho g = -\nabla p + \rho g + \nabla p_{réf} - \rho_{réf} g \quad (\text{II.4})$$

étant donné (II.2).

(II.4) se met encore sous la forme :

$$-\nabla(p - p_{réf}) + \rho_{réf} \mathbf{b} \quad (\text{II.5})$$

$$\text{avec } \mathbf{b} = \left(\frac{\rho - \rho_{réf}}{\rho_{réf}} \right) \mathbf{g} \quad (\text{II.6})$$

la poussée de Boussinesq.

La signification de cette poussée apparaîtra plus clairement au paragraphe suivant.

II.7 Stabilité d'une particule d'eau

Une particule d'eau est une petite entité de fluide prise dans la colonne d'eau. Ce concept fort utile est couramment utilisé pour la détermination du caractère stable ou instable d'une particule et par la suite, en généralisant, d'une masse d'eau.

L'étude de stabilité se limitera aux petites perturbations. Dans ces conditions la dynamique de la particule obéira à l'équation suivante en négligeant les effets de viscosité :

$$\rho_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho_p \mathbf{g} \quad (\text{II.7})$$

où ρ_p la masse volumique de la particule prise dans la colonne d'eau.

La projection de (II.7) sur l'axe vertical pris conventionnellement positif vers le ciel donne :

$$\rho_p \frac{dw}{dt} = - \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{part} - \rho_p g \quad (\text{II.8})$$

En bonne approximation, un équilibre de pression s'établit très rapidement entre la particule et l'eau environnante :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{part} = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{II.9})$$

Au niveau $z + \delta z$ l'accélération verticale de la particule sera :

$$\rho_p \frac{dw}{dt} = \rho g - \rho_p g = (\rho - \rho_p) g \quad (\text{II.10})$$

étant donné (II.1 et 9)

Soit un déplacement vertical vers le haut à l'instant initial $w > 0$, l'accélération est positive si $\rho_p < \rho$ et la particule ne revient pas vers sa position initiale. Par contre si $\rho_p > \rho$ l'accélération est négative.

L'analyse de la stabilité d'une particule d'eau requiert de calculer les différences de masse volumique entre la particule d'eau déplacée et l'eau environnante.

Un développement en série des masses volumiques donne

- pour la particule :

$$\rho_p(z + \delta z) = \rho_p(z) + \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{S,p} \frac{\partial T}{\partial z} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{T,p} \frac{\partial S}{\partial z} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T,S} \frac{\partial p}{\partial z} \right\}_{part} \delta z \quad (\text{II.11})$$

- pour le fluide

$$\rho(z + \delta z) = \rho(z) + \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{S,p} \frac{\partial T}{\partial z} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{T,p} \frac{\partial S}{\partial z} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T,S} \frac{\partial p}{\partial z} \right\} \delta z \quad (\text{II.12})$$

Tenant compte qu'initialement la particule, au niveau z , est prise dans le fluide, il en résulte:

$$\rho_p(z) = \rho(z) \quad (\text{II.13})$$

La soustraction membre à membre de (II.11 et 12) conduit à

$$\left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{s,p} \left(\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_p \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{T,p} \left(\frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial z} \Big|_p \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T,S} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_p \right) \right) \delta z$$

On suppose qu'à chaque instant l'équilibre de pression s'établit entre la particule et l'eau environnante.

Avec l'hypothèse réaliste selon laquelle le petit déplacement vertical est adiabatique et sans échange de sel, l'expression précédente prend une forme plus simple :

$$\left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{s,p} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{T,p} \frac{\partial S}{\partial z} \right) \delta z \quad (\text{II.14})$$

en posant $\Gamma = - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{adia}$ le gradient vertical adiabatique de température. Ce dernier est donné et de l'ordre de 10^{-5} °/m.

Les variations de la masse volumique de l'eau de mer et du gradient vertical adiabatique de température en fonction de la température et la salinité sont données (tables ou algorithmes numériques) .

La substitution de (II.14) dans (II.10) donne:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = \frac{g}{\rho} \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{s,p} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{T,p} \frac{\partial S}{\partial z} \right) \delta z \quad (\text{II.15})$$

Le déplacement δz reste borné si

$$\frac{g}{\rho} \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{s,p} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{T,p} \frac{\partial S}{\partial z} \right) < 0 \quad (\text{II.16})$$

Habituellement en océanographie on introduit le paramètre de stabilité N^2 donné par :

$$N^2 = - \frac{g}{\rho} \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{s,p} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{T,p} \frac{\partial S}{\partial z} \right) \quad (\text{II.17})$$

Le paramètre de stabilité N (fréquence de Brunt Väisälä) s'exprime également en fonction des coefficients d'expansion thermique et de contraction haline :

$$N^2 = g \left(\beta \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma \right) - K_s \frac{\partial S}{\partial z} \right) \quad (\text{II.18})$$

L'équation (II.15) se met encore sous la forme :

$$\frac{d w}{d t} = \frac{d^2 \delta z}{d t^2} = - N^2 \delta z \quad (\text{II.19})$$

L'équation (II.19) est l'équation (cfr. Cours de physique) d'un oscillateur de fréquence angulaire N . La solution de (II.19) est

- périodique bornée si N^2 est positif. La particule est dans des conditions de stabilité;
- exponentielle si N^2 est négatif. La particule est dans des conditions d'instabilité.

La particule sera dans des conditions

- stables si $N^2 > 0$
- instables si $N^2 < 0$

On peut montrer par le calcul que la fréquence de Brunt Väisälä N est aussi reliée à la poussée de Boussinesq (II.6) par :

$$N^2 = \frac{\partial b}{\partial z} \quad (\text{II.20})$$

si on néglige Γ devant $\frac{dT}{dz}$.

La figure ci-dessous montre les profils verticaux de température, de salinité et de fréquence de Brunt Väisälä dans le cas d'une thermocline bien marquée. Le maximum de stabilité correspond au pic de N situé dans le voisinage immédiat de la thermocline.

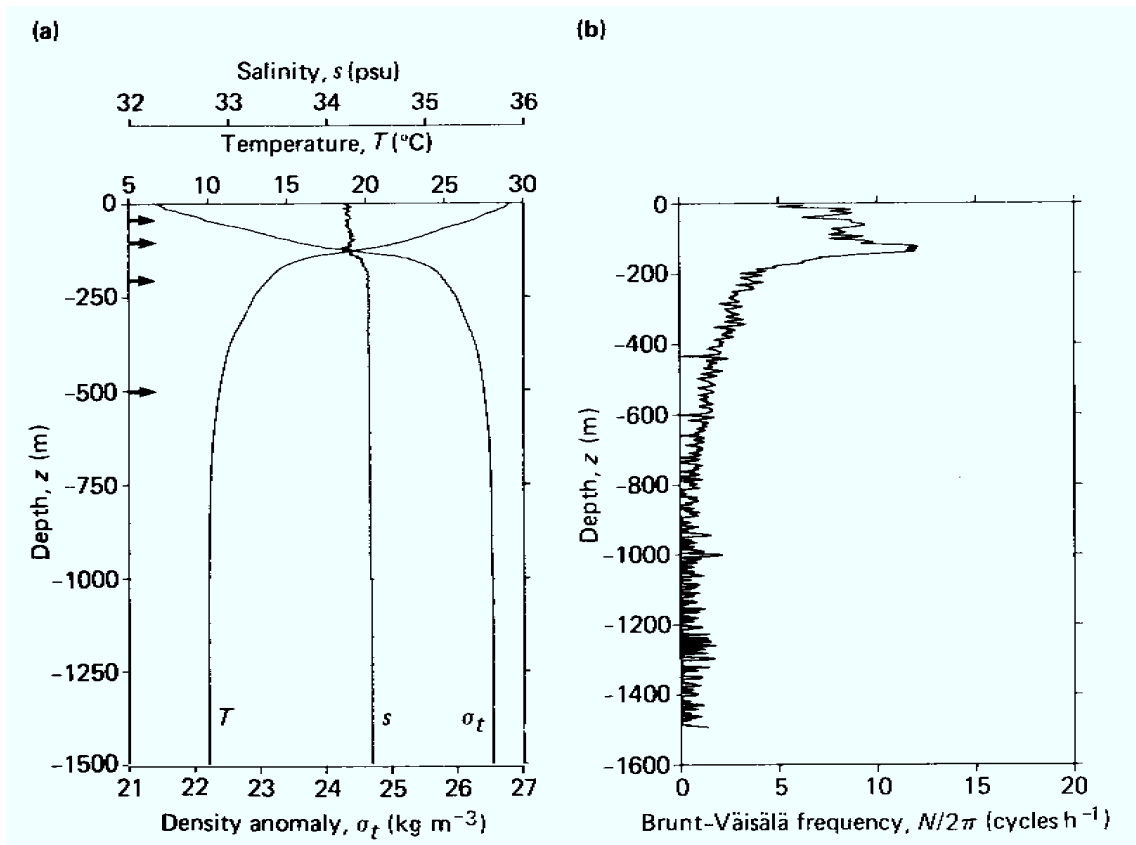


Figure II.9 Profils de température et de fréquence de Brunt Väisälä.

II.8 Relation température-salinité – Diagramme T-S

Au début du chapitre nous avons montré la variabilité des champs de température et de salinité dans les couches superficielles de l’océan en raison des échanges mécaniques et thermodynamiques à l’interface air-mer.

En dessous de la couche d’influence saisonnière, en moyenne à une centaine de mètres, les température et salinité d’une particule d’eau ne changent que par des processus de mélange avec l’eau environnante. Afin d’étudier ces processus de mélange de manière simple on travaille de manière adiabatique. La température potentielle θ et la salinité pratique sont des grandeurs très utiles car elles sont des invariants, c’est-à-dire qu’elles conservent leurs valeurs lors d’une ascendance ou d’une subsidence sans mélange. Dans la suite, on utilise néanmoins le symbole T au lieu de θ pour faciliter l’écriture.

Le diagramme TS est un diagramme où la température est en ordonnée, la salinité en abscisse. Sont également tracées les lignes d'égale anomalie σ_θ ou σ_t . Etant donné le caractère non linéaire de l'équation d'état de l'eau de mer, les lignes d'égale anomalie σ_θ ou σ_t sont des courbes dans un diagramme T-S.

a) Mélange de deux types d'eau (Fig.II.10)

Soit deux types d'eau :

Eau 1 caractérisée par T_1 et S_1 ; point A sur le diagramme T-S

Eau 2 caractérisée par T_2 et S_2 ; point B sur le diagramme T-S

qui se mélangent en proportion m_1 et m_2

La conservation de la masse totale implique :

$$m_1 + m_2 = 1 \quad (\text{II.21})$$

En faisant l'hypothèse d'un mélange adiabatique, sans échange de masse avec l'extérieur, à pression constante, les équations de conservation du sel et de l'énergie donnent :

$$S = S_1 m_1 + S_2 m_2 \quad (\text{II.22})$$

$$T = T_1 m_1 + T_2 m_2 \quad (\text{II.23})$$

dans le cas stationnaire.

Il résulte de ces deux relations que le point fruit du mélange se trouve sur la droite joignant les deux points A et B représentatifs des deux types d'eau, à une distance m_1 du point B et à une distance m_2 du point A.

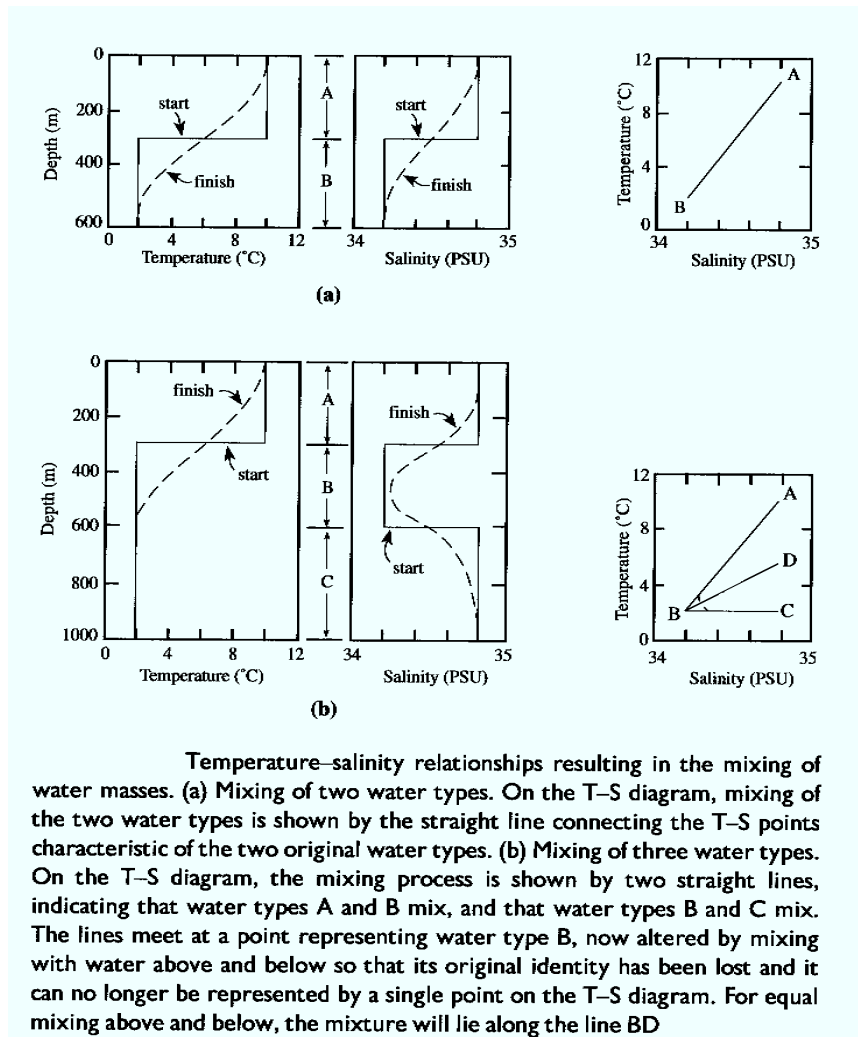


Figure II.10 Mélanges schématiques de deux et de trois types d'eau.
(Extrait de Wells, 1999)

Le problème inverse à celui-ci, soit la détermination des proportions m_1 et m_2 , n'est pas difficile. Pour la température, on considère les équations (II.21 et 23) ; pour la salinité, les équations (II.21 et 22).

Application : caballing

Un mélange de deux types d'eau aux caractéristiques de température et de salinité différentes, mais de même densité relative σ_t , aura une masse volumique et donc une densité relative résultante supérieure à la densité relative initiale étant donné les formes respectivement courbe pour les lignes d'égale densité relative et rectiligne pour la ligne

de mélange des deux types d'eau. L'eau ainsi formée est plus dense que les deux premières: elle coulera. Ce phénomène est appelé « caballing ».

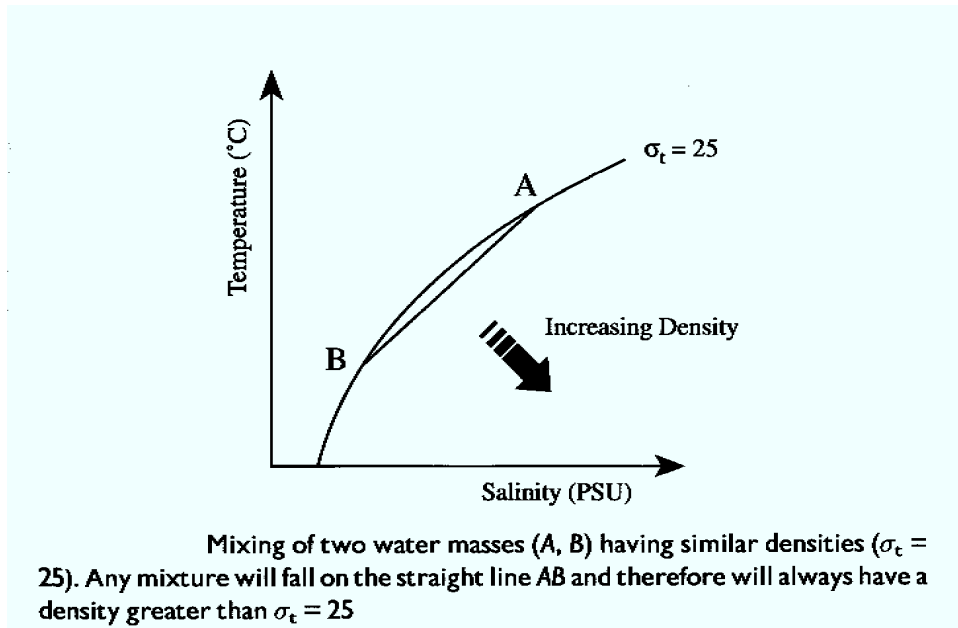


Figure II.11 Mélange de deux types d'eau ayant des densités relatives σ_t égales.
(Extrait de Wells, 1999)

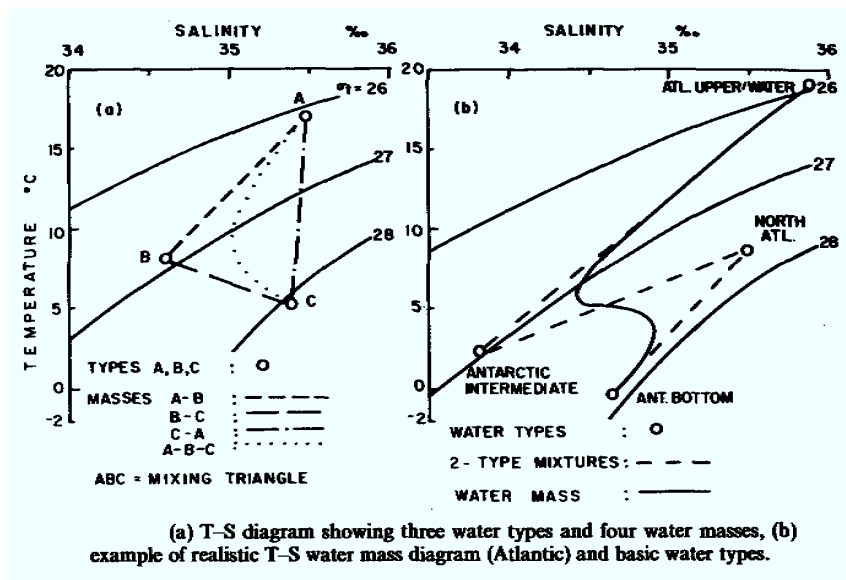


Figure II.12 Mélange de trois et quatre types d'eau
Détermination graphique des types d'eau.

Le diagramme TS donné à la Fig.II.13 est un exemple montrant comment déterminer les différents types d'eau et ensuite d'étudier leur évolution spatiale.

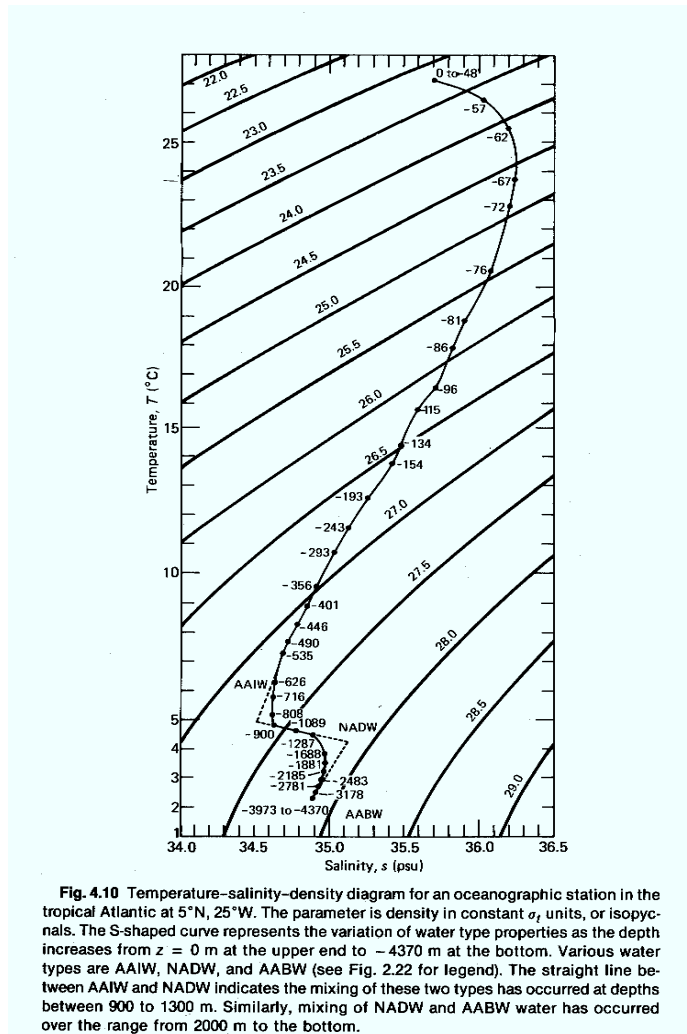


Figure II.13 Diagramme T – S pour un sondage de 4370 m dans l’Atlantique tropical.

La Fig.II.14 présente les profils verticaux de température et de salinité pour deux stations océanographiques situées dans l’océan Atlantique. A priori, ces diagrammes apparaissent très différents. Les tracés dans les diagramme T-S pour ces deux stations montrent qu’ils ont des formes relativement semblables. Dans cet exemple, la masse d’eau d’une station s’est déplacée verticalement de l’ordre de 500 mètres par rapport à une autre station..

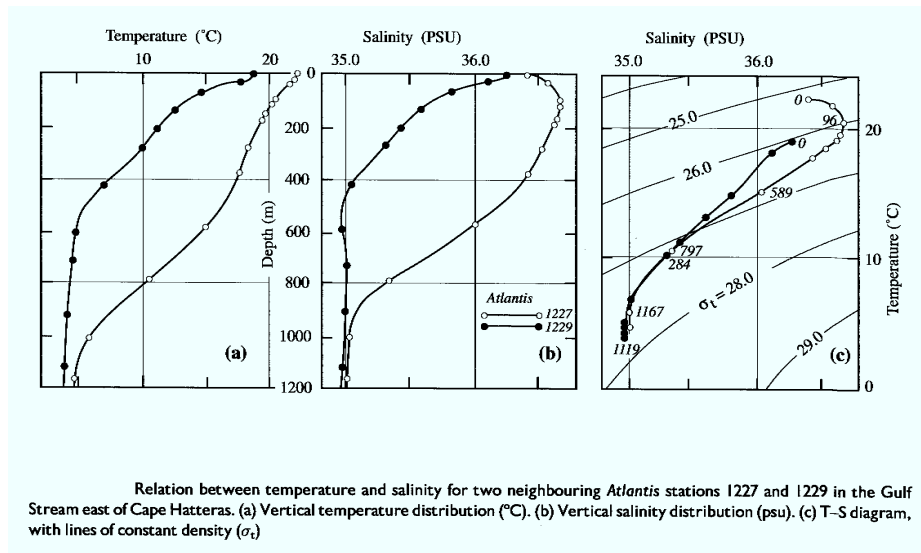


Figure II.14 Profils de température et de salinité à deux stations océanographiques en Atlantique Nord et relations Température – Salinité.
(Extrait de Wells, 1999)

La Fig.II.15 donne un autre exemple du mélange progressif de types d'eau comme l'eau antarctique intermédiaire. L'origine de ce type d'eau se situe approximativement dans la zone de convergence où la température est de 2.2°C et de salinité 33.8. Elle coule à une profondeur de 700 à 1500 mètres ensuite elle progresse vers le nord comme une langue d'eau peu salée. On peut suivre sur un diagramme T-S la progression de l'eau à salinité minimum.

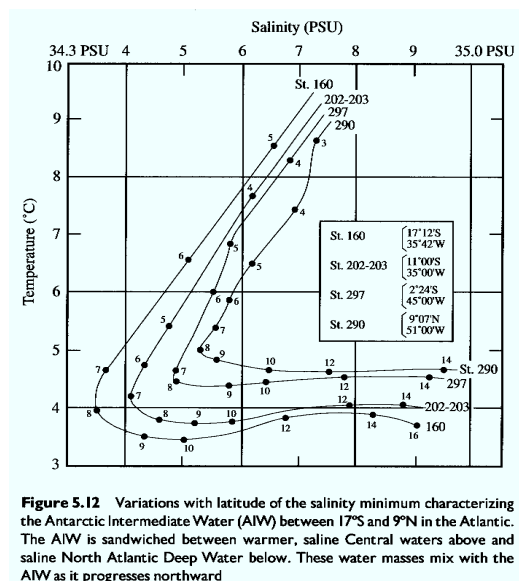


Figure II.15 Propagation et mélange de l'eau Antarctique intermédiaire.
(Extrait de Wells, 1999).

CHAPITRE III

MODELISATION DE L'ENVIRONNEMENT MARIN EQUATIONS GENERALES DE L'HYDRODYNAMIQUE¹

III.1 Introduction

La connaissance, la contrôle et la gestion de l'Environnement requiert tout d'abord une sélection de variables représentatives qui sont appelées variables d'état lorsqu'elles obéissent à des lois d'évolution comme celles de la conservation de la masse d'un constituant ou de l'énergie.

Pour prédire l'évolution des variables sélectionnées, on doit au moins avoir une idée, un modèle de leur comportement. Le modèle mathématique s'inspire de cette idée abstraite du phénomène: il est constitué par un ensemble d'équations adaptées à la résolution numérique sur ordinateur.

Les différentes étapes d'une modélisation mathématique reposent sur :

- démarcation du système naturel (définir le système et le distinguer du monde extérieur)
- construction du modèle mathématique (basé sur des équations s'appliquant à un domaine continu au moins par morceaux),
- traduction de celui-ci en un modèle approché équivalent adapté aux ordinateurs,
- résolution des équations en utilisant des algorithmes numériques appropriés.

En raison d'un choix limité dans le nombre de variables représentatives, des ajustements et des calibrages sont nécessaires pour les paramètres (variables n'obéissant pas à des équations

¹ Ce chapitre est fortement inspiré du travail de Jacques NIHOUL (1977) : Modèles mathématiques et Dynamique de l'Environnement.

d'évolution dans le cadre du modèle choisi). Ils sont considérés comme des paramètres de commande puisqu'ils influencent l'évolution du système mais qu'ils ne sont pas prédits par le modèle lui-même. Dans des modèles simples de dispersion dans l'atmosphère ou l'océan, les coefficients de dispersion (diffusion) sont des *paramètres de commande*. Ils sont, soit connus à priori, soit déterminés à l'aide de simulations numériques.

Les méthodes statistiques sont souvent mal adaptées à la description des systèmes naturels car elles nécessiteraient le traitement d'un très grand nombre d'observations. Les modèles mathématiques adaptés à l'étude des phénomènes naturels se basent sur des équations mathématiques qui traduisent les grands principes de la physique et de la chimie: équations de la conservation de la masse des différents constituants, de l'énergie et de la quantité de mouvement et une équation d'état qui est une relation entre variables d'état.

Avant tout, il est indispensable de définir le système et de le distinguer du monde extérieur. Cette démarcation fait apparaître une frontière entre le système et le monde extérieur à travers laquelle se manifesteront des échanges de masse, de chaleur, ...

Comme le système naturel est essentiellement complexe, la description de toutes les facettes de celui-ci est impossible: un choix parmi les variables est nécessaire. Il doit se faire sur base d'un certain nombre d'objectifs. En fonction de ceux-ci, se définit un ensemble de variables servant à décrire le système. Le nombre de variables doit néanmoins rester petit pour les raisons suivantes :

1. la résolution numérique des équations mathématiques impose des contraintes techniques et financières ;
2. un nombre élevé de variables induit des difficultés énormes dans l'analyse des simulations ;
3. un nombre élevé de variables n'apporte pas nécessairement une amélioration significatives de nos connaissances du système et de sa dynamique.

Pour diverses raisons, il est nécessaire de réduire les dimensions du système. Soit l'intérêt scientifique d'une étude est limité à une région géographique donnée, soit les contraintes informatiques imposent également une limitation de l'extension géographique à la zone.

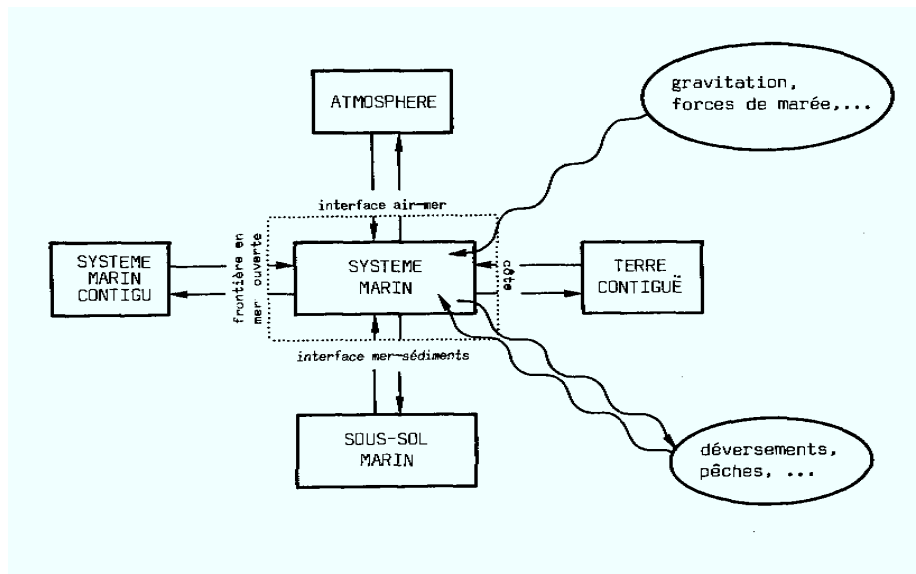


Figure III.1 Interactions d'un système naturel avec le monde extérieur

Dans certains cas, on ne s'intéresse pas au détail de la dynamique du système. Dans certains cas, il est possible d'effectuer des moyennes temporelles et éliminer explicitement la variable 'temps'. En conséquence le système est supposé évoluer comme une succession d'états stationnaires. Ce système subit donc une *réduction du support du système*.

Pour décrire un système, il faut connaître aussi son *envergure* c'est-à-dire spécifier les variables d'état qui sont essentielles pour sa description. Très souvent il n'est pas nécessaire de connaître l'évolution temporelle fine d'un phénomène lorsque le temps caractéristique du phénomène à prendre en considération est grand. Il suffit alors d'étudier le caractère global (temporel ou spatial) des variables d'état: le passage d'une description détaillée à une description plus globale est une *réduction de l'envergure du système*. La réduction du support d'un système et de son envergure est parfois plus subtile.

Comme le système et le monde extérieur interagissent entre eux l'identification de ces interactions et leurs descriptions sont essentielles pour déterminer le fonctionnement du système. Ces interactions se manifestent

- au niveau des frontières du système (Fig.III.1)
(interactions air-mer, interactions mer-océan, mer-fond);
- à l'intérieur du système par l'intermédiaire de forces volumiques (gravité, marée, ...) et de termes sources ou de puits (déversements, rejets en altitude de fumée, ...).

Lorsqu'on fixe l'envergure d'un système, on classe les variables en deux familles : les variables obéissant à des équations d'évolution qui sont à l'intérieur du support du modèle et les autres qui seront imposées de l'extérieur du modèle. Ainsi, dans un modèle hydrodynamique marin, la vitesse du vent est une grandeur extérieure au système qui doit être donnée explicitement : la vitesse du vent est un apport du monde extérieur pour le système considéré.

La base de la modélisation mathématique d'un système naturel est de remplacer le système naturel complexe par un autre plus simple qui doit néanmoins décrire dans certaines limites le comportement du système naturel.

Le modèle simple basé sur les lois de conservation existant dans la Nature est appelé modèle mathématique du système naturel. Ces lois sont représentées mathématiquement par des équations aux dérivées partielles. Elles donnent en général l'évolution des variables d'état à l'intérieur du système à condition de connaître les conditions aux limites de ce système.

III.2 Modèle mathématique pour le système marin

L'eau de mer, composée d'eau et d'un grand nombre de constituants, est habituellement caractérisée par une grandeur globale appelée salinité qui traduit la quantité de « sels » présents. Pour de nombreuses applications tant physiques que biologiques, il n'est pas utile de s'attacher au comportement de tous les composants: la connaissance de la distribution spatio-temporelle de la salinité est largement suffisante.

Les appareils classiques, aussi bien en météorologie qu'en océanographie, ne mesurent pas la vitesse de chaque composant du milieu. Ils mesurent la vitesse du mélange définie par :

$$u = \frac{\sum_{i=1}^n \rho^i u^i}{\rho} \quad (\text{III.1})$$

où

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho^i \quad (\text{III.2})$$

ρ est la masse volumique du mélange et ρ^i la masse volumique du constituant i ; la sommation étant effectuée sur tous les constituants présents dans le milieu.

III.3 Equation de la conservation de la masse totale

L'expression de la conservation de la masse d'un constituant quelconque i se déduit en traduisant le principe de Lavoisier: « rien ne se crée, rien de se perd, tout se transforme » sous forme mathématique. La convergence d'un flux de masse $\rho^i u^i$ doit être égale à la somme de

- l'augmentation temporelle locale de la masse de ce constituant i
- du taux de production (ou destruction) du constituant i
- des taux de production ou de destruction de ce constituant à la suite d'interactions physiques, chimiques ou biologiques entre ce constituant et les autres.
- des flux moléculaires de diffusion.

Mathématiquement, la traduction de cette relation est la suivante :

$$-\nabla \cdot (\rho^i u^i) = \frac{\partial \rho^i}{\partial t} + P^i + \sum_{j=1, i \neq j}^n I^{i,j} \quad (\text{III.3})$$

où P^i et $I^{i,j}$ sont respectivement les taux de production (destruction) et d'interaction du constituant i .

Rappel:

Le symbole ∇ est un opérateur vectoriel qui appliqué à

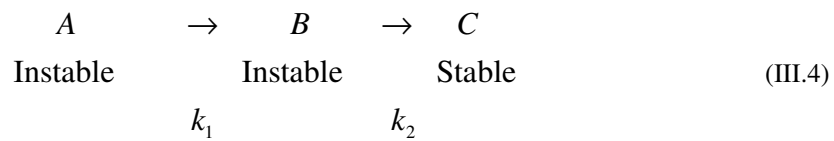
- à un scalaire donne le gradient,
- à un vecteur par l'intermédiaire d'un produit scalaire une divergence,
- à un vecteur par l'intermédiaire d'un produit vectoriel un rotationnel.

Exemples

Deux exemples tirés de la physique ou de la dynamique des populations explicitent les termes sources et d'interaction de l'équation (III.4).

a) Décroissance radioactive.

Soit un système fermé constitué de deux isotopes radioactifs et d'un isotope stable interagissant comme suit :



k_1 et k_2 les deux constantes de décroissance radioactive.

Les lois « classiques » d'évolution pour les isotopes A, B, C s'écrivent :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1 [A] \quad (\text{III.5})$$

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1 [A] - k_2 [B] \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{d[C]}{dt} = k_2 [B] \quad (\text{III.7})$$

$[N^i]$ représente le nombre de noyaux du constituant i par unité de volume.

La sommation des équations (III.5 à 7) donne :

$$\frac{d[A] + [B] + [C]}{dt} = 0 \quad (\text{III.8})$$

L'application de (III.4) à un constituant i dans une boîte fermée conduit à :

$$0 = \frac{\partial [N^i]}{\partial t} + P^i + \sum_{j=1, i \neq j}^n I_{i,j} \quad (\text{III.9})$$

En tenant compte (III.8), la sommation sur les trois constituants conduit à :

$$\sum_{i=1}^3 \left(P^i + \sum_{j=1, i \neq j}^3 I^{i,j} \right) = 0 \quad (\text{III.10})$$

Il en résulte :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d[N^i]}{dt} = 0 \quad (\text{III.11})$$

On a donc bien la conservation de la masse totale.

b) Interactions biologiques dans une boîte fermée.

- Si $[A]$ concentration en nutriments
 $[B]$ concentration de phytoplancton
 $[C]$ concentration de zooplancton
 $[D]$ concentration en cellules mortes

un modèle simple d'interactions biologiques est donné par le système d'équations suivant:

$$\frac{d[A]}{dt} = -\alpha[A][B] \quad (\text{III.12})$$

$$\frac{d[B]}{dt} = \alpha[A][B] - \beta[B][C] \quad (\text{III.13})$$

$$\frac{d[C]}{dt} = \beta[B][C] - \gamma[C] \quad (\text{III.14})$$

$$\frac{d[D]}{dt} = +\gamma[C] \quad (\text{III.15})$$

α, β, γ sont respectivement les coefficients d'interaction et de mortalité.

La sommation membre à membre des différentes équations (III.12 à 15) conduit à

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d[N^i]}{dt} = 0 \quad (\text{III.16})$$

où $[N^i]$ est la concentration en un constituant quelconque.

La relation (III.16) traduit encore la conservation de la masse totale.

De manière générale, nous avons :

$$\sum_{i=1}^n \left(P^i + \sum_{j=1, i \neq j}^n I^{i,j} \right) = 0 \quad (\text{III.17})$$

La sommation des équations (III.3) sur tous les constituants conduit à:

$$-\nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^n \rho^i \mathbf{u}^i \right) = \frac{\partial \sum_{i=1}^n \rho^i}{\partial t} + \sum_{i=1}^n P^i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n I^{i,j} \quad (\text{III.18})$$

En tenant compte de (III.1, 2 et 17), (III.18) se simplifie comme suit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{III.19})$$

Cette relation traduit la conservation de la masse totale.

Si les variations spatiales et temporelles de la masse volumique sont petites, ce qui est le cas pour l'eau, l'équation (III.19) prend une forme encore plus simple :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{III.20})$$

(III.20) exprime l'incompressibilité du fluide, ici de l'eau.

En choisissant un système d'axes tels que x , y sont les directions horizontales (h) et z la direction verticale, (III.20) se met sous cette autre forme :

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u}_h + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.21})$$

Exemple d'application :

Un écoulement horizontal est caractérisé par une convergence horizontale qui se traduit par:

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u}_h < 0 \quad (\text{III.22a})$$

Tenant compte de (III.21) il en résulte :

$$\frac{\partial w}{\partial z} > 0 \quad (\text{III.22b})$$

Comme la vitesse verticale est nulle (aux grandes échelles) au niveau de l'interface air-mer, la vitesse verticale sera négative dans le fluide (mouvement vertical descendant).

III.4 Equation d'évolution de la concentration d'un constituant

Dans le terme d'advection de l'équation (III.3):

$$\nabla \cdot (\rho^i u^i)$$

intervient la vitesse du constituant i qui n'est pas directement mesurable.

Afin de faire apparaître la vitesse du mélange on décompose la vitesse du constituant i comme suit :

$$u^i = u + \hat{u}^i \quad (\text{III.22})$$

\hat{u}^i est la vitesse relative du constituant i par rapport au mélange.

La substitution de (III.22) dans (III.3) donne :

$$\frac{\partial \rho^i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^i u) = P^i + \sum_{j=1, i \neq j}^n I^{i,j} - \nabla \cdot (\rho^i \hat{u}^i) \quad (\text{III.23})$$

On a posé $P^i + \sum_{j=1, i \neq j}^n I^{i,j} = -P^i - \sum_{j=1, i \neq j}^n I^{i,j}$ pour rendre la formulation plus « classique ».

Le dernier terme de (III.23) représente la divergence d'un flux $q^i = \rho^i \hat{u}^i$. En l'absence de flux migratoire, souvent lié à un processus de sédimentation, le flux de matière $q^i = \rho^i \hat{u}^i$ est associé au flux diffusif de nature moléculaire. Ce dernier est relié au gradient de concentration par la loi de Fick :

$$q^i = \rho^i \hat{u}^i = -\kappa^i \nabla \rho^i \quad (\text{III.24})$$

où κ^i est le coefficient de diffusion moléculaire du constituant i par rapport au mélange.

La substitution de (III.24) dans (III.23) donne l'équation d'évolution de la masse volumique :

$$\frac{\partial \rho^i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^i u) = P^i + \sum_{j=1, i \neq j}^n I^{i,j} + \nabla \cdot (\kappa^i \nabla \rho^i) \quad (\text{III.25})$$

Dans certaines applications on préfère travailler avec la concentration massique donnée par :

$$c^i = \frac{\rho^i}{\rho} \quad (\text{III.26})$$

La substitution de (III.26) dans (III.25) en tenant compte de (III.19) conduit à l'équation d'évolution de la concentration du constituant i:

$$\frac{\partial c^i}{\partial t} + \nabla \cdot (c^i \mathbf{u}) = P^{*i} + \sum_{j=1, i \neq j}^n I^{*i,j} + \nabla \cdot (\kappa^i \nabla c^i) \quad (\text{III.27})$$

* signifie que ces grandeurs sont exprimées en s^{-1} .

III.5 Equation d'évolution de la vitesse

La loi de la dynamique, loi de Newton, exprime la proportionnalité entre force et accélération d'une particule lorsqu'on repère les grandeurs par rapport à des repères inertiels, c'est-à-dire au repos ou en translation uniforme.

Rappels (cours de physique de première année) :

a) *Rotation plane d'un vecteur unitaire*

Soit un vecteur unitaire \mathbf{e} d'extrémité P tournant à une vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ dans le plan formé par les vecteurs unitaires fixes orthonormés $(\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y)$

Le vecteur \mathbf{e} se décompose dans les axes fixes de la manière suivante:

$$\mathbf{e} = \cos \theta \mathbf{E}_x + \sin \theta \mathbf{E}_y \quad (\text{III.28})$$

La vitesse P est donnée par :

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \sin \theta \mathbf{E}_x + \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \mathbf{E}_y$$

Lorsqu'on définit un vecteur vitesse de rotation angulaire $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{E}_z$, la variation temporelle du vecteur \mathbf{e} se met sous la forme:

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e} \quad (\text{III.29})$$

Le résultat obtenu ci-devant est encore valable pour toute rotation du vecteur \mathbf{e} . Le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ est perpendiculaire au plan de mouvement instantané étant donné (III.29).

La dérivée temporelle d'un vecteur quelconque dans un repère référentiel mobile s'obtient aisément en utilisant la relation précédente.

b) *Dérivée dans des axes liés à la Terre*

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ une base orthonormale liée à la Terre (tournant avec la Terre) et centrée au centre de celle-ci, l'axe 3 coïncide avec l'axe de rotation de la Terre. $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ est une base orthonormale fixe centrée au centre de la Terre, les axes 1 et 2 pointant dans des directions supposées fixes et l'axe 3 coïncide avec l'axe de rotation.

Comme la Terre effectue une rotation complète autour d'elle même en 24 heures on a:

$$\|\boldsymbol{\Omega}\| = \frac{2\pi}{T} \cong 0.7 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Le système du référence mobile choisi est caractérisé par un vecteur de rotation $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}$.

Dans ces conditions:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_2 \\ \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = -\boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_1 \\ \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

c) *Vitesse et accélération relatives*

Soit $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ un système d'axes pointant vers des étoiles fixes dont l'origine O est centrée au de la Terre.

On suppose que les effets associés à la révolution de la Terre autour du Soleil sont négligeables. $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$

est une base orthonormée liée à la Terre au point P avec l'axe 3 vertical, l'axe 1 pointe vers l'Est et l'axe 2 vers le Nord. Le vecteur de Poisson $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}$ s'exprime dans le système d'axes $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ comme suit :

$$\boldsymbol{\Omega} = \|\boldsymbol{\Omega}\| \cos \phi \mathbf{e}_y + \|\boldsymbol{\Omega}\| \sin \phi \mathbf{e}_z$$

Soit un point S situé dans le voisinage de la terre. Son vecteur position \mathbf{OS} peut se décomposer comme suit :

$$\mathbf{OS} = \mathbf{OP} + \mathbf{PS}$$

Le vecteur \mathbf{PS} donne la position du point S par rapport à l'origine des axes relatifs, soit P. Ce vecteur se décompose de la manière suivante:

$$\mathbf{PS} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$$

La vitesse absolue du point S est la dérivée temporelle \mathbf{OS} c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{OS} = \frac{d}{dt} \mathbf{OP} + \frac{d}{dt} \mathbf{PS}$$

Examinons les deux termes du membre de droite:

- Premier terme

$$\frac{d}{dt} \mathbf{OP} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OP}$$

car la distance entre O et P est supposée constante (on néglige les marées terrestres) et le mouvement de P par rapport à O est une rotation.

- Deuxième terme

$$\frac{d}{dt} \mathbf{PS} = \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + x \frac{d\mathbf{e}_x}{dt} + \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_y + y \frac{d\mathbf{e}_y}{dt} + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z + z \frac{d\mathbf{e}_z}{dt}$$

On pose $\mathbf{v}_r = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$ la vitesse relative.

Tenant compte des dérivées temporelles des vecteurs unitaires l'expression ci-dessus devient:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{PS} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{PS}$$

La vitesse absolue du point matériel P vaut:

$$\mathbf{v}_a = \frac{d}{dt} \mathbf{OS} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OP} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{PS}$$

ou encore

$$\mathbf{v}_a = \frac{d}{dt} \mathbf{OS} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OS} \quad (\text{III.31})$$

L'accélération absolue se calcule de la même manière:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_a = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{OS} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}_r + \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OP}) + \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{PS})$$

Faisant l'hypothèse d'une vitesse de rotation constante quelques opérations vectorielles élémentaires donnent :

$$\mathbf{a}_a = \frac{d}{dt} \mathbf{v}_a = \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OS}) \quad (\text{III.32})$$

L'accélération relative de la particule matérielle est donnée par:

$$\mathbf{a}_r = \frac{d}{dt} \mathbf{v}_r = \left(\frac{d v_{r_x}}{dt}, \frac{d v_{r_y}}{dt}, \frac{d v_{r_z}}{dt} \right)$$

Décomposons le vecteur \mathbf{OS} d'une autre manière:

$$\mathbf{OS} = n\mathbf{E}_3 + \mathbf{r}$$

\mathbf{r} est un vecteur perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre .

L'accélération d'entraînement se décompose et se simplifie de la manière suivante lorsqu'on tient compte du fait que $\mathbf{r} \perp \mathbf{E}_3$.

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OP}) = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) = -\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r} \quad (\text{III.33})$$

L'accélération absolue se décompose donc en trois termes :

i) accélération relative

$$\mathbf{a}_r = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z \quad (\text{III.34})$$

ii) accélération de coriolis

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r \quad (\text{III.35})$$

Elle est perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre et à la vitesse relative.

iii) accélération d'entraînement:

$$\mathbf{a}_e = -\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r} \quad (\text{III.36})$$

d) *Loi de la dynamique des fluides dans un référentiel lié à la Terre*

La loi de Newton s'applique à un point matériel repéré dans à un référentiel d'inertie.

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v}_a = \sum_{i=1}^n m \mathbf{F}_i \quad (\text{III.37})$$

\mathbf{F}_i est la force par unité de masse i qui s'applique sur le point matériel considéré.

n est le nombre total de forces.

Transformons cette équation pour un système repéré dans des axes liés à la Terre:

$$m(\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_e) = m\mathbf{F}_1 + \sum_{i=2}^n m\mathbf{F}_i \quad (\text{III.38})$$

La force par unité de masse $\mathbf{F}_1 = \mathbf{G}$ est la force unitaire de gravité agissant sur le point considéré. Habituellement on regroupe la force unitaire \mathbf{G} et l'accélération d'entraînement en un seul terme appelé gravité apparente \mathbf{g} :

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r} \quad (\text{III.39})$$

Il en résulte que la gravité apparente sera plus faible à l'équateur qu'aux pôles.

Dans la suite, l'indice r est supprimé pour simplifier l'écriture. Le mouvement d'une particule de masse m obéira à la loi suivante:

$$m(\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}) = m\mathbf{g} + \sum_{i=2}^n m\mathbf{F}_i \quad (\text{III.40})$$

Dans cette expression et dans les suivantes les vitesses et accélérations seront toujours des grandeurs relatives à la Terre.

Remarques

Certaines personnes utilisent le concept de force de coriolis. Il faut l'éviter. La confusion s'introduit du fait que l'équation de mouvement décrite ci-dessus peut encore se mettre sous la forme:

$$m\mathbf{a} = -2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + m\mathbf{g} + \sum_{i=2}^n m\mathbf{F}_i \quad (\text{III.41})$$

Le terme $\mathbf{F}_{\text{coriolis}} = -2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$ n'est pas une force au sens strict mais plutôt une force d'inertie.

Lorsqu'on lance un projectile dans l'environnement terrestre tout se passe comme si ce projectile était soumis à une force supplémentaire (la "force de coriolis") agissant vers la droite perpendiculairement à la vitesse du projectile dans l'hémisphère nord (vers la gauche dans l'hémisphère sud).

Fig.IV.1 Axes cartésiens centrés en un point P situé à une latitude ϕ .

Outre la force de gravité, les forces qui entrent en jeu dans la dynamique de l'eau (ou de l'air) sont la « force » de pression, la force de marée et les forces dissipatives associées au cisaillement entre les couches.

La loi (III.40) détermine le mouvement d'une particule au cours du temps en donnant son vecteur position $s = s(s_0, t)$ qui est une fonction du temps et de sa position initiale s_0 . Les vitesses et accélérations de cette particule sont données par:

$$u_p = \frac{d}{dt}s(s_0, t)$$

et

$$a_p = \frac{d^2}{dt^2}s(s_0, t) = \frac{d}{dt}u_p(s_0, t)$$

Ces grandeurs sont peu accessibles à l'expérimentateur. On préfère déterminer la vitesse et l'accélération en un point de l'espace (soit le point matériel effectif du système qui se trouve en ce point géométrique à l'instant considéré), c'est-à-dire $u = u(s, t)$ et $a = a(s, t)$. Ces grandeurs sont obtenues en éliminant le vecteur-position initial s_0 en utilisant la fonction $s = s(s_0, t)$.

Désignons par $\frac{\partial F}{\partial t}$ la dérivée (partielle) par rapport au temps à s constant de la fonction scalaire $F(s, t)$. Elle exprime la variation temporelle de cette grandeur pour un observateur placé en s .

$\frac{dF}{dt}$ mesure le taux de variation de la grandeur F pour un observateur suivant la particule. Le

lien entre ces deux dérivées est donnée par (cfr :annexe)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \cdot \nabla F \quad \text{(III.42)}$$

Cette relation se généralise pour un champ vectoriel comme celui de la vitesse.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (\text{III.43})$$

La signification des termes de (III.44) est la suivante:

- $\frac{d}{dt} \mathbf{u}$ accélération (relative à la Terre) de la particule,
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ accélération locale qui se mesure à l'aide d'un courantomètre en un point du fluide
- $u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}$ termes d'accélération spatiale qui se décomposent en
 - $u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ advection horizontale de la vitesse,
 - $w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}$ advection verticale ou convection de la vitesse.

Analyse des différentes forces

- Les forces astronomiques de marée liés aux mouvements relatifs du soleil et de la lune.
- La force de pression sur une particule fluide (élémentaire) de volume unitaire est donnée par:

$$\mathbf{F}_p = -\nabla p \quad (\text{III.44})$$

- Les forces dissipatives ont des formes complexes. Elles s'expriment en fonction des variations spatiales de la vitesse et de l'agitation des particules fluides, c'est-à-dire de la turbulence de l'air et de l'eau.

Dans l'océan ces forces dissipatives sont importantes dans les couches limites de surface et de fond. L'épaisseur de la couche de surface (de quelques dizaines à une centaine de mètres) dépend de la turbulence générée par les vents, de la fréquence de coriolis et de la stabilité de la colonne d'eau. L'épaisseur de la couche de fond est plus petite que celle de surface. Les forces dissipatives se manifestent aussi dans des régions où le cisaillement de la vitesse est important.

Pour des raisons de simplicité de présentation la force de marée, décrite et explicitée dans un chapitre ultérieur, sera omise dans les équations de ce chapitre. En explicitant ces forces et tenant compte de (III.43 et 44), (III.40) devient :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = -2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) \quad (\text{III.45})$$

ou

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = -2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{b} - \nabla \frac{p - p_{\text{réf}}}{\rho_{\text{réf}}} + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) \quad (\text{III.46})$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est la viscosité cinématique et μ la viscosité dynamique.

L'équation (III.46) a été obtenue en introduisant la poussée.

Introduire la poussée dans l'équation de la dynamique, remplacer l'équation de continuité par la condition d'incompressibilité et de remplacer la masse volumique par une valeur de référence constante dans les termes non différentiels constituent ce qu'on appelle l'approximation de Boussinesq.

Comme la pression de référence ne dépend quasiment pas de z et qu'elle constitue la partie dominante de la pression, ce sont donc bien les écarts de pression qui seront responsables du mouvement.

III.6 Equation d'évolution de la température

Comme la température ne se comporte pas comme un traceur; l'équation d'évolution de la température s'obtient en exprimant le premier principe de la thermodynamique en terme des variables d'état température et pression. La thermodynamique donne :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} - \beta T \frac{dp}{dt} = R + Q_h - \nabla \cdot \mathbf{q}_h \quad (\text{III.47})$$

où R est le taux de production d'énergie par des processus radiatifs, Q_h les termes de production de chaleur associés aux processus visqueux, aux réactions chimiques, biochimiques et physico-chimiques et q_h les flux de chaleurs associés à des processus moléculaires de transport.

Le flux de chaleur est généralement exprimé en terme du gradient de température par une loi phénoménologique de Fourier-Fick :

$$q_h = -\rho C_p k_T \nabla T \quad (\text{III.48})$$

avec k_T la diffusivité thermique (m^2/s). En l'absence de réactions chimiques, biochimiques et physico-chimiques, de termes sources et en négligeant le taux de production d'énergie par des processus radiatifs, l'équation traduisant le premier principe de la thermodynamique donnée ci-dessus se simplifie:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (\rho C_p \kappa^T \nabla T) \quad (\text{III.49a})$$

ou encore

$$\frac{d(\rho C_p T)}{dt} = \frac{\partial(\rho C_p T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho C_p T \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\rho C_p \kappa^T \nabla T) \quad (\text{III.50})$$

étant donné la faible valeur du coefficient d'expansion thermique de l'eau et de sa compressibilité.

Cas particulier : Océan homogène horizontalement :

Dans ces conditions, l'équation (III.50) se simplifie:

$$\frac{\partial(\rho C_p T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho C_p T w) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho C_p \kappa^T \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (\text{III.51})$$

En prenant un système d'axes avec un axe vertical pointant vers le ciel, l'intégration verticale entre le niveau $z = -h$ jusqu'au niveau de la surface situé en $z = \zeta$ donne :

$$\bar{\rho} C_p H \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \left(-\rho C_p T w + \rho C_p \kappa^T \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{surface} - \left(-\rho C_p T w + \rho C_p \kappa^T \frac{\partial T}{\partial z} \right)_z \quad (\text{III.52})$$

avec $H = h + \zeta$

A une profondeur suffisante le flux de chaleur est quasi-négligeable, il en résulte dans ce cas simple, que les changements de température sont uniquement dus aux flux énergétiques à l'interface air-mer, c'est-à-dire :

$$\phi_{surface} = \left(-\rho C_p T w + \rho C_p \kappa^T \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{surface} = \sum_{i=1} Q_i \quad (III.53)$$

avec :

$Q_1 = R_s$ flux d'énergie radiative incidente de courte longueur d'onde,

$Q_2 = -a Q_1$ flux d'énergie radiative réfléchi de courte longueur d'onde,

$Q_3 = R_l$ flux total d'énergie radiative de grande longueur d'onde,

$Q_4 = Q_h$ flux de chaleur sensible (associé au gradient vertical de température),

$Q_5 = Q_E$ flux de chaleur latente associé au flux d'évaporation.

La température de la couche augmente ou diminue suivant le signe de $\phi_{surface}$

III.8 Introduction à la turbulence

Les différents capteurs océanographiques (température, conductivité, courants, ...) et modèles hydrodynamiques ne mesurent (ou ne calculent) que des grandeurs moyennes et non des valeurs instantanées, de plus on n'est que rarement intéressé par les phénomènes de très haute fréquence en océanographie.

Les variables océanographiques et météorologiques sont donc moyennées sur un intervalle de temps Δt .

Une grandeur vectorielle ou scalaire,

$$a = a(x, y, z, t) \text{ ou } b = b(x, y, z, t)$$

se décompose en une partie moyenne et une partie fluctuante :

ou

$$a = \langle a \rangle + a' \quad (III.54)$$

$$b = \langle b \rangle + b'$$

avec

$$\langle a(t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} a \, dt \quad \langle a' \rangle = 0$$

et

$$\langle b(t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} b \, dt \quad \langle b' \rangle = 0 \quad (III.55)$$

Cette opération élimine à priori les phénomènes caractérisés par des périodes (temps caractéristiques) beaucoup plus petites que Δt . Les fluctuations sont associées à la haute fréquence ou à la turbulence et la moyenne temporelle de ces fluctuations est nulle. L'opération de moyenne élimine donc les contributions de haute fréquence pour les termes linéaires des équations de la mécanique des fluides.

Exemple: En décomposant la vitesse instantanée en une vitesse moyenne et une fluctuation de vitesse dans le terme de Coriolis:

$$f \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{u} = f \mathbf{e}_z \wedge \langle \mathbf{u} \rangle + f \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{u}' \quad (III.56)$$

L'opération de moyenne donne simplement :

$$f \mathbf{e}_z \wedge \langle \mathbf{u} \rangle \quad (III.57)$$

La moyenne du terme de Coriolis donne le terme de Coriolis pour l'écoulement moyen.

Les équations de la mécanique des fluides contiennent également des termes non-linéaires. Les termes non linéaires associés à l'advection se décomposent comme suit en introduisant les contributions moyennes et fluctuantes des variables d'état :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} A) = \nabla \cdot (\langle \mathbf{u} \rangle \langle A \rangle) + \nabla \cdot (\langle \mathbf{u} \rangle A') + \nabla \cdot (\mathbf{u}' \langle A \rangle) + \nabla \cdot (\mathbf{u}' A') \quad (III.58)$$

L'opération de moyenne donne :

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{u} A) \rangle = \nabla \cdot (\langle \mathbf{u} \rangle \langle A \rangle) + \nabla \cdot \langle (\mathbf{u}' A') \rangle \quad (III.59)$$

c'est-à-dire deux contributions : l'advection par le courant moyen de la grandeur moyenne considérée et la divergence de la moyenne des produits des fluctuations. Les phénomènes de haute fréquence (turbulence) interagissant donc avec l'écoulement moyen.

Exemple: en prenant $\Delta t = 5$ min, les ondes de surface vagues et houle ne sont pas mises en évidence explicitement car leur temps caractéristique est trop petit, mais leur action devra être reprise globalement par les termes associés à la turbulence. Pour mettre en évidence ces ondes, le pas d'intégration (III.55) doit être beaucoup plus petit que le temps caractéristique du phénomène considéré.

De manière générale, les différentes équations d'évolution décrites dans les paragraphes précédents se mettent sous la forme générale :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot (A \mathbf{u}) = \Psi^A + \nabla \cdot (\alpha^A \nabla A) \quad (\text{III.60})$$

où

A	variable d'état quelconque,
\mathbf{u}	vitesse du fluide,
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right)$	opérateur différentiel vectoriel,
α^A	diffusivité moléculaire du constituant i ou la viscosité moléculaire suivant le cas.
Ψ^A	taux de production ou de destruction de A ;

La variable A représente

u_i	la composante i du vecteur vitesse,
ρ	la masse volumique du fluide,
ρ^i	la masse volumique du constituant i,
T	la température,
S	la salinité,
	ou tout autre variable comme par exemple l'énergie cinétique.

Le premier terme du membre de gauche est la mesure des variations locales de la variable d'état A, le deuxième est l'advection de la grandeur A par la vitesse du fluide. Dans le membre de droite, Ψ^A est le terme de production ou de destruction de A résultant d'actions extérieures ou d'interactions internes et le second est le terme associé à la diffusion ou la viscosité moléculaire.

Les équations de conservation sont non linéaires en raison des termes d'advection et les inhomogénéités spatiales des champs de vitesse ou des grandeurs A induisent des contributions non linéaires qui agiront sur l'écoulement moyen.

Comme on cherche à décrire l'état d'un système et à étudier son évolution dans l'espace et le temps, on s'intéresse généralement aux valeurs moyennes sans vouloir reproduire la structure détaillée des phénomènes. Il convient donc de rechercher les équations d'évolution des grandeurs moyennes. Elles s'obtiennent en « moyennant » les équations d'évolution (III.49) sur des intervalles de temps caractéristiques. Cette opération conduit à l'apparition de nouveaux termes. Les termes d'advection se décomposent comme suit :

$$\langle \nabla \cdot (uA) \rangle = \nabla \cdot (vB) + \nabla \cdot \langle wC \rangle \quad (\text{III.61})$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad u &= v + w & \text{avec } \langle w \rangle &= 0 \\ A &= B + C & \text{avec } \langle A \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.62})$$

L'opération $\langle \rangle$ s'effectue sur l'intervalle de temps considéré.

Le terme $J^B = \langle wC \rangle$ représente le flux turbulent associé à la moyenne du produit des fluctuations. Les différentes équations d'évolution pour les variables moyennes se mettent sous la forme

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \cdot (Bv) = Q^B + \nabla \cdot (\alpha^B \nabla B) - \nabla \cdot J^B \quad (\text{III.63})$$

Le dernier terme du membre de droite représente l'action du flux turbulent $J^B = \langle wC \rangle$.

L'expérience montre que le flux turbulent est responsable d'une diffusion beaucoup plus efficace que la diffusion moléculaire. La théorie de la turbulence indique que les flux turbulents sont reliés, en première approximation, aux grandeurs moyennes par des expressions de la forme :

$$J^B = - \left(\lambda_x^B \frac{\partial B}{\partial x} e_x + \lambda_y^B \frac{\partial B}{\partial y} e_y + \lambda_z^B \frac{\partial B}{\partial z} e_z \right) \quad (\text{III.64})$$

où les λ_1^B sont des fonctions des variables de position dans l'espace temps. Pour la plupart des applications, les termes associés aux phénomènes moléculaires sont négligeables.

Le problème revient à calculer ces coefficients « turbulents » λ^B car ils dépendent de l'intensité de la turbulence, c'est-à-dire de l'intensité des fluctuations et de l'intervalle de temps sur laquelle on effectue la moyenne. Différentes théories sont présentées dans des cours plus avancés. La turbulence est d'origine mécanique (exemple : écoulements cisailés) et/ou d'origine thermique (exemple : fluide échauffé à sa base). Elle augmente avec les instabilités de l'écoulement.

Rappels

a) *Nombre de Reynolds*

Le nombre de Reynolds (nombre sans dimension) mesure le rapport entre le terme inertiel et le terme dissipatif associé à la viscosité moléculaire:

$$R_e = \frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = \frac{u_c l_c}{\nu} \quad (\text{III.65})$$

avec u_c et l_c respectivement les vitesses et longueurs caractéristiques du phénomène. Lorsque le nombre de Reynolds grand les forces visqueuses ne jouent pratiquement aucun rôle.

b) *Energie cinétique turbulente moyenne et taux de dissipation d'énergie.*

En turbulence, une grandeur très importante est l'énergie cinétique turbulente moyenne donnée par

$$e = \left\langle \frac{1}{2} (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2) \right\rangle \quad (\text{III.67})$$

L'équation d'évolution de cette énergie cinétique turbulente moyenne contient :

- un terme de production (positif) associé au cisaillement de l'écoulement moyen (interaction entre les écoulements turbulent et moyen) ;
- un terme de production (positif ou négatif) lié au flux vertical moyen de poussée.
- un terme de destruction de l'énergie mécanique en chaleur. Il est associé à la viscosité et donné par ε

$$\varepsilon = \left\langle \mathbf{v} \sum_i \sum_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right\rangle \quad (\text{III.68})$$

c) *Nombre de Rossby*

Afin de caractériser l'importance des termes d'advection par rapport au terme de Coriolis, les géophysiciens introduisent le nombre de Rossby de la manière suivante :

$$R_0 = \frac{|\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}|}{|2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}|} = \frac{u_c}{l_c \Omega} \quad (\text{III.69})$$

où u_c et l_c sont respectivement les vitesse et longueur caractéristiques du phénomène étudié.

CHAPITRE IV

DYNAMIQUE DES COURANTS OCEANIQUES Partim 1 : courants « sans frottement »

IV.1 Introduction

La dynamique des courants sera étudiée dans ce chapitre en supposant les termes dissipatifs de l'équation de mouvement négligeables. Cette hypothèse implique que l'action des contraintes de cisaillement sur le fluide est nulle. Ainsi, le vent ne pourra jouer aucun rôle direct sur la dynamique de ces courants. Sans être aussi strict dans les hypothèses simplificatrices, il est possible de montrer que les termes de « frottement » associés au cisaillement horizontal de l'écoulement sont négligeables en dehors d'une couche limite de surface dont l'épaisseur (10^2 à 10^4 m) dépend de la vitesse du courant, de la géométrie du bassin et de sa bathymétrie. Le cisaillement vertical de l'écoulement induit par friction se fait sentir sur une épaisseur estimée (cfr.chapitre V) par la profondeur d'Ekman :

$$D = \sqrt{\frac{2\nu^t}{f}} \quad (\text{IV.1})$$

avec f la fréquence de Coriolis et ν^t la viscosité turbulente verticale. Tenant compte des valeurs numériques caractéristiques de cette dernière, l'épaisseur de la couche d'Ekman varie entre 10 et 100 mètres suivant les conditions météorologiques et de stabilité de la couche .

Nous montrerons dans ce chapitre que les courants « sans frottement » sont générés par les gradients horizontaux de température et de salinité, de pression atmosphérique et par la pente de l'interface air-mer.

IV.2 Analyse des ordres de grandeur des termes de l'équation de mouvement.

Les équations de la mécanique des fluides sont difficiles à résoudre. Une méthode basée sur l'analyse des ordres de grandeur des différents termes des équations permet de les estimer et de négliger ainsi les termes trop petits de manière rationnelle.

La première étape de cette analyse consiste à estimer *les valeurs caractéristiques des variables d'état et les échelles de temps et de longueur caractéristiques*

Une valeur caractéristique ou valeur typique a_c d'une variable d'état a est une estimation de sa grandeur:

$$a \approx a_c \quad (\text{IV.2})$$

Les échelles spatiale l_c et temporelle t_c de la variable d'état a sont définies de manière à pouvoir estimer les dérivées partielles spatiales et temporelles.

$$\frac{\partial a}{\partial t} \approx \frac{a_c}{t_c} \quad \text{et} \quad \frac{\partial a}{\partial x} \approx \frac{a_c}{l_c} \quad (\text{IV.3})$$

On introduit également les fréquences et nombres d'onde caractéristiques. Ils sont définis par:

$$\omega_c \approx t_c^{-1} \quad \text{et} \quad k_c \approx l_c^{-1} \quad (\text{IV.4})$$

Lorsque les phénomènes sont périodiques, la fréquence caractéristique est la fréquence et le nombre d'onde caractéristique le nombre d'onde. Ainsi

- dans le temps,

$$\text{si } a = A e^{i\omega t} \quad \frac{\partial a}{\partial t} = i\omega A \approx \omega a_c \quad (\text{IV.5})$$

- dans l'espace,

$$\text{si } a = A e^{ikx} \quad \frac{\partial a}{\partial x} = ikA \approx k a_c \quad (\text{IV.6})$$

l'échelle de temps caractéristique est la période de l'onde divisée par 2π et l'échelle spatiale est la longueur d'onde divisée par 2π .

Cette analyse requiert un certain nombre d'éléments relevant d'observations: les courants océaniques sont caractérisés par des ordres de grandeurs

- composante horizontale de la vitesse 10^{-2} à 1 m/s
- longueur caractéristique de sa variation horizontale 10^5 à 10^6 m
- longueur caractéristique de sa variation verticale 10^2 à 10^3 m
- temps caractéristique 10^5 à 10^6 s ou même plus.

L'estimation de l'ordre de grandeur de la composante verticale de la vitesse est délicate car il s'agit d'une grandeur difficilement mesurable car petite. Une manière d'approcher cette grandeur se déduit des considérations suivantes : la composante verticale de la vitesse est

- nulle au fond de la mer ;
- égale à la vitesse de déplacement de l'interface ($\frac{d\zeta}{dt}$, ζ cote de l'interface).
- égale à la vitesse de déplacement de la thermocline ($\frac{dh}{dt}$, h la profondeur de la thermocline)

Pour une marée ou un upwelling (remontée d'eau), la composante verticale caractéristique de la vitesse sera de l'ordre de 10^{-5} à 10^{-4} m/s suivant l'intensité de la marée ou de la remontée d'eau froide. De manière générale, l'ordre de grandeur de cette composante sera :

$$w_c \approx \frac{h_c}{t_c} \quad (\text{IV.7})$$

avec h_c l'ordre de grandeur de la variation du niveau de l'interface ou de la thermocline.

Tenant compte de ces ordres de grandeur la dissymétrie est forte entre les composantes horizontales et verticale de la vitesse d'un courant marin.

IV.3 Equation de conservation de la masse.

Etant donné les estimations des grandeurs caractéristiques des courants marins et le fait expérimental selon lequel les variations spatiales et temporelles de la masse volumique sont petites, l'équation (III.19), c'est-à-dire:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{IV.8})$$

prend une forme plus simple:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{IV.9})$$

soit encore

$$\nabla_h \cdot \mathbf{v}_h + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV.10})$$

où \mathbf{v}_h représente les composantes horizontales de la vitesse et w la composante verticale.

Aux très grandes échelles temporelles, la composante verticale de la vitesse est si faible que (IV.10) se simplifie encore :

$$\nabla_h \cdot \mathbf{v}_h = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{IV.11})$$

Cette relation exprime un écoulement horizontal « indivergentiel » (c'est-à-dire ni convergent ni divergent).

IV.4 Composante verticale de l'équation de mouvement

La composante verticale de l'équation de mouvement (cfr. chap.III) s'écrit :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w = +2\Omega \cos \phi u_1 - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla w) + F_{m,z} \quad (\text{IV.12a})$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w = +2\Omega \cos \phi u_1 - b - \frac{\partial}{\partial z} q + \nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla w) + F_{m,z} \quad (\text{IV.12b})$$

avec $F_{m,z}$ la composante verticale de la force de marée

$$q(z) = \frac{p - p_{réf}(z)}{\rho_{réf}} \quad \text{la pression réduite} \quad (IV.13)$$

En anticipant le chapitre VII, la force par unité de masse, responsable des marées, est de l'ordre de 10^{-6} m/s^2 .

En ne gardant que les termes les plus importants, l'estimation des ordres de grandeurs des différents termes de la composante verticale de l'équation de mouvement conduit à:

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (IV.14a)$$

ou

$$+b - \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad (IV.14b)$$

Les autres termes de (IV.12) sont au moins mille fois plus faibles aux échelles des courants océaniques.

Conclusion: à l'échelle des courants océaniques (et de marée), la pression suit dans la direction verticale une loi hydrostatique.

Prenons un système d'axes dont l'origine du système d'axes est située au niveau de l'interface air-mer en l'absence de tout mouvement et ζ représente la cote de l'interface par rapport au niveau de repos.

L'intégration verticale de (IV.14) depuis le niveau z jusqu'à celui de l'interface air-mer conduit à :

$$p(z) = p_{réf} + p_{atm} + \rho_{réf} g \zeta + \int_z^\zeta \sigma^* g dz \quad (IV.15a)$$

ou

$$q(z) = \frac{p_{atm} + \rho_{réf} g \zeta}{\rho_{réf}} - \int_z^\zeta b dz \quad (IV.15b)$$

avec $\rho_{réf}$ la masse volumique d'une eau de mer de référence et σ^* l'écart de masse volumique par rapport à $\rho_{réf}$.

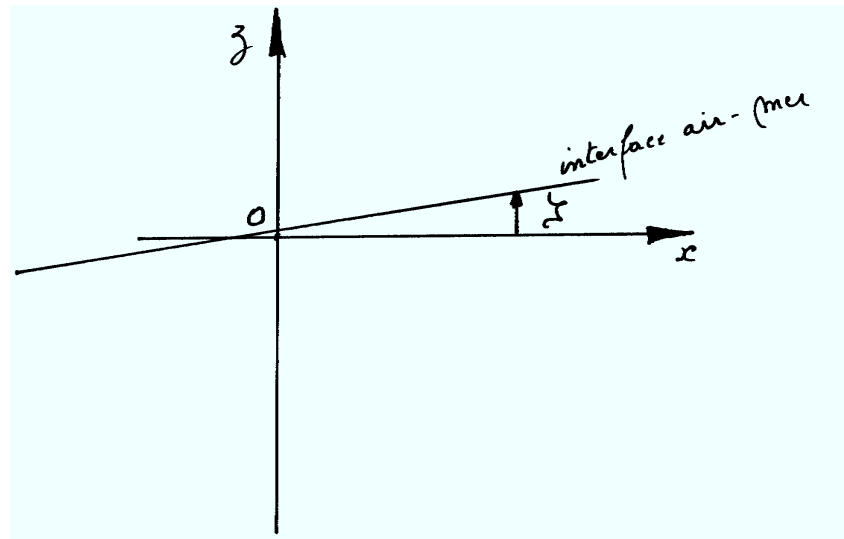


Figure IV.1 Position de l'interface et choix du système d'axes.

La relation (IV.14a) sert également à calculer la profondeur à partir des mesures océanographiques classiques (température, salinité et pression) en intégrant la relation ci-dessous :

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g}$$

En prenant une masse volumique de référence $\rho_{réf} = 1028 \text{ kg/m}^3$ (masse volumique d'une eau de mer caractéristique), on obtient une relation linéaire entre les changements de pression et de profondeur: 1 mètre correspond environ à 10^4 Pa ou à 1 dbar.

IV.5 Composantes horizontales de l'équation de mouvement

Les composantes horizontales de l'équation de mouvement sous forme vectorielle sont :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_h + 2(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v})_h = -\frac{1}{\rho_{réf}} \nabla_h p + \nabla \cdot (\mathbf{v}^t \nabla \mathbf{u}_h) + \mathbf{F}_{m,h} \quad (\text{IV.16a})$$

ou

$$\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_h + 2(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v})_h = -\nabla_h q + \nabla \cdot (\nu^t \nabla \mathbf{u}_h) + \mathbf{F}_{m,h} \quad (\text{IV.16b})$$

où ν^t est la viscosité turbulente correspondant aux courants marins (de l'ordre de $10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ dans le plan horizontal et 10^{-3} à $10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$ dans la direction verticale) et $\mathbf{F}_{m,h}$ la composante horizontale de la force de marée.

Pour les courants océaniques, en dehors de la couche de frottement, en tenant compte des différents ordres de grandeurs, des temps et longueurs caractéristiques, l'équation (IV.16) se simplifie comme suit en ne gardant que les termes les plus importants:

$$f \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_h = -\frac{1}{\rho} \nabla_h p \quad (\text{IV.17a})$$

ou
$$f \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_h = -\nabla_h q \quad (\text{IV.17b})$$

avec $f = 2\Omega \sin \phi$ la fréquence (ou paramètre) de Coriolis avec ϕ la latitude comptée positivement dans l'hémisphère Nord. Le terme de Coriolis est « équilibré » par le terme de pression.

La relation (IV.17) porte le nom d'équation ou d'équilibre géostrophique et le courant, solution de cette relation, le courant géostrophique. Le symbole habituellement choisi pour désigner ce courant est : $\mathbf{v}_g \equiv \mathbf{v}_h$. La division vectorielle de (IV.17) donne :

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{\rho f} \mathbf{e}_z \wedge \nabla_h p \quad (\text{IV.18a})$$

ou
$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{f} \mathbf{e}_z \wedge \nabla_h q \quad (\text{IV.18b})$$

La masse volumique dans la relation (IV.17a) est la masse volumique de référence

Le courant géostrophique est:

- parallèle aux isobares;
- proportionnel au gradient de pression (à la « densité » d'isobares) ou inversement proportionnel à la distance entre isobares ;

- laisse à droite les hautes pressions dans l'hémisphère Nord (à gauche dans l'hémisphère sud).

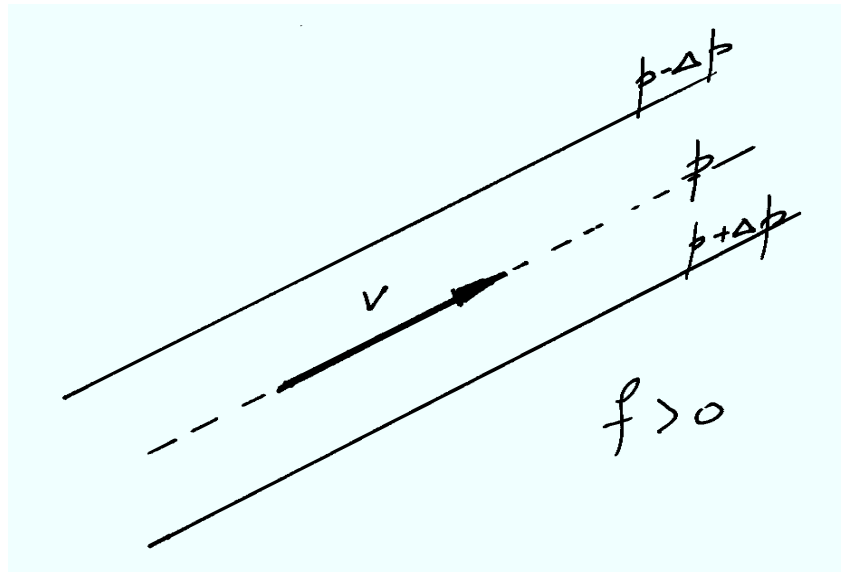


Figure IV.2 Relation entre le champ horizontal de pression et le courant géostrophique.

Pour un océan caractérisé par des gradients horizontaux de température et de salinité nuls et soumis à un champ de pression atmosphérique uniforme, le gradient horizontal de pression se réduit à:

$$\nabla_h p = \rho_{ref} g \nabla \zeta \quad (IV.19a)$$

ou

$$\nabla_h q = g \nabla \zeta \quad (IV.19b)$$

et la substitution de (IV.19) dans (IV.18) donne

$$\mathbf{v}_g = \frac{g}{f} \mathbf{e}_z \wedge \nabla_h \zeta \quad (IV.20)$$

Remarque : les relations (IV.17, 18 et 20) ne sont pas valables dans les régions très proches de l'équateur, en effet la latitude est nulle à l'équateur.

La fig.IV.3 montre une bonne corrélation entre le courant observé et le courant géostrophique calculé par la différence des niveaux observés entre deux stations côtières.

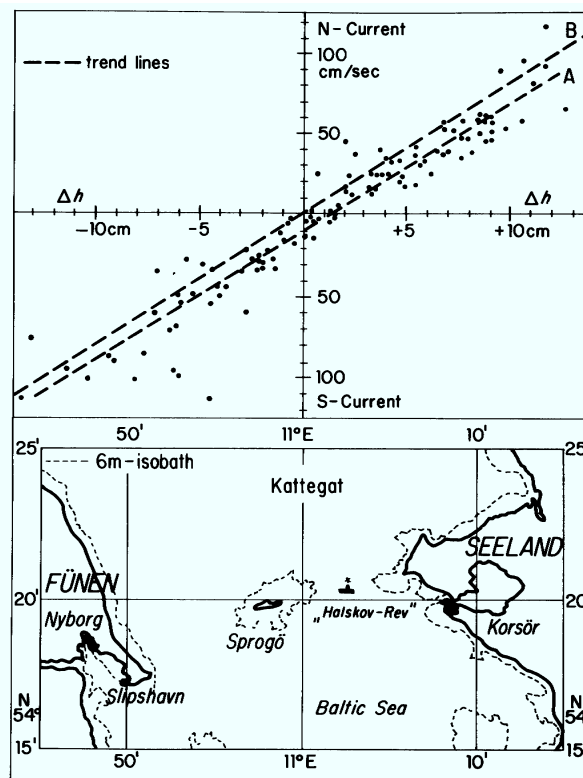


Figure IV.3 Comparaison entre courants mesurés et courants calculés par la formule géostrophique.

IV.6 Relation entre de cisaillement vertical du courant géostrophique et les distributions horizontales de température et de salinité.

On montre qu'en l'absence de termes dissipatifs et aux grandes échelles, le cisaillement vertical de l'écoulement doit être dû à la structure des champs de densité.

Dans ce paragraphe on montre le lien direct entre le cisaillement vertical de l'écoulement et les champs de température et de salinité.

Comme l'écoulement obéit à (IV.18), il vient :

$$\frac{\partial}{\partial z} v_g = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{f} e_z \wedge \nabla_h q \right) = \frac{1}{f} e_z \wedge \nabla_h \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right) \quad (IV.21)$$

Tenant compte de (IV.13), (IV.21) se transforme comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial z} v_g = \frac{+1}{f} e_z \wedge \nabla_h b \quad (\text{IV.22})$$

Comme la compressibilité de l'eau est très faible, l'équation d'état de l'eau linéarisée (I.10) permet de calculer la poussée et ses variations spatiales :

$$\frac{\partial}{\partial z} v_g = \frac{\beta g}{f} e_z \wedge \nabla_h T - \frac{K_s g}{f} e_z \wedge \nabla_h S \quad (\text{IV.23})$$

Cette relation démontre clairement la relation entre les champs de température et de salinité sur le cisaillement vertical de l'écoulement géostrophique.

Dans le cas particulier d'un océan isohalin et caractérisé par une décroissance monotone de la température avec la profondeur, le cisaillement vertical de l'écoulement est tel qu'il laisse les eaux chaudes à droite dans l'hémisphère Nord.

IV.7 Exercice: Relation entre le courant géostrophique et la distribution verticale de la pression.

Pour la simplicité des calculs, le champ de pression choisi est le suivant :

$$p = p(x, z) \quad (\text{IV.24})$$

La substitution de (IV.24) dans la relation géostrophique (IV.18) donne :

$$v_g = \frac{1}{\rho f} e_z \wedge \frac{\partial p}{\partial x} e_x = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} e_y \quad (\text{IV.25})$$

Cette expression signifie qu'aux variations horizontales de pression dans la direction x correspond un courant dans la direction y.

Etant donné la forme sphérique de la terre, le concept de plan horizontal est local, la détermination expérimentale des gradients horizontaux de pression est de plus très délicate.

La coordonnée verticale « naturelle » est la pression, en effet il s'agit de la grandeur primitive « verticale ». La profondeur se déduit de l'intégration de la loi hydrostatique.

Au lieu de déterminer les grandeurs et leurs gradients sur des plans horizontaux on préfère travailler sur des surfaces isobares. Le changement de coordonnées (x, y, z) à (x, y, p) s'opère aisément.

Soit une fonction $F(x, p) = F(x, z(x, p))$

La dérivation de fonction de fonction donne :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_p = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_z + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p \quad (\text{IV.26})$$

En remplaçant F par le champ de pression donné par (IV.24), il vient:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = - \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p \quad (\text{IV.27})$$

Comme la pression suit en bonne approximation la loi hydrostatique, à l'échelle de mouvement des courants océaniques, (IV.27) se simplifie:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p \quad (\text{IV.28})$$

Un raisonnement semblable s'applique à un champ de pression tridimensionnel. Dans ce cas, le gradient horizontal du champ de pression s'exprime en terme du gradient des cotes de la surface isobare :

$$\nabla_h p = \rho g \nabla_p z \quad (\text{IV.29})$$

Le courant géostrophique sera donné dans ce cas par :

$$v_g = \frac{g}{f} e_z \wedge \nabla_p z \quad (IV.30)$$

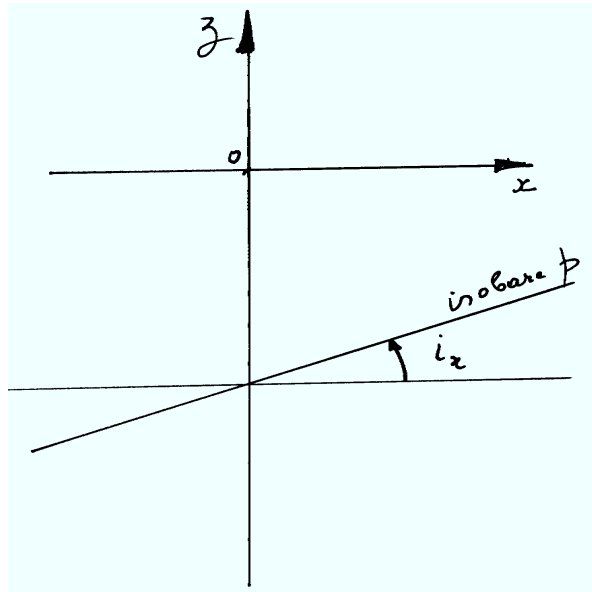


Figure IV.4 Pente d'une surface isobare dans un plan vertical.

Dans le plan vertical (x , z), la surface isobare a une pente (cfr. Fig.IV.2)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p = \text{tg } i_x \cong i_x$$

étant donné que l'angle i_x fait par l'isobare par rapport à l'horizontale est très petit.

Exemple numérique : une pente de 10^{-6} c'est-à-dire une variation de niveau de 1 mètre sur une distance de 1000 km sera responsable d'un courant géostrophique de 0.1 m/s.

Les formules (IV.18 ou 30) semblent indiquer que le calcul des courants géostrophiques est simple: il n'en est rien car la détermination de la pente absolue des isobares est très délicate.

IV.8 Géopotiel et profondeur dynamique.

Le travail pour élever l'unité de masse d'un niveau de référence, soit $z = 0$ jusqu'au niveau z est donné par :

$$W = \int_0^z \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^z -g dz$$

Cette particule de masse unitaire possède donc au niveau z une énergie « géopotentielle » (potentiel dû à la gravité) égale à

$$\Phi = \int_0^z g dz$$

Pour une variation de niveau dz , le changement dans le géopotentiel sera :

$$d\Phi = g dz$$

Afin d'éviter de devoir tenir compte des variations de la gravité, on prend une valeur de référence pour la gravité, soit, $g_{réf} = 10$, et les variations de géopotentiel seront telles que :

$$d\Phi = g dz = g_{réf} dZ \quad (\text{IV.31})$$

où Z est la hauteur géopotentielle, (en océanographie: la profondeur dynamique) c'est-à-dire une mesure de l'énergie géopotentielle exprimée en mètres.

Le gradient horizontal de pression s'exprime encore en fonction du gradient de géopotentiel. Un calcul élémentaire tenant compte de (IV.25) conduit à :

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p = g_{réf} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{z,p} \quad (\text{IV.32})$$

avec α le volume massique de l'eau de mer habituellement décomposé comme suit :

$$\alpha = \alpha_{35,0,p} + \delta \quad (\text{IV.33})$$

$\alpha_{35,0,p}$ volume massique d'une eau à la température de 0°C et de salinité 35 ;

$\delta = \delta(S, T, p)$ anomalie de volume massique qui est donnée, soit dans les tables, soit par des algorithmes numériques.

Etant donné que $g_{réf}$ est numériquement proche de la valeur de la gravité apparente g , les lignes de niveau et les lignes d'égale hauteur géopotentielle coïncident approximativement.

IV.9 Exercice : Méthode dynamique pour le calcul des courants géostrophiques

Le courant géostrophique s'exprime en terme du géopotiel (cfr. IV.32) ou de la profondeur dynamique par :

$$v_g = \frac{1}{f} e_z \wedge \nabla_p \Phi = \frac{g_{réf}}{f} e_z \wedge \nabla_p Z \quad (IV.34)$$

Recherchons la structure verticale de cet écoulement. Soient deux stations océanographiques A et B distantes de L . Des mesures classiques hydrologiques (S , T , p) sont effectuées en A et B.

Sur l'isobare p_1 , le courant géostrophique est $(v_g)_1$ et sur l'isobare p_2 avec $p_2 > p_1$ le courant vaut $(v_g)_2$, la différence dans les vitesses géostrophiques est :

$$v_{g,1} - v_{g,2} = \frac{1}{f} e_z \wedge \nabla_p (\Phi_1 - \Phi_2) \quad (IV.35)$$

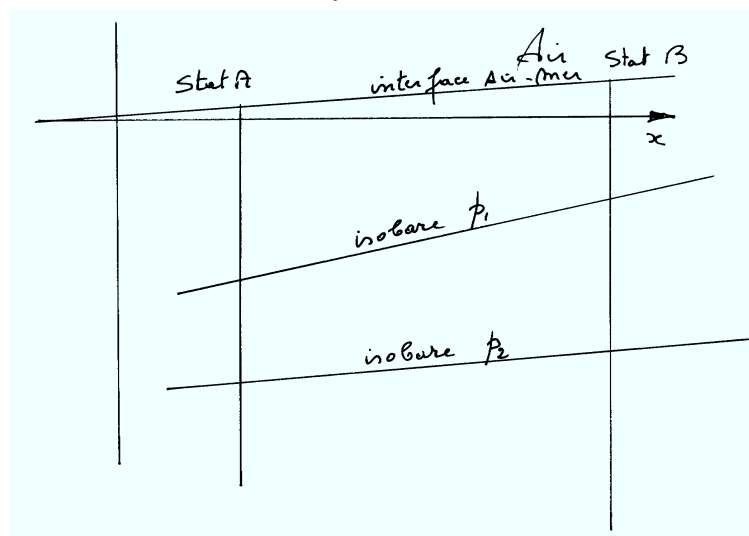


Figure IV.5 Position des isobares à deux stations océanographiques A et B

La différence de géopotential entre les isobares p_2 et p_1 au point A sera :

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_{p_2}^{p_1} \frac{\partial \Phi}{\partial p} dp = - \int_{p_2}^{p_1} \alpha dp \quad (\text{IV.36})$$

ou encore

$$\Delta \Phi_A = \Phi_{1,A} - \Phi_{2,A} = \int_{p_2}^{p_1} \frac{\partial \Phi}{\partial p} dp = - \int_{p_2}^{p_1} \alpha_A dp = - \int_{p_2}^{p_1} (\alpha_{35,0,p})_A dp - \int_{p_2}^{p_1} \delta_A dp \quad (\text{IV.37})$$

A la station B , cette différence est égale à

$$\Delta \Phi_B = \Phi_{1,B} - \Phi_{2,B} = \int_{p_2}^{p_1} \frac{\partial \Phi}{\partial p} dp = - \int_{p_2}^{p_1} \alpha_B dp = - \int_{p_2}^{p_1} (\alpha_{35,0,p})_B dp - \int_{p_2}^{p_1} \delta_B dp \quad (\text{IV.38})$$

La composante selon x du gradient de la différence de géopotential sera estimée par :

$$\frac{\partial (\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial x} \cong \frac{\Delta((\Phi_1 - \Phi_2)_B - (\Phi_1 - \Phi_2)_A)}{\Delta x} \quad (\text{IV.39})$$

La substitution de (IV.37 et 38) dans (IV.39) donne :

$$\frac{\partial (\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial x} \cong \frac{\Delta \left(\int_{p_2}^{p_1} \delta_A dp - \int_{p_2}^{p_1} \delta_B dp \right)}{\Delta x} \quad (\text{IV.40})$$

ou encore

$$\frac{\partial (\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial x} \cong \frac{\Delta \phi_B - \Delta \phi_A}{\Delta x} \quad (\text{IV.41})$$

avec $\Delta \phi = - \int_{p_2}^{p_1} \delta dp = \int_{p_1}^{p_2} \delta dp$ l'anomalie de géopotential entre les isobares

p_2 et p_1 . Cette anomalie de volume massique est donnée dans des tables (ou par des algorithmes numériques) en fonction des valeurs de la température, de la salinité et de corrections du deuxième ou du troisième ordre.

Divisant l'anomalie de géopotential par la valeur de référence de la gravité, on obtient

$$D = \frac{\Delta \phi}{g_{réf}} = - \frac{1}{g_{réf}} \int_{p_2}^{p_1} \delta dp = \frac{1}{g_{réf}} \int_{p_1}^{p_2} \delta dp \geq 0 \quad (\text{IV.42})$$

D est appelée en océanographie : hauteur stérique.

En première approximation, δ est une fonction linéaire de la température et de la salinité :

$$\delta \cong \alpha_{réf} (\beta t - k_s (S - 35)) \quad (\text{IV.42})$$

La distance entre les stations de mesure doit être telle que le nombre de Rossby qui mesure le rapport entre le terme d'inertie et le terme de coriolis soit petit afin de rester consistant avec l'approximation géostrophique. Aux latitudes moyennes, si la vitesse caractéristique de l'écoulement est de l'ordre de 10^{-1} m, la distance minimum entre les stations doit être au moins de l'ordre de 100 km.

La composante selon y de la différence de vitesses géostrophiques sera :

$$(v_{g,1} - v_{g,2})_y = \frac{1}{f \Delta x} (\Delta \phi_B - \Delta \phi_A) \quad (\text{IV.43a})$$

ou

$$(v_{g,1} - v_{g,2})_y = \frac{g_{réf}}{f \Delta x} (\Delta D_B - \Delta D_A) \quad (\text{IV.43b})$$

Le cisaillement vertical du courant géostrophique dépend donc des gradients « horizontaux » intégrés de température et de salinité, c'est à dire de la structure barocline de la masse d'eau.

*Oceanographic data, etc., and calculation of geopotential anomalies ($\Delta\Phi$)
for station A
(using tables in Processing Oceanographic Data, Lafond, 1951)*

Depth (m)	Station A 41°55'N, 50°09'W			Units of $10^{-8} \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$				Units of $\text{m}^2 \text{kg}^{-1} \text{Pa} = \text{m}^2 \text{s}^{-2}$		$\Sigma(\delta \times \Delta p)$ $= \Delta\Phi_A$
	T°C	S	σ_t	$\Delta_{s,t}$	$\delta_{s,p}$	$\delta_{t,p}$	δ	$\bar{\delta}$	$\bar{\delta} \times \Delta p$	
0	5.99	33.71	26.56	148	0	0	148			6.638
25	6.00	33.78	26.61	144	0	0	144	146	0.365	6.273
50	10.30	34.86	26.81	125	0	1	126	135	0.338	5.935
75	10.30	34.88	26.83	123	0	2	125	126	0.315	5.620
100	10.10	34.92	26.89	117	0	2	119	122	0.305	5.315
150	10.25	35.17	27.06	101	0	3	104	112	0.560	4.755
200	8.85	35.03	27.19	89	0	4	93	99	0.455	4.300
300	6.85	34.93	27.41	68	0	5	73	83	0.830	3.470
400	5.55	34.93	27.58	52	0	5	57	65	0.650	2.820
600	4.55	34.95	27.71	39	0	7	46	52	1.040	1.780
800	4.25	34.95	27.74	37	0	8	45	45	0.900	0.880
1000	3.90	34.95	27.78	33	0	10	43	44	0.880	0

Figure IV.6 Données océanographiques pour une station A et calcul des anomalies de géopotentiel.

TABLE 8.1(b) *Oceanographic data, etc., and calculation of geopotential anomalies ($\Delta\Phi$) for station B*
(using tables in *Processing Oceanographic Data*, Lafond, 1951)

Depth (m)	Station B 41°28', 50°09'W			Units of $10^{-8} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$				Units of $\text{m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ Pa} = \text{m}^2 \text{ s}^{-2}$		$\Sigma(\bar{\delta} \times \Delta p)$ $= \Delta\Phi_B$
	T°C	S	σ_t	$\Delta_{s,t}$	$\delta_{s,p}$	$\delta_{t,p}$	δ	$\bar{\delta}$	$\bar{\delta} \times \Delta p$	
0	13.04	35.62	26.88	118	0	0	118			7.894
25	13.09	35.63	26.88	118	0	1	119	119	0.298	7.596
50	13.07	35.63	26.88	118	0	1	119	119	0.298	7.298
75	13.05	35.64	26.89	117	0	2	119	120	0.300	7.000
100	13.05	35.62	26.88	118	0	3	121	122	0.610	6.700
150	13.00	35.61	26.88	118	0	4	122	122	0.610	6.090
200	12.65	35.54	26.90	116	0	5	121	117	1.170	5.480
300	11.30	35.36	27.02	105	0	7	112	98	0.980	4.310
400	8.30	35.09	27.32	76	0	7	83	70	1.400	3.330
600	5.20	34.93	27.61	49	0	8	57	52	1.030	1.930
800	4.20	34.92	27.73	38	0	8	46	45	0.900	0.900
1000	4.20	34.97	27.77	34	0	10	44			0

Figure IV.7 Données océanographiques pour une station B et calcul des anomalies de géopotentiel.

Geopotential anomalies from Tables 8.1 (a, b) and calculated mean relative velocities between stations A and B at various depths

Depth (m)	$\Delta\Phi_B$ ($\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$)	$\Delta\Phi_A$ ($\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$)	$(\Delta\Phi_B - \Delta\Phi_A)$ ($\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$)	V_{rel} (m s^{-1})	
0	7.894	6.638	1.256	0.26	Stn. A: 41°55'N, 50°09'W
25	7.596	6.273	1.323	0.27	Stn. B: 41°28'N, 50°09'W
50	7.298	5.935	1.363	0.28	Diff. = 27', 0'
75	7.000	5.620	1.380	0.29	i.e. stations are 27 n ml apart,
100	6.700	5.315	1.385	0.29	= 50 km = 5×10^4 m.
150	6.090	4.755	1.335	0.28	$\sin 41^\circ 28' = 0.662$
200	5.480	4.300	1.180	0.24	$\sin 41^\circ 55' = 0.668$
300	4.310	3.470	0.840	0.17	mean $\sin \phi = 0.665$
400	3.330	2.820	0.510	0.11	
600	1.930	1.780	0.150	0.03	
800	0.900	0.880	0.020	0.005	$2\Omega \sin \phi = 9.70 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
1000	0	0	0	0	

Figure IV.8 Anomalies de géopotentiel aux stations A et B et calcul de la vitesse relative pour les stations A et B à différentes profondeurs.

La figure suivante montre le profil vertical du courant géostrophique résultant de calculs basés sur les observations hydrologiques des stations A et B.

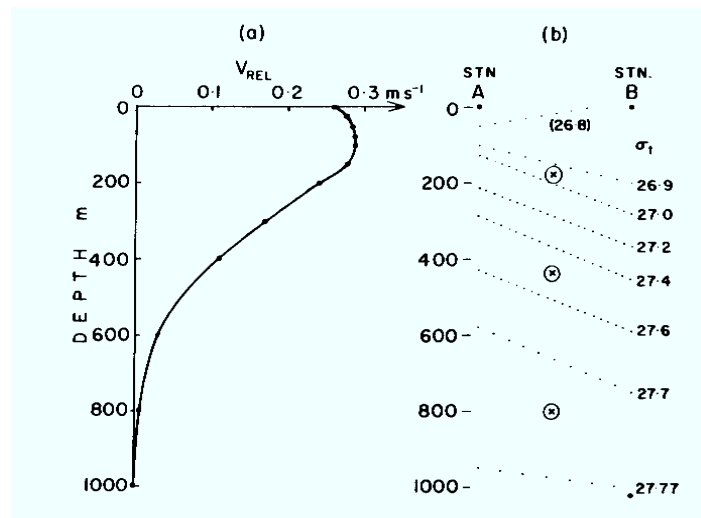


Figure IV.9 Profil vertical du courant géostrophique entre les stations A et B.

Application : Soit une coupe verticale dans l'océan indiquant une eau « légère à droite ».

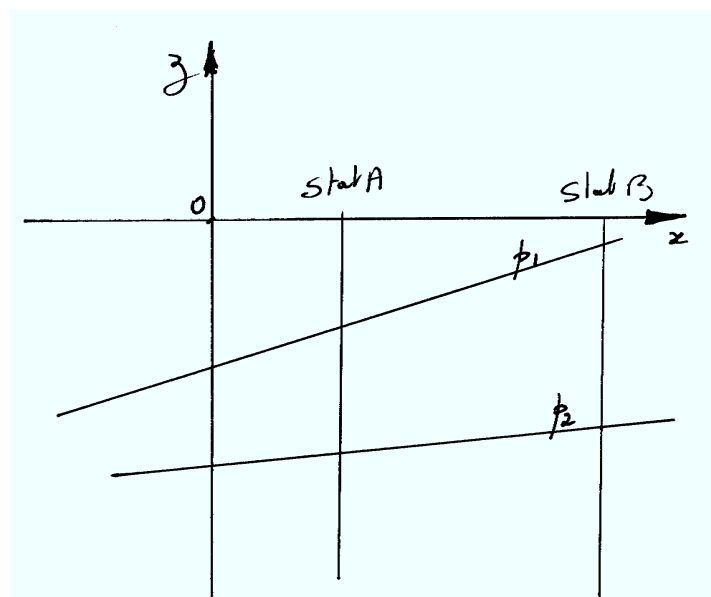


Figure IV.10 Coupe verticale dans l'océan.

La distance verticale entre les deux isobares p_1 et p_2 est plus grande à la station B car l'anomalie de volume massique d'une eau légère est supérieure à celle d'une eau dense. Il en résulte :

$$D_B > D_A$$

La formule (IV.43) exprime la vitesse de l'écoulement au niveau de l'isobare 1 en fonction de celle au niveau 2 et des caractéristiques hydrologiques de la masse d'eau. Pour obtenir une vitesse absolue, il est nécessaire de connaître une des deux vitesses. Si la vitesse de l'eau est supposée nulle au niveau de l'isobare p_2 , la vitesse sera positive au niveau de l'isobare 1 dans l'hémisphère Nord puisque $D_B > D_A$. En d'autres termes, le sens de l'écoulement est tel qu'il laisse les eaux légères à droite dans l'hémisphère nord.

Choix du niveau de référence.

La vitesse absolue s'obtient à la condition de connaître la vitesse géostrophique à un niveau donné.

La mesure directe permet de l'obtenir mais il faut être prudent en raison du bruit sur la mesure et de la nécessité d'avoir un enregistrement suffisamment long afin d'en dégager la composante géostrophique.

A une profondeur suffisamment grande (de l'ordre de mille mètres), les champs de température et de salinité sont relativement uniformes, de plus ils contribuent au champ de masse volumique dans des sens opposés. Puisque les champs de masse volumique sont considérés comme uniformes, le gradient vertical de courant géostrophique sera nul. L'observation indique d'autre part que le courant géostrophique est généralement très faible aux grandes profondeurs: nous supposons, sauf cas contraire, que le courant géostrophique à grande profondeur est nul pour la détermination du profil vertical de vitesse.

Une autre méthode consiste à considérer que la vitesse du courant est nulle à la profondeur correspondant au minimum d'oxygène. En effet, un minimum d'oxygène à grande profondeur signifie généralement que l'âge de cette eau est grand à cet endroit et la vitesse de l'écoulement très petite.

Les mesures des grandeurs hydrologiques (température, salinité et pression) permettent donc de construire les champs de courants océaniques. La méthode présentée dans ce paragraphe a été et reste d'application pour la détermination des courants.

La figure ci-dessous présente la circulation océanique dans la couche superficielle (0 à 2000 mètres) de l'océan Pacifique. Les courants (relatifs) sont parallèles aux lignes de niveau dynamique et l'intensité du courant inversement proportionnelle à la distance entre ces lignes.

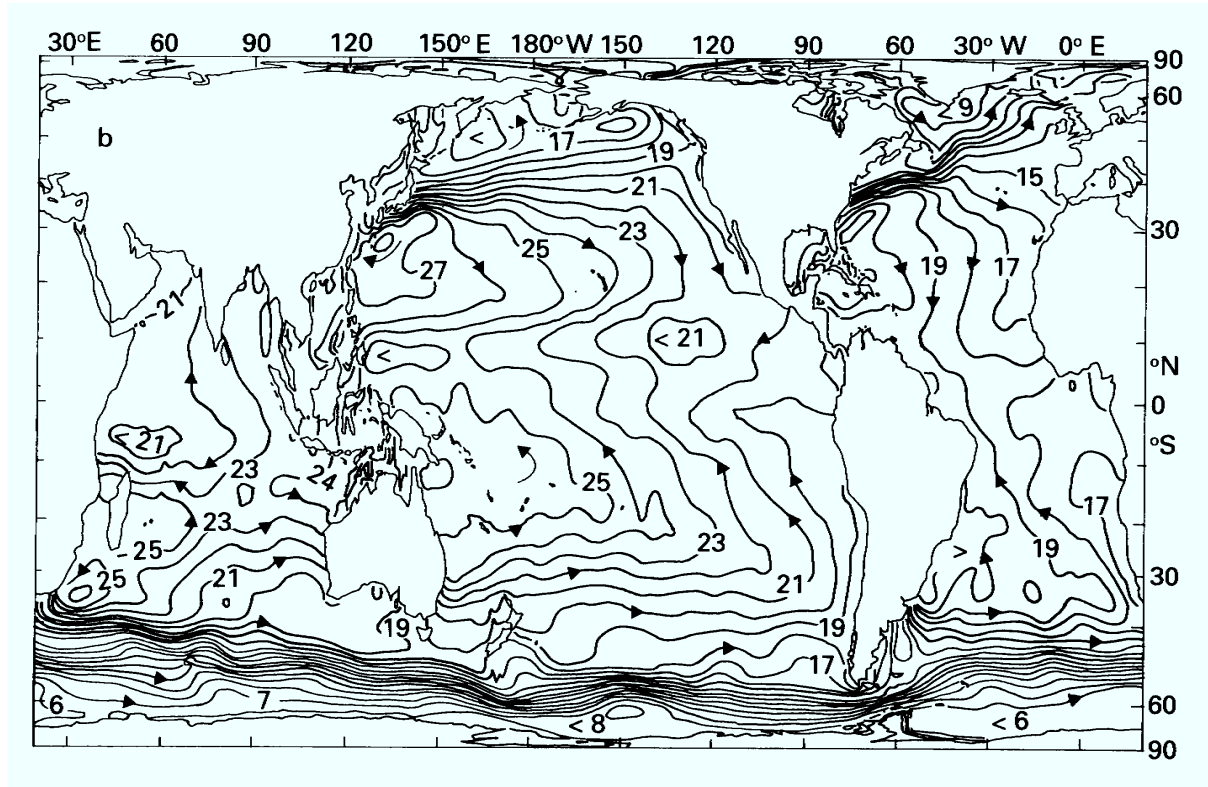


Figure IV.11 Lignes de niveau des hauteurs stériques relatives à l'isobare de 20.000 kPa
 Les flèches indiquent la direction de l'écoulement.
 N.B : les valeurs numériques indiquées sur la figures sont exprimées en décimètres « dynamiques ». (Extrait de Levitus, 1982)

IV.10 Exercice : Océan à deux couches

Dans un certain nombre de situations, l'océan est assimilé, en première approximation, à un système fluide constitué de deux couches homogènes. La couche supérieure est habituellement la couche chaude (légère), la couche inférieure, la couche froide (dense).

Considérons un système de coordonnées où Oz est vertical, Ox perpendiculaire au front et Oy tangent à celui-ci.

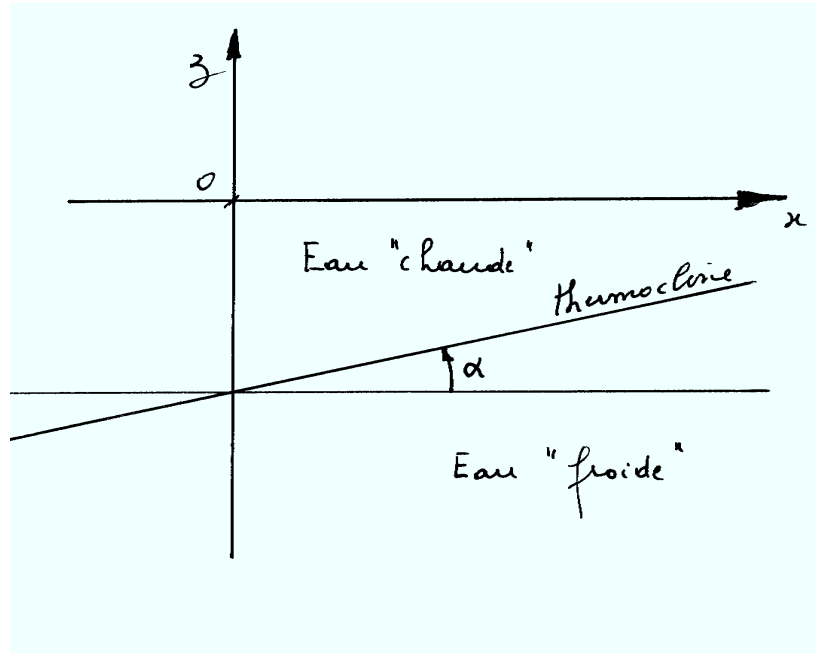


Figure IV.12 Coupe verticale schématique dans un océan à deux couches caractérisé par une thermocline inclinée par rapport à l'axe Ox d'un angle α .

$$d p^f - d p^c = \left(\frac{\partial p^f}{\partial x} - \frac{\partial p^c}{\partial x} \right) d x + \left(\frac{\partial p^f}{\partial y} - \frac{\partial p^c}{\partial y} \right) d y + \left(\frac{\partial p^f}{\partial z} - \frac{\partial p^c}{\partial z} \right) d z \quad (\text{IV.44})$$

L'indice f signifie relatif à la couche froide (couche inférieure) et c relatif à la couche chaude (couche supérieure).

La pression est continue au passage de la thermocline: on en déduit :

$$d p^f = d p^c \quad (\text{IV.45})$$

Le choix du système d'axes impose à la surface frontale (dans le cas présent: la thermocline) que :

$$\frac{\partial p^f}{\partial y} - \frac{\partial p^c}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.46})$$

Si α désigne l'angle de la thermocline par rapport à l'axe Ox, la pente de celle-ci vaut :

$$tg \alpha = \frac{dz}{dx} = - \frac{\left(\frac{\partial p^f}{\partial x} - \frac{\partial p^c}{\partial x} \right)}{\left(\frac{\partial p^f}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial p^c}{\partial z} \right)} \quad (IV.47)$$

Aux grandes échelles, l'équilibre quasi statique est vérifié en très bonne approximation. La relation (IV.47) se transforme de la manière suivante :

$$tg \alpha = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^f - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^c}{g(\rho^f - \rho^c)} \quad (IV.48)$$

Relation entre la pente de la thermocline et les courants géostrophiques.

Supposons des écoulements géostrophiques de part et d'autre de la thermocline. La pente de la thermocline donnée par (IV.48) devient :

$$tg \alpha = \frac{f(\rho^f v_g^f - \rho^c v_g^c)}{g(\rho^f - \rho^c)} \quad (IV.49)$$

Cette relation porte le nom en océanographie comme en météorologie : relation de Margules.

Un cas particulier intéressant correspond à celui d'une couche dense au repos. La formule ci-dessus devient :

$$v_g^c = - \frac{g}{f} tg \alpha \frac{(\rho^f - \rho^c)}{\rho^c} \quad (IV.51)$$

Avec une pente positive comme sur la figure (IV.12), la vitesse géostrophique est négative dans l'hémisphère Nord. On retrouve bien les conclusions du paragraphe précédent, la courant géostrophique laisse les eaux légères à droite dans l'hémisphère Nord.

Une coupe transversale dans la partie Ouest de l'océan Atlantique montre une pente très prononcée des lignes isopycnales (Fig.IV.13)

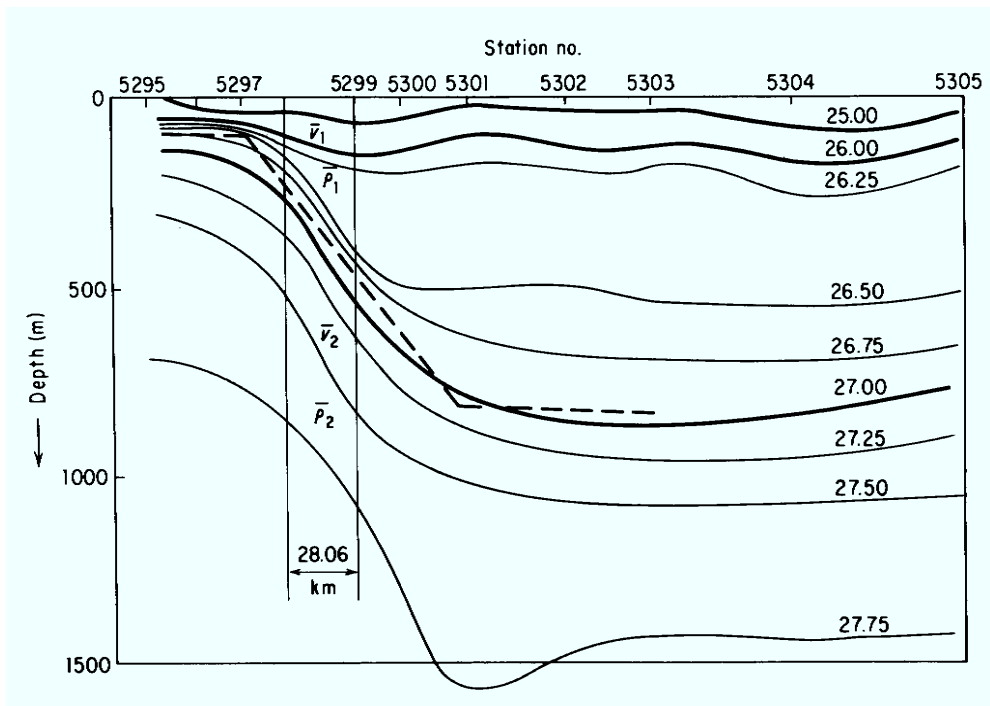


Figure IV.13 Coupe transversale dans l’océan Atlantique entre Chesapeake Bay et les Bermudes montrant la position approximative d’un front.

Une application directe des formules précédentes donne un courant intense dirigé vers le Nord dans la couche supérieure dans la région frontale.

CHAPITRE V

DYNAMIQUE DES COURANTS OCEANIQUES

Partim 2 : courants « avec frottement »

V.1 Introduction

Jusqu'à présent, les termes de friction entre les couches de fluide ou entre le fluide et le milieu extérieur au système considéré ont été négligés. Cette hypothèse de travail conduit à découpler le milieu marin du milieu extérieur: action directe du vent à l'interface air mer, rôle du fond et des côtes sur l'écoulement fluide.

A l'échelle des courants océaniques, c'est-à-dire aux grandes échelles spatiales horizontales, les effets côtiers (latéraux) ne sont délibérément pas pris en compte.

L'action du vent à l'interface air-mer est responsable de nombreux phénomènes marins (mélange des couches superficielles, entraînement des masses d'eau, phénomènes d'upwelling et downwelling). Les interactions entre l'écoulement fluide et le fond jouent également un rôle non moins important dans la dynamique des courants et le transport des sédiments.

Au chapitre précédent, nous avons indiqué, sans justification, que l'action de l'interface se manifeste sur une couche d'eau dont l'épaisseur est donnée en bonne approximation par la formule d'Ekman (IV.1).

En prenant comme dans le chapitre précédent une longueur caractéristique verticale de 10^2 à 10^3 m et une viscosité turbulente verticale de 10^{-2} à 10^{-1} m^2/s , le rapport entre le terme de Coriolis et le terme de cisaillement vertical de l'écoulement donné par:

$$\frac{f u}{v_z^t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \cong \frac{f l_v^2}{v_z^t} \quad (\text{V.1})$$

varie entre 10 à 10^4 . Le terme de Coriolis est donc dominant par rapport au terme de cisaillement à ces échelles.

Dans les couches proches des interfaces (air-mer et mer-fond), les longueur caractéristiques verticales sont en réalité beaucoup plus petites. Il en résulte que les termes de frottement verticaux seront d'une importance proche de ceux de Coriolis.

Remarque: l'action des termes de viscosité moléculaire, comparée à celle de Coriolis se manifeste dans une couche dont l'épaisseur est de l'ordre de $0,1$ m. L'observation indique d'autre part que le vent se fait sentir à des profondeurs largement supérieures à $0,1$ m. La contribution moléculaire sera donc négligeable dans les couches situées à des profondeurs supérieures à $0,1$ m.

Comme la dynamique des courants océaniques dépend de la viscosité turbulente verticale qui elle-même est fonction de la turbulence, il convient de rappeler les concepts importants de la turbulence géophysique et d'introduire les liens existant entre turbulence et paramètres de turbulence comme viscosité et diffusivité turbulentes.

V.2 Turbulence et viscosité turbulente.

Comme on cherche à décrire l'état moyen d'un système et à étudier son évolution dans l'espace et le temps, on s'intéresse aux valeurs moyennes sans vouloir reproduire la structure détaillée des phénomènes. Les équations d'évolution des grandeurs moyennes contiennent des

termes associés à la moyenne du produit de fluctuations (cfr. Chap III). Les équations d'évolution pour les variables moyennes se présentent sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \cdot (B \mathbf{v}) = Q^B + \nabla \cdot (\alpha^B \nabla B) - \nabla \cdot \mathbf{J}^B \quad (\text{V.2})$$

avec \mathbf{v} la vitesse moyenne

B la moyenne de la variable d'état A sur l'intervalle de temps considéré.

La décomposition de la variable A se réalisant comme suit :

$$A = B + C \quad (\text{V.3})$$

avec $B = \langle A \rangle$ et $\langle C \rangle = 0$

Le dernier terme du membre de droite de (V.2) représente l'action du flux turbulent $\mathbf{J}^B = \langle \mathbf{w} C \rangle$ où \mathbf{w} et C représentent respectivement les fluctuations de la vitesse et de la variable d'état A .

Ces flux turbulents sont exprimés en terme des grandeurs moyennes par des expressions de la forme :

$$\mathbf{J}^B = - \left(\lambda_x^{t,B} \frac{\partial B}{\partial x} \mathbf{e}_x + \lambda_y^{t,B} \frac{\partial B}{\partial y} \mathbf{e}_y + \lambda_z^{t,B} \frac{\partial B}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \quad (\text{V.4})$$

où les $\lambda_i^{t,B}$ sont des fonctions des variables de position dans l'espace temps. Pour la plupart des applications, les termes associés aux phénomènes moléculaires sont négligeables.

Les coefficients turbulents $(\lambda_x^{t,B}, \lambda_y^{t,B}, \lambda_z^{t,B})$ ne sont évidemment pas les mêmes dans les trois directions et n'ont pas d'origine moléculaire. Les coefficients de viscosité ou de diffusion turbulente augmentent avec la taille des tourbillons et le taux de transfert d'énergie. Nous ne pouvons dans ce cours détailler la façon de calculer les valeurs de ces coefficients d'échange turbulent.

V.3 Influence du frottement dans la dynamique des courants : Courants d'Ekman.

Jusqu'à présent, les termes de frottement ont été négligés vis-à-vis de ceux de Coriolis. Afin de montrer l'influence du frottement dans la dynamique des courants, nous ferons une série d'hypothèses simplificatrices :

- 1- écoulement stationnaire,
- 2- homogénéité horizontale de l'écoulement moyen,
- 3- masse volumique constante,
- 4- viscosité turbulente verticale constante.

Dans ces conditions, la dynamique des courants est régie par une forme très simplifiée des équations de mouvement

$$-f v = -\frac{\partial q}{\partial x} + \nu_z^t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{V.5a})$$

$$+f u = -\frac{\partial q}{\partial y} + \nu_z^t \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (\text{V.6b})$$

ou

$$-f v = -\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \quad (\text{V.5b})$$

$$+f u = -\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \quad (\text{V.6b})$$

où τ_x et τ_y les deux composantes de la contrainte de cisaillement horizontale.

Soustrayant de ces deux équations, la partie géostrophique

$$f \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{v}_g = -\nabla q \quad (\text{V.7})$$

il vient :

$$-f v_1 = +\nu_z^t \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \quad (\text{V.8})$$

$$+ f u_1 = + v_z^t \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \quad (\text{V.9})$$

en tenant compte de $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial z} = 0$

avec $u_1 = u - u_g$ et $v_1 = v - v_g$ (V.10)

Dans l'intégration verticale des équations différentielles couplées (V.8 et 9) il convient de tenir compte des conditions aux limites. Comme il s'agit d'équations différentielles du second ordre deux conditions sont nécessaires : l'une en surface l'autre au fond.

Condition à l'interface air-mer : le cisaillement vertical dans l'eau est le même que celui dans l'air au niveau de l'interface air-mer. Cette contrainte de surface est habituellement modélisée comme suit :

$$\tau_{s,x} \equiv \rho v_z^t \left. \frac{\partial u_1}{\partial z} \right|_{z_s} \equiv \rho_{air} C_d \|w\| w_x$$

$$\tau_{s,y} \equiv \rho v_z^t \left. \frac{\partial v_1}{\partial z} \right|_{z_s} \equiv \rho_{air} C_d \|w\| w_y$$
(V.11)

avec ρ_{air} masse volumique de l'air,
 ρ masse volumique de l'eau
 w vitesse du vent prise généralement à 10 mètres au-dessus de l'interface,
 C_d coefficient de traînée (drag coefficient) de l'ordre de $3 \cdot 10^{-3}$, à une hauteur de 10 mètres pour une stratification neutre de l'air. La valeur numérique de ce coefficient dépend de la hauteur où se mesure le vent et de la stabilité de la couche d'air proche de l'interface air-mer.

Conditions au fond : pour la simplicité des calculs on suppose un océan infini et une vitesse non géostrophique nulle.

$$u_1 = 0 \quad \text{pour} \quad z \rightarrow -\infty \quad (\text{V.12})$$

Pour la simplicité des calculs le système d'axes est orienté de manière à avoir une contrainte de vent parallèle à l'axe y (cfr. Fig. V.1). La solution du système (V.8 et 9) avec les conditions aux limites (V.11 et 12) s'écrit :

$$u_1 = v_0 e^{\frac{\pi z}{D_e}} \cos\left(\frac{\pi z}{D_e} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{V.13})$$

et

$$v_1 = v_0 e^{\frac{\pi z}{D_e}} \sin\left(\frac{\pi z}{D_e} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{V.14})$$

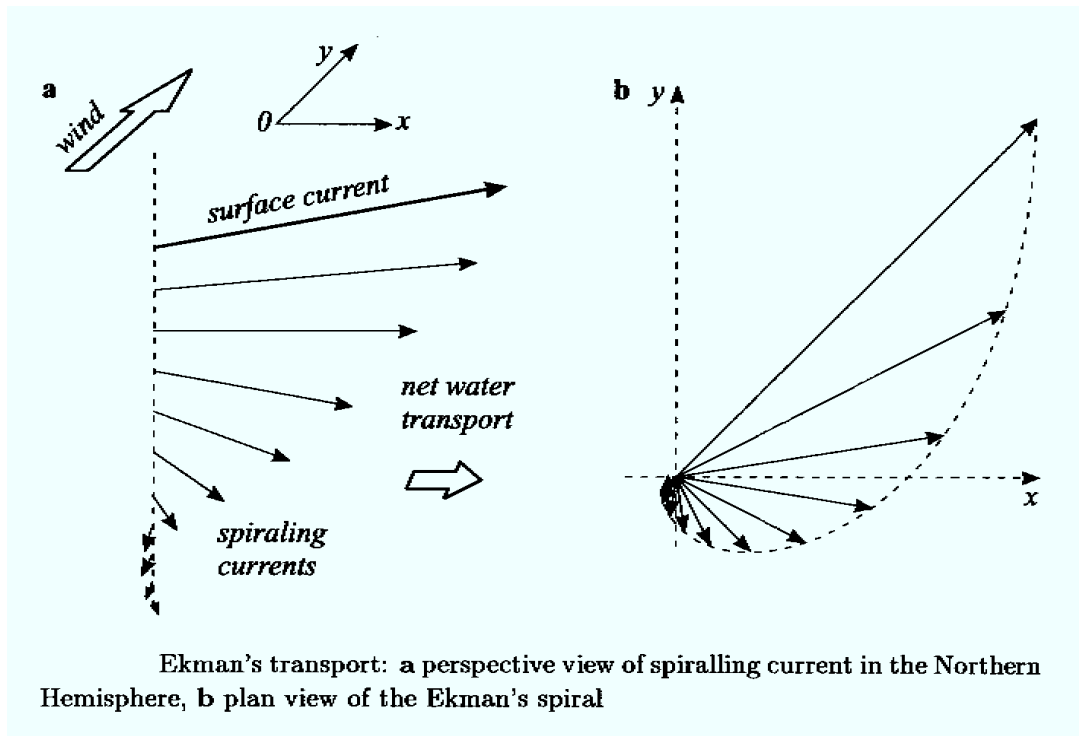


Figure V.1 Relation entre les directions du vent et du courant.
Projection du courant en fonction de la profondeur dans un plan horizontal.
(Extrait de J.R.Apel, 1988)

avec :

$$v_0 = \sqrt{2\pi} \frac{\|\tau_s\|}{\rho f D_e} \quad \text{amplitude de la vitesse à la surface} \quad (\text{V.15})$$

$$D_e = \sqrt{\frac{2\nu_z}{f}} \quad \text{profondeur d'Ekman} \quad (\text{V.16})$$

Le courant induit directement par le vent porte le nom de courant de dérive. Le courant qui vérifie les différentes hypothèses décrites ci-devant est appelé: courant d'Ekman. Par extension on donne souvent au courant de dérive le nom de courant d'Ekman.

Signification de la profondeur d'Ekman : à une profondeur $z = -D_e$ l'amplitude de la

vitesse est réduite d'un facteur $e^{-\pi} \approx \frac{1}{20}$.

L'action directe du vent se fait sentir dans une couche d'eau dont l'épaisseur est proche de celle d'Ekman.

$$\begin{aligned} \nu_z^t &= 10^{-2} \text{ m}^2 / \text{s} & D_e &\approx 50 \text{ m} \\ \nu_z^t &= 10^{-1} \text{ m}^2 / \text{s} & D_e &\approx 120 \text{ m} \end{aligned}$$

Plus la viscosité turbulente est grande, plus l'action directe du vent se fait sentir profondément.

Etant donné les ordres de grandeur de la viscosité turbulente verticale, l'action directe du vent est limitée à une profondeur de l'ordre d'une centaine de mètres. Les courants existant en dessous de la profondeur d'Ekman ne sont donc pas induits directement par les contraintes de vent.

Courant en surface. Un simple calcul indique que l'intensité de la vitesse est v_0 et sa direction fait un angle de 45° par rapport à la direction du vent, à droite dans l'hémisphère Nord et à gauche dans l'hémisphère Sud.

L'extrémité du vecteur vitesse décrit dans un plan horizontal une spirale qui porte le nom de spirale d'Ekman. A la profondeur $z = -D_e$, l'intensité du courant est quasiment nulle et sa direction est opposée à celle à celle de surface (Fig.V.1).

Transport d'eau intégré verticalement

Une grandeur important en Océanographie est le transport d'eau intégré sur la verticale. L'intégration donne dans le cas d'un océan de profondeur infinie:

$$M_x = \int_{-\infty}^0 \rho u dz = \frac{1}{f} \tau_y \quad (\text{V.17})$$

et

$$M_y = \int_{-\infty}^0 \rho v dz = 0 \quad (\text{V.18})$$

Le transport d'eau intégré sur la verticale, dans la direction du vent, est nul . Par contre; le transport perpendiculaire au vent est proportionnel à la contrainte de vent ; il est orienté à droite du vent dans l'hémisphère Nord, à gauche dans l'hémisphère Sud.

Remarques. Lorsque l'océan n'est pas de profondeur infinie, les calculs sont plus compliqués. Le transport d'eau dans la direction du vent n'est plus nul et celui perpendiculaire ne fait plus un angle de 45° par rapport à la direction du vent. Il reste vers la droite dans l'hémisphère Nord et vers la gauche dans l'hémisphère Sud.

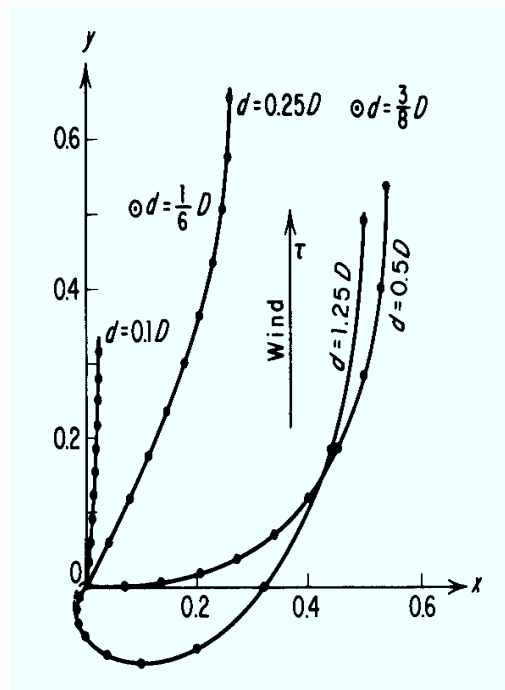


Figure V.2 Structure verticale du courant de dérive dans un océan de profondeur finie (d) projetée sur un plan horizontal ; D étant la profondeur d'influence d'Ekman. (Extrait de Sverdrup et al., 1942).

Lorsque la viscosité turbulente n'est plus constante suivant la verticale, le calcul est beaucoup plus sophistiqué. Les résultats sont présentés à la figure ci-dessous pour deux profils de viscosité turbulente.

Remarque : une stratification de la colonne d'eau influence également mais dans une moindre mesure le profil vertical de vitesse.

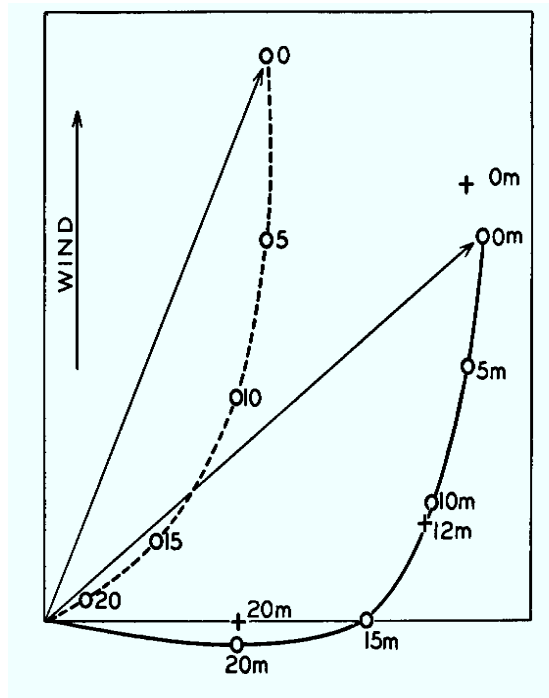


Figure V.3 Profils verticaux de vitesse projetés sur un plan horizontal :

- Train plein: viscosité turbulente variant linéairement avec la profondeur ;
 - Train interrompu : viscosité turbulente constante
 - Croix : valeurs observées
- (Extrait de Sverdrup et al., 1942.)

Remarque : une stratification de la colonne d'eau influence également mais dans une moindre mesure le profil vertical de vitesse.

V.4 Courant de pente.

Nous avons montré précédemment qu'une pente de la surface libre dans un océan homogène induisait un courant (courant géostrophique) sur toute la profondeur en l'absence de terme de frottement. Dans un océan de profondeur finie, ce courant géostrophique ne peut exister sur toute la colonne d'eau en raison du fond et du frottement: une couche limite s'installe pour

raccorder l'écoulement géostrophique à un écoulement nul au fond. Cette couche limite est une couche limite de type d'Ekman de fond (couche d'Ekman benthique) dont l'épaisseur est de l'ordre de grandeur de

$$D_b = \sqrt{\frac{2\nu_z^t}{f}} \quad (\text{V.19})$$

avec une viscosité turbulente caractéristique de la turbulence existant près du fond. Celle-ci atteint des valeurs très faibles dans les océans profonds. Avec une viscosité de 10^{-3} à 10^{-4} m²/s, la couche limite a une épaisseur d'une dizaine de mètres.

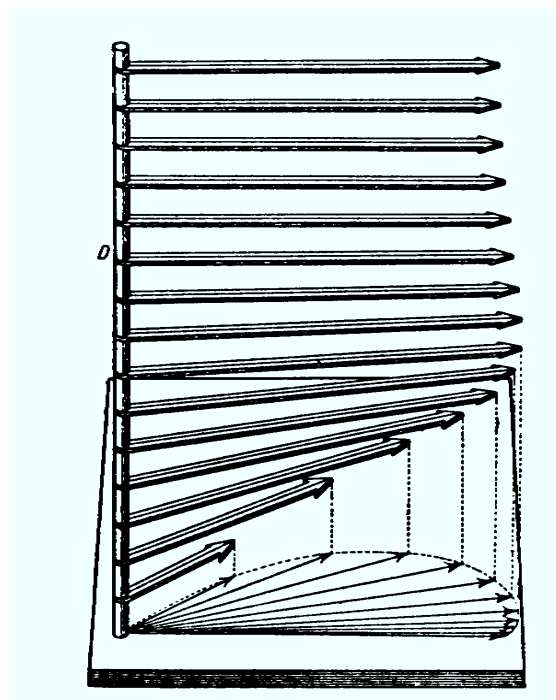


Figure V.4 Structure vertical d'un courant induit par le vent et par un gradient horizontal de pression.

(Extrait de Neumann et Pierson, 1966).

V.5 Systeme élémentaire de courants.

Ce système est la combinaison (Figure V.5) d'une couche d'Ekman de surface, d'une couche purement géostrophique et d'une couche d'Ekman de fond (ou benthique) lorsque la

profondeur est suffisamment grande (supérieure à la somme des profondeurs d'influence d'Ekman).

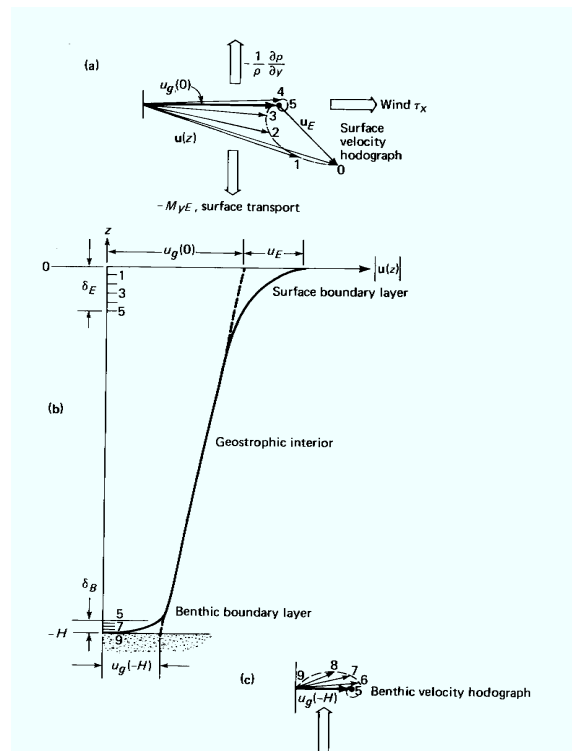


Figure V.5 Exemple d'un profil vertical de courant lorsque la profondeur est largement supérieure à la somme des profondeurs d'influence d'Ekman.
(Extrait de J.R.Appel, 1988)

Lorsque la profondeur du bassin est plus petite que cette somme de profondeur d'influence, les différentes couches s'interpénètrent.

V.6 Influence du temps sur les courants d'Ekman – Oscillations d'inertie.

Aux paragraphes précédents, nous examinons l'influence d'un champ de vent stationnaire (c'est-à-dire qui se maintient depuis toujours et pour toujours). En réalité, le vent commence à souffler et s'arrête de souffler.

L'intégration verticale des équations de mouvement de $z = -h$ à $z = \zeta$, lorsque le nombre de Rossby est petit, donne :

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} - f M_y = -\frac{\partial P}{\partial x} + \tau_{s,x} \quad (\text{V.20})$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} + f M_x = -\frac{\partial P}{\partial y} + \tau_{s,y} \quad (\text{V.21})$$

où $P = \int_{-h}^{\zeta} p \, dz$ (V.22)

$$M_x = \int_{-h}^{\zeta} \rho u \, dz = \rho D \bar{u} \quad (\text{V.23})$$

$$M_y = \int_{-h}^{\zeta} \rho v \, dz = \rho D \bar{v} \quad (\text{V.24})$$

$$D = \zeta + h \quad (\text{V.25})$$

$M_x, M_y, \tau_{s,x}, \tau_{s,y}$ sont respectivement les transports d'eau intégrés et les contraintes de cisaillement à la surface. \bar{u}, \bar{v} représentent les deux composantes de la vitesse moyenne sur une couche d'eau d'épaisseur D . On suppose la contrainte de cisaillement nulle à cette profondeur.

Examinons ce qui se passe lorsque le vent cesse de souffler en l'absence de gradient de pression, les équations de la dynamique des fluides se réduisent aux termes d'inertie. Les courants, solutions de ces équations sont appelés les courants d'inertie. Si les déplacements sont petits, le coefficient de coriolis est constant et la trajectoire des particules fluides est circulaire. Les particules décrivent un cercle avec une période (période d'inertie) :

$$T_{inert} = \frac{2\pi}{f} = \frac{\pi}{\Omega \sin \phi} \quad (\text{V.26})$$

Quelques valeurs caractéristiques :

$$\begin{aligned} \phi = 90^\circ & \quad T_{inert} = 12 \text{ heures} \\ \phi = 45^\circ & \quad T_{inert} \approx 17 \text{ heures} \\ \phi = 0^\circ & \quad T_{inert} \rightarrow \infty \text{ heures} \end{aligned}$$

La trajectoire des particules fluides est un cercle parcouru dans le sens horlogique (anticyclonique) dans l'hémisphère Nord.

En présence d'un gradient de pression, à la solution stationnaire du problème se superposent des oscillations d'inertie

A la Fig. V.6 la « progressive vector diagram », c'est-à-dire l'intégration du vecteur vitesse au point de mesure, montre un mouvement de dérive sur lequel se superposent les oscillations d'inertie.

La spirale d'Ekman présentée dans un paragraphe précédent est la solution d'un problème stationnaire. Il est possible de rechercher la solution d'un problème plus proche de la réalité : le vent commence à souffler à la vitesse W à l'instant $t = 0$. En raison des termes d'inertie et des termes dissipatifs, le courant d'Ekman ne s'établit pas instantanément: il est nécessaire d'attendre plusieurs périodes d'inertie avant d'atteindre l'état stationnaire. La figure ci-dessous présente l'évolution de l'extrémité du vecteur vitesse à la surface.

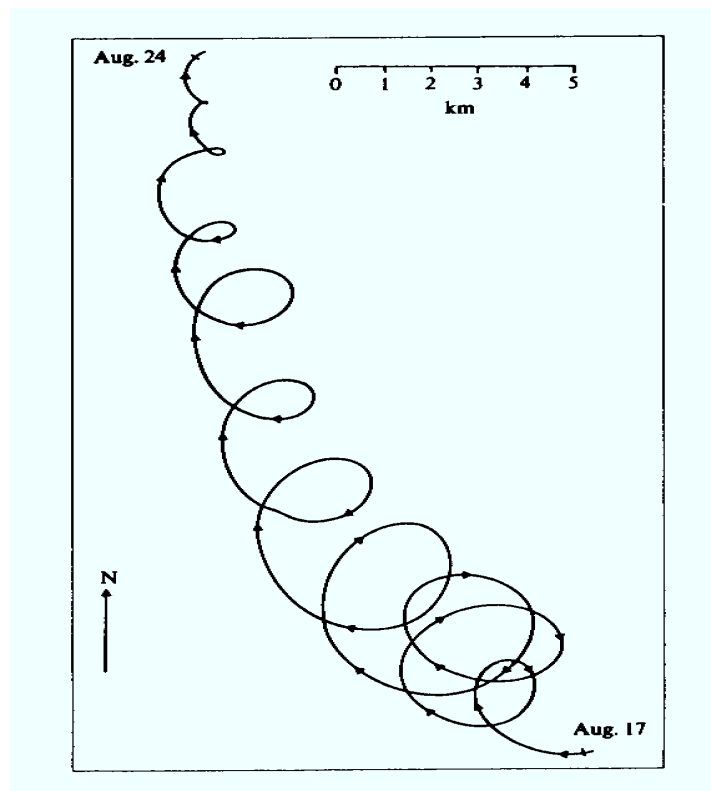


Figure V.6 « Progressive vector diagram » illustrant un courant d'inertie superposé à un déplacement vers le Nord-ouest en Mer Baltique. (Extrait de Gustafson et Kullenberg, 1936).

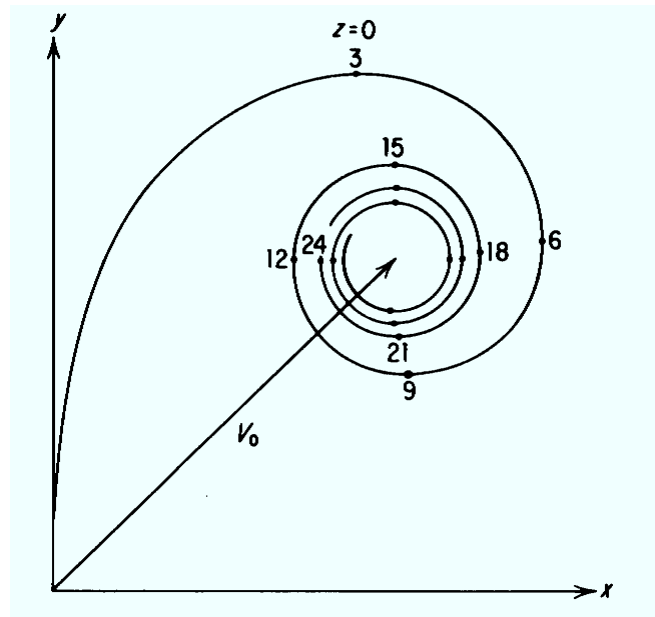


Figure V.7 Oscillations de l'extrémité du vecteur vitesse à la surface à la suite d'un coup de vent d'intensité fixée. Cas d'un océan de profondeur infinie. (Extrait de Neumann et Pierson, 1966).

V.7 Remontée d'eau (upwelling).

Un mouvement vertical lent s'observe dans l'océan à l'occasion de convergences et de divergences horizontales de masse d'eau . Elles sont l'origine de celles-ci sont :

- présence de côtes (upwelling et downwelling)
- inhomogénéités dans les champs de la vitesse horizontale ;

L'océan est caractérisé en bonne approximation par de très faibles variations temporelles de la masse volumique. Pour la simplicité des calculs nous supposons une eau de mer caractérisée par une masse volumique constante. L'équation de la conservation de la masse s'écrit dans ces conditions :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{III.27})$$

a) *Upwelling côtiers*

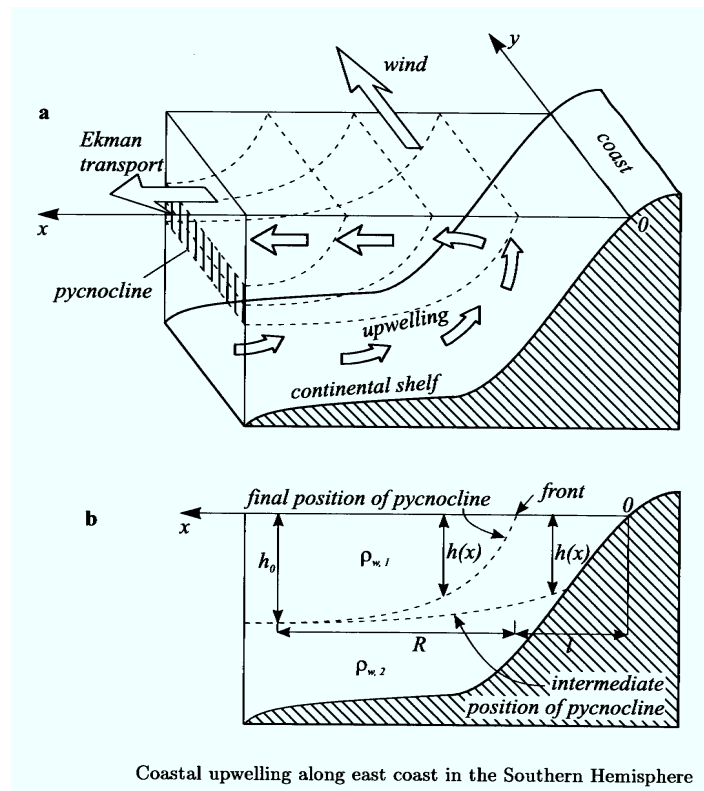


Figure V.8 Upwelling côtier lelong de la côte Est dans l'hémisphère Sud.
(Extrait de Massel, 1999).

Le vent provoque un cisaillement à la surface et le terme de coriolis induit un transport des masses d'eau perpendiculairement à la direction du vent, vers la droite dans l'hémisphère Nord, vers la gauche dans l'hémisphère Sud.

L'intégration verticale de (V.27) depuis un niveau z jusqu'à la surface donne :

$$w|_z - w|_{surf} = \frac{\partial}{\partial x} \int_z^0 u \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^0 v \, dz \quad (V.28)$$

Rappel : dans le cas stationnaire, la vitesse verticale est nulle à la surface et les transports d'Ekman s'écrivent :

en $z = -D_e$

$$M_x = \int_{-D_e}^0 \rho u \, dz \cong \int_{-\infty}^0 \rho u \, dz = \frac{\tau_y}{f} \quad (V.29a)$$

$$M_y = \int_{-D_e}^0 \rho v dz \approx \int_{-\infty}^0 \rho v dz = \frac{-\tau_x}{f} \quad (\text{V.29b})$$

Dans le cas présenté à la Fig.V.8, le vent souffle parallèlement à une côte située dans l'hémisphère Sud ($f < 0$) et orientée de telle manière que $\tau_x = 0$. Etant donné la position de la côte, avec $\tau_y > 0$ on a un transport « offshore »

Il résulte de (V.28 et 29) que : la composante verticale de la vitesse, soit w , est positive.

En conclusion, le transport d'eau « offshore » dans les couches supérieures s'accompagne d'une remontée d'eau « froide ». Dans les couches plus profondes, un transport vers la côte « onshore » s'établit afin de maintenir la conservation de la masse.

b) upwelling équatorial

Un upwelling de nature non côtière s'observe dans les régions équatoriales. Les vents alizés sont dirigés vers l'ouest aussi bien dans l'hémisphère nord que l'hémisphère sud. Comme le facteur de coriolis change de signe au passage de l'équateur, les transports d'Ekman présentent une composante divergente dans les couches supérieures de l'océan. Par continuité (III.20), une remontée d'eau froide s'installe dans ces régions.

c) Pompage d'Ekman

Le cisaillement horizontal du champ de vent induit des mouvements verticaux ascendant ou descendant. Ce mouvement vertical est appelé pompage d'Ekman.

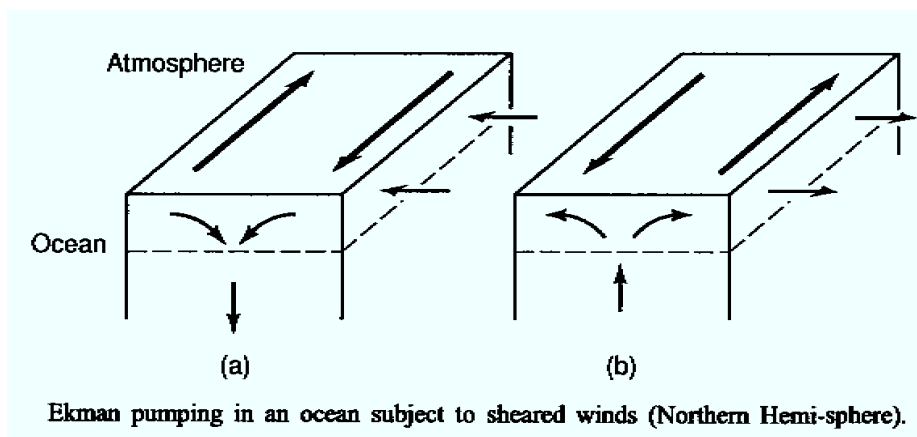


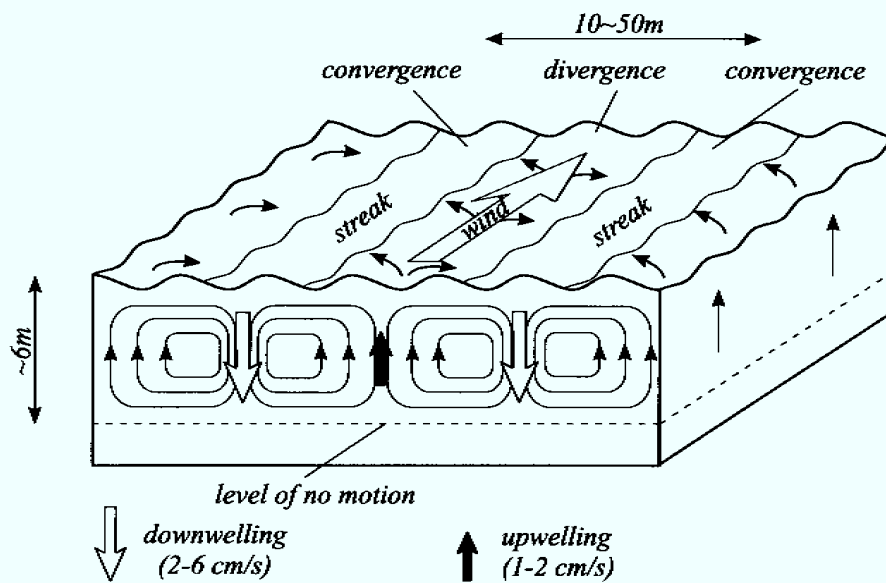
Figure V.9 Pompage d'Ekman. (Extrait de Massel, 1999) ;

Remarques :

Dans différentes régions du globe, la convergence horizontale des masses d'eau est très localisée dans les couches superficielles. Elle est appelée zone frontale ou encore « front » lorsque les propriétés des masses d'eau (e.g. température et/ou productivité) sont très différentes de part et d'autre de cette zone de convergence. Des mouvements verticaux s'installent au voisinage de cette convergence.

Aux plus petites échelles, on observe parfois dans l'océan, à certains moments, des zones de convergence qui se marquent par la présence de débris à la surface, par des émulsions et qui sont parallèles à la direction du vent. Langmuir a observé ce phénomène et a proposé un modèle de circulation de type hélicoïdal dont l'axe est parallèle à la direction du vent. Dans ce cas les mouvements verticaux seraient associés à des instabilités thermiques dans les eaux de surface relativement bien mélangées.

Langmuir Circulation. Persistent winds blowing across the sea surface may induce small-scale vertical water motion.



Langmuir circulation (adapted from Pinet, 1992)

Figure V.10 Circulation de Langmuir.
(Extrait de Massel, 1999)

V.8 Introduction à la circulation générale océanique.

La carte des courants océaniques de surface a été constituée progressivement grâce aux observations de navigateurs et affinées par les nombreuses expéditions océanographiques menées par de nombreuses nations depuis le début du XXème siècle.

Les trois courants majeurs (Fig.V.11) sont le Gulf Stream, le Kuroshio et le courant Circum Antarctique.

Dans les bassins des latitudes moyennes, on y reconnaît de circulations anticycloniques tournant dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère Nord avec des courants intenses vers les pôles le long des frontières ouest des bassins. Plus au Nord, les courants sont organisés en cellules cycloniques tournant des sens opposés. Dans les régions équatoriales les courants sont organisés en zones : courants sud-équatoriaux et nord-équatoriaux, contre)courants nord-équatoriaux.

28

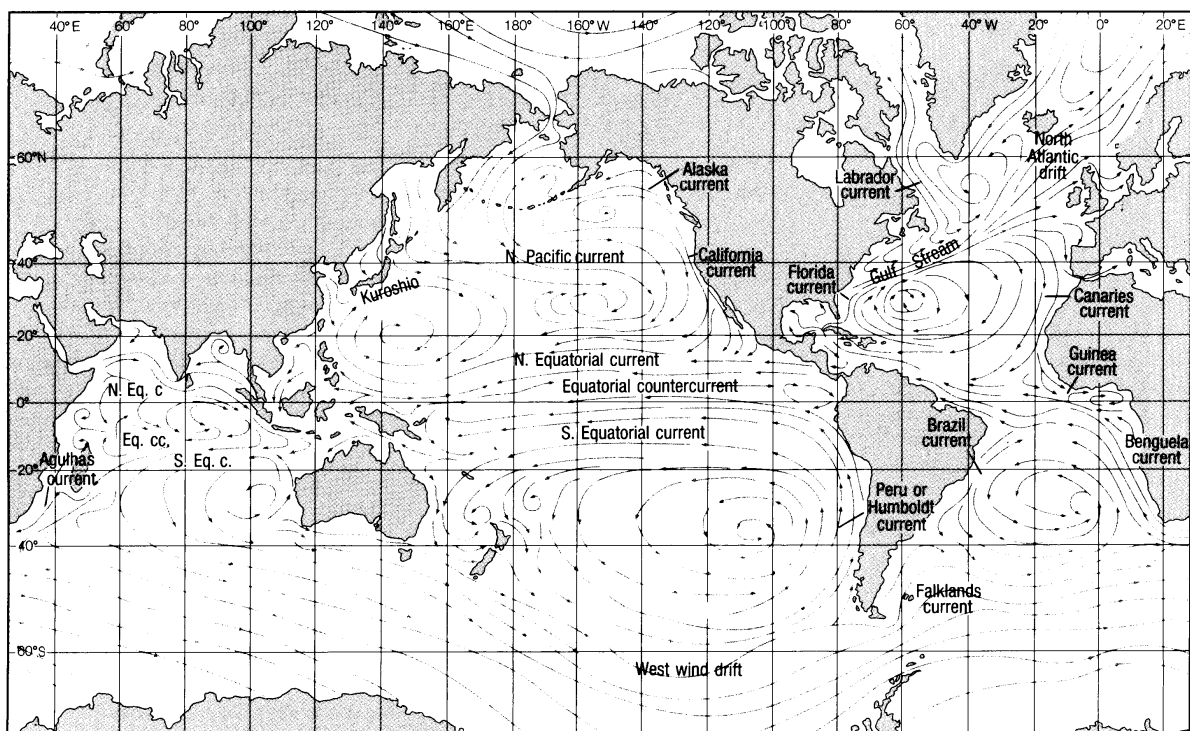


Figure V.11 Circulation générale dans la couche superficielle de l'océan.

(Extrait de Tchernia, 1978)

Une tentative d'explication schématique de cette circulation océanique de surface se base sur la théorie des courants d'Ekman , c'est-à-dire générés par le vent.

La figure V.12 donne la distribution des pressions atmosphériques moyennes réduites au niveau de la mer en été et en hiver. Au-dessus des océans, des circulations de type anticyclonique sont plus ou moins « centrées » au voisinage des 30èmes parallèles. L'intensité et la localisation des ces régions de haute pression dépendent des saisons. Les régions équatoriales correspondent à une zone dépressionnaire. Aux latitudes élevées, près des 60èmes parallèles, les vents sont plutôt associés à des circulations cycloniques. La circulation d'ouest circum antarctique est bien marquée.

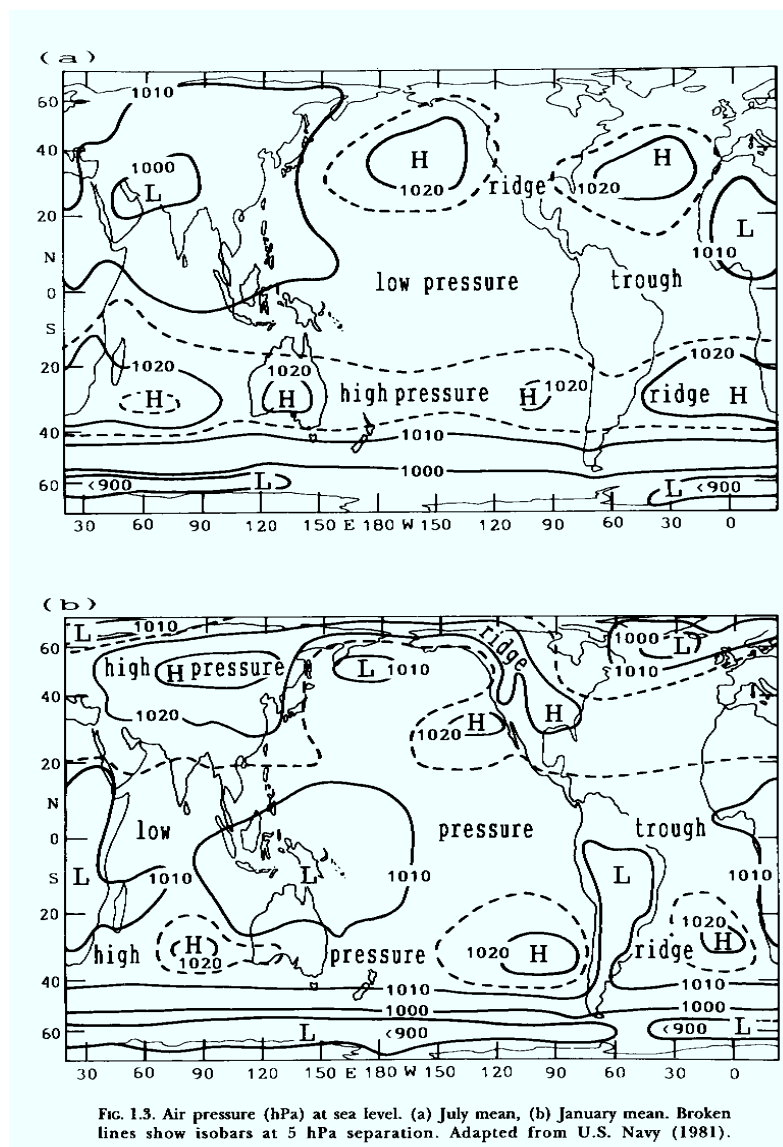


Figure V.12 Distribution du champ moyen de pression atmosphérique réduite au niveau de la mer en été et en hiver.

a) *Circulation océanique de surface*

Schématiquement, la circulation atmosphérique au-dessus des océans est assimilée à des circulations atmosphériques anticycloniques centrées sur les 30èmes parallèles et cycloniques sur les 60èmes (Fig.V.12).

Comme la « force » de coriolis dévie les masses d'eau vers la droite dans l'hémisphère Nord et vers la gauche dans l'hémisphère Sud; l'action du vent sur l'océan provoque des empilements d'eau vers les 30èmes parallèles et des dépressions de la surface libre « centrées » sur les 60èmes. Les pentes de la surface génèrent des courants (courants induits par les gradients, c'est-à-dire des courants géostrophiques) qui forment des circulations respectivement anticyclonique et cyclonique dans l'océan. L'action directe du vent ne se fait sentir que dans les couches superficielles.

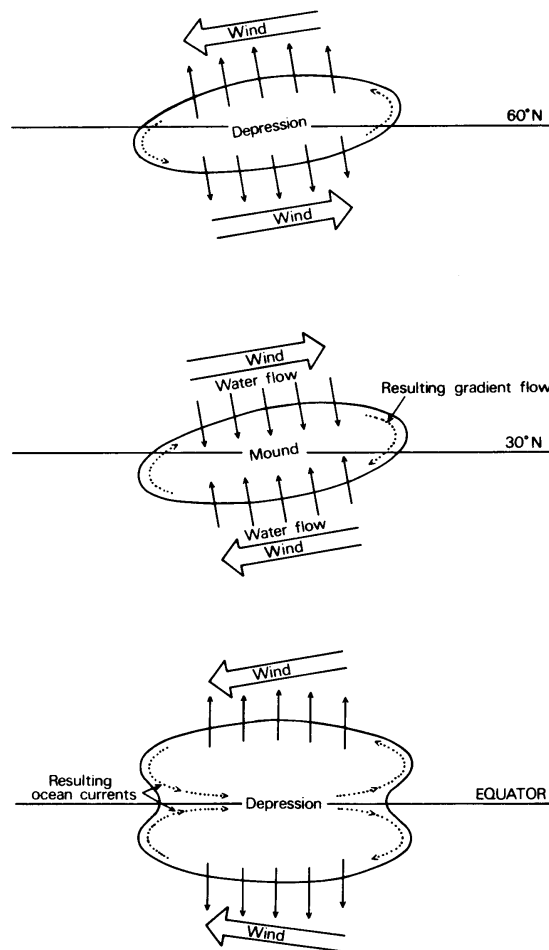


Figure V.13 Mouvements schématiques anticycloniques et cycloniques des masses d'eau sous l'action du vent. (Extrait de Brown et al., 1989)

A titre d'exemple, au niveau de l'océan Atlantique, on retrouve les courants (Fig.V.11): Gulf-stream, courants des Canaries, du Labrador, du Brésil, du Bengale et les courants nord et sud équatoriaux.

A l'équateur, le terme de coriolis est nul, positif pour les latitudes nord et négatif pour les latitudes sud. Les vents (Fig.V.13) induisent un empilement de masses d'eau sur les côtes ouest des océans et une zone dépressionnaire pour la surface libre centrée sur l'équateur. Deux circulations cycloniques situées de part et d'autre de l'équateur fusionnent pour donner un courant appelé contre-courant équatorial dirigé vers l'est.

En raison de l'importance des océans dans l'hémisphère sud, la circulation océanique y est plus simple que dans l'hémisphère nord. On observe (Fig.V.11) une vaste circulation circum antarctique.

Ce schéma ultra simple donne une idée globale de la circulation océanique de surface. Il n'explique pas tous les phénomènes observés. Comme la forme des océans est irrégulière et que le terme de coriolis varie de manière appréciable avec la latitude, cette circulation schématisée de surface ne montre ni la distribution réelle des courants de surface ni l'intensification de ceux-ci sur les façades occidentales des océans.

Une approche basée sur les travaux fondamentaux de Sverdrup, Munk et Stommel permet de dégager les mécanismes fondamentaux de la dynamique de la circulation océanique engendrée par le vent. La modélisation d'un océan homogène de forme rectangulaire soumis à un champ de vent sera basée sur le système d'équations (V.5 et 6) avec un facteur de coriolis dépendant linéairement de la latitude (approximation du plan bêta) :

$$f = f_0 + \beta y \quad (\text{V.30})$$

où f_0 est la fréquence de coriolis pour la latitude ϕ_0 de référence pour le problème posé et $\beta \approx 10^{-11}$ le paramètre de Rossby dans les régions équatoriales. y représente la distance comptée positivement vers le nord sur le plan tangent à la surface de la terre au point O.

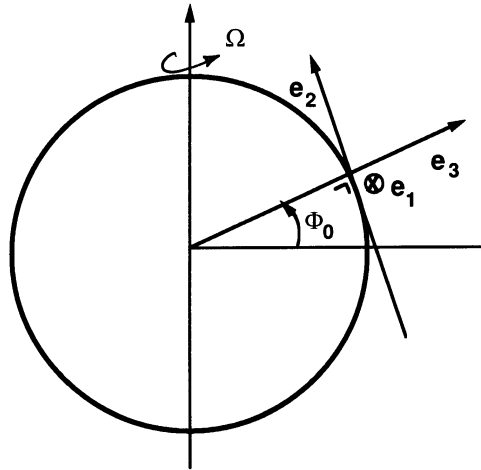


Figure V.14 Hypothèse du plan beta.

En mécanique des fluides géophysiques, on introduit une grandeur vectorielle, la vorticité qui mesure la rotation locale du fluide :

$$\xi = \nabla \wedge \mathbf{v} \quad (\text{V.31})$$

Etant donné que la circulation océanique est quasi-horizontale, la composante verticale de la vorticité est particulièrement adaptée à notre étude. L'équation de la composante verticale de la vorticité relative associée aux équations (V.20 et 21), dans le cas stationnaire s'obtient facilement:

$$\beta M_y = \beta \rho D \bar{v} = \{\nabla \wedge \tau_s\}_z = \frac{\partial \tau_{s,y}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{s,x}}{\partial y} \quad (\text{V.32})$$

Cette relation est souvent appelée relation ou équation de Sverdrup.

Prenons un bassin rectangulaire dont l'axe x est orienté Est et l'axe y vers le Nord. Comme le flux d'eau normal à la côte est nul, M_x est égal à zéro, soit sur la côte est de l'océan.

L'équation de continuité (V.27) intégrée sur la verticale s'écrit dans le formalisme de la vitesse moyenne:

$$\frac{\partial D \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial D \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (\text{V.33})$$

où D est la profondeur de l'océan au-dessus de la couche de "no-motion" et \bar{v} la vitesse moyenne sur la profondeur.

L'intégration de (V.33) donne M_x puisque M_y est donné par (V.32). Cette solution ne peut satisfaire la condition limite à l'autre côte, sauf dans les cas particuliers d'un rotationnel de vent nul ou constant. La dynamique de ce modèle n'est pas suffisante pour permettre une solution non triviale pour un bassin océanique fermé.

Stommel proposa une modélisation particulièrement simple pour expliquer l'intensification des courants sur la côte ouest des océans. Il envisagea un océan rectangulaire caractérisé par une masse volumique et une profondeur de "no-motion" constantes.

L'intégration verticale des équations de mouvement stationnaires et linéarisées donne:

$$-f D \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\tau_{s,x}}{\rho} - R \bar{u} \quad (\text{V.34})$$

$$f D \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\tau_{s,y}}{\rho} - R \bar{v} \quad (\text{V.35})$$

lorsque la dissipation verticale et latérale de la quantité de mouvement est prise en compte par des termes de la forme:

$$\begin{aligned} & R \bar{u} \\ \text{et} & \\ & R \bar{v} \end{aligned} \quad (\text{V.36})$$

Les observations climatologiques indiquent que dans la partie supérieure du bassin les vents dominants sont d'ouest, et dans la partie inférieure ils sont d'est (souvent appelés vents alizés).

Comme Stommel prenons une contrainte de vent :

$$\frac{\tau_{s,x}}{\rho} = -F \cos \frac{\pi y}{b} \quad (\text{V.37a})$$

$$\frac{\tau_{s,y}}{\rho} = 0 \quad (\text{V.37b})$$

L'élimination du gradient de pression entre (V.34 et 35) conduit à:

$$\beta \frac{D}{R} \bar{v} + \gamma \sin \frac{\pi y}{b} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{V.38})$$

avec $\gamma = \frac{F \pi}{b R}$ (V.39)

Comme la profondeur est supposée constante, l'équation (V.33) se met sous la forme:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (\text{V.40})$$

Une fonction de courant ψ se déduit de (V.40):

$$\bar{u} = + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \bar{v} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{V.41})$$

La substitution de (V.41) dans (V.38) donne:

$$\Delta \psi + \frac{\beta D}{R} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \gamma \sin \frac{\pi y}{b} \quad (\text{V.42})$$

Les conditions aux limites de l'équation (V.42) sont:

$$\psi(x, 0) = \psi(x, b) = \psi(0, y) = \psi(r, y) = 0 \quad (\text{V.43})$$

La solution générale du problème (cfr. Cours de mathématiques) s'obtient aisément par la méthode de séparation des variables. La solution générale est :

$$\psi = \gamma \left(\frac{b}{\pi} \right)^2 \sin \frac{\pi y}{b} \left[e^{-\frac{\alpha}{2} x} \operatorname{ch} \sqrt{n^2 + \frac{\alpha^2}{4}} x - 1 + D * e^{-\frac{\alpha}{2} x} \operatorname{sh} \sqrt{n^2 + \frac{\alpha^2}{4}} x \right] \quad (\text{V.44})$$

avec $\alpha = \frac{\beta D}{R}$

$$D^* = \frac{e^{\frac{\alpha}{2}r} - ch \sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} r}}{sh \sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} r}} \quad (\text{V.45})$$

Appliquons cette solution au cas d'un bassin dont les caractéristiques sont proches de celles de l'Atlantique Nord.

$$\begin{aligned} r &= 10^4 \text{ km} = 10^7 \text{ m} \\ b &= 2\pi 10^6 \text{ m} \\ D &= 200 \text{ m} \end{aligned} \quad (\text{V.46})$$

D représente approximativement la profondeur de la couche située au-dessus de la thermocline principale.

Afin que les vitesses soient d'un ordre de grandeur réaliste, nous choisissons $R = 2 \cdot 10^{-4} \text{ ms}^{-1}$. Examinons différentes valeurs du paramètre de Rossby.

i) Bassin tournant à vitesse angulaire constante

Ce cas correspond à $\beta = \alpha = 0$. La solution (V.44) se simplifie fortement et les lignes de courant correspondant au cas a) présentent des symétries nord-sud et est-ouest (Fig.V.15). On aurait obtenu les mêmes lignes de courant si le bassin était non-tournant.

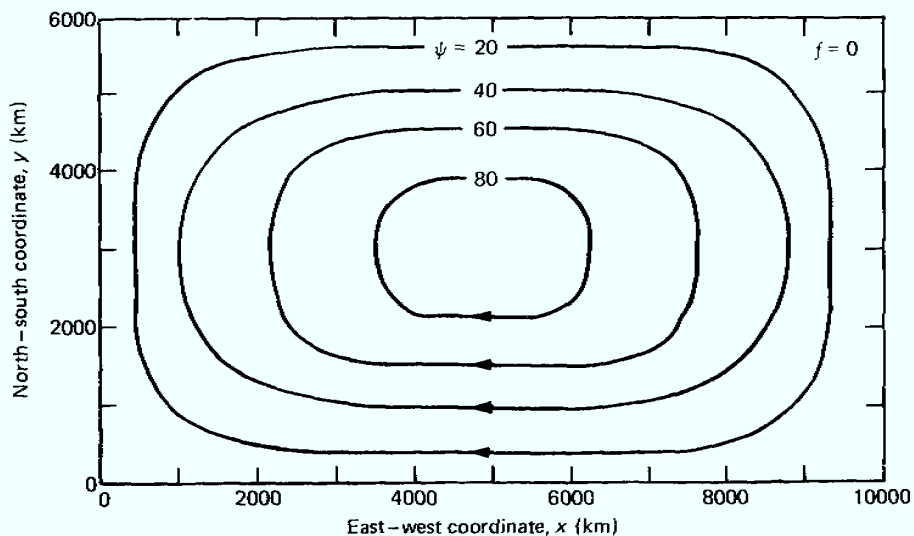


Figure V.15 Lignes de courant pour un bassin tournant à vitesse angulaire Constante ou nulle. (Extrait de Apel, 1988).

ii) Bassin tournant à une vitesse angulaire variant linéairement avec la latitude.(plan Bêta)

Le tracé des lignes de courant dans le cas du plan Bêta $f = f_0 + \beta y$ est esquissé à la figure V.16. L'écoulement présente une intensification du côté ouest de l'océan.

L'asymétrie de l'écoulement se retrouve également dans les lignes de niveau. La théorie de Stommel explique donc l'intensification des courants sur la côte ouest des océans. Elle ne met cependant pas en évidence le contre-courant observé et situé à l'est du courant principal.

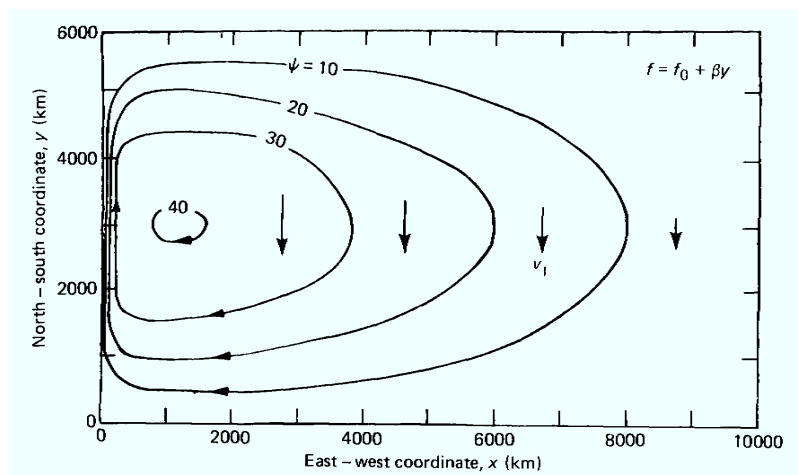


Figure V.16 Lignes de courant dans le cas de l'approximation du plan Bêta.

(Extrait de Apel, 1988).

Pour expliquer ce phénomène il est nécessaire de tenir compte des termes dissipatifs latéraux sous leur forme différentielle et non sous la forme simpliste d'une friction proportionnelle à la vitesse.

b) *Circulation océanique profonde*

La circulation générale dans la couche de surface est relativement bien établie. La circulation profonde très lente est beaucoup moins connue. Un schéma de circulation profonde est présenté à la figure V.17.

Cette circulation est alimentée par des échanges verticaux avec la circulation de surface. Des échanges existent entre les couches superficielles et les couches plus profondes au niveau des upwellings côtiers. Des subsidences de masses d'eaux denses (très froides et/ou très salées) se présentent à quelques endroits du globe:

- aux latitudes élevées car les eaux de surface subissant un refroidissement intense coulent. Les observations indiquent que la principale zone de subsidence se situe dans l'Atlantique nord, près du Groenland.
- à certains endroits localisés comme celui situé près du détroit de Gibraltar où les eaux très salées de la Méditerranée coulent dans l'océan Atlantique.

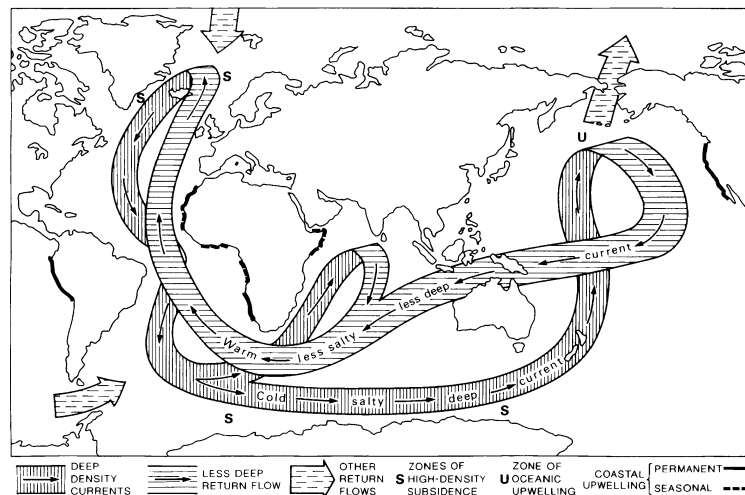


Figure V.17 Schéma de circulation profonde dans l'océan mondial.
(Extrait de Kerr 1988).

CHAPITRE VI

INTRODUCTION A LA DYNAMIQUE DES ONDES de SURFACE

VI.1 Introduction

Dans ce chapitre on examine principalement les caractéristiques et la dynamique des ondes observées à la surface de l'eau. Seront également abordés, de manière qualitative, les mécanismes de formation des vagues dues au vent et les déformations des ondes de surface lorsqu'elles se rapprochent de la côte. Quelques informations seront données sur les ondes internes (ondes présentes dans un océan où les caractéristiques de densité sont différentes) qui s'observent plus difficilement sans un appareillage adéquat.

Les modes de classement des ondes de surface sont variés: le plus simple est basé sur leurs fréquences (ou de leurs longueurs d'onde). et de leur énergie relative (Fig.VI.1).

Nom de l'onde	Périodes caractéristiques	Bande de fréquences (Hz)
Capillaire	0 à 10^{-1} sec	Supérieure à 10 Hz
Ultra-gravité	10^{-1} à 1 sec	10 à 1
Gravité	1 à 30 sec	1 à $0.33 \cdot 10^{-1}$
Infra- gravité	30 sec à 300 (5 min)	$0.33 \cdot 10^{-1}$ à $0.33 \cdot 10^{-2}$
A longue période	300 sec à 24 heures	$0.33 \cdot 10^{-2}$ à $1.16 \cdot 10^{-5}$
Transtidale	Supérieures à 24 heures	Inférieure à $1.16 \cdot 10^{-5}$

Tableau VI.1 Classification des ondes de surface en fonction de leurs périodes ou fréquences

Le classement des ondes pourrait également se réaliser en se basant sur le caractère progressif ou stationnaire de ces ondes. Une autre approche est basée sur l'analyse et le classement des ondes en termes des forces intervenant dans la dynamique de ces ondes: force de gravité, «force » de coriolis, forces de marée et tension superficielle (Fig.VI.1).

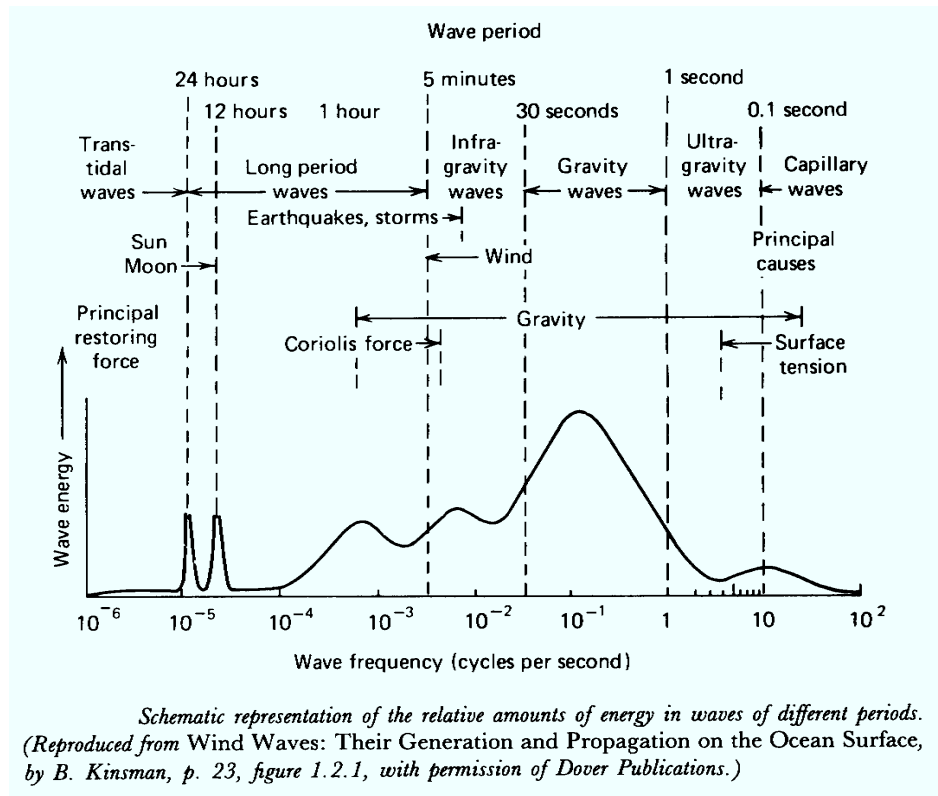


Figure VI.1 Représentation schématique de l'énergie contenue dans les ondes de surface (une esquisse du diagramme de puissance pour ces ondes)
(Extrait de Kinsman, 1965)

Les ondes résultant de l'action du soleil et de la lune ont des périodes ayant une relation directe avec les mouvements de ces astres par rapport à la terre: périodes de l'ordre de 12 ou de 24 heures ou ultratidales. Ces ondes seront étudiées dans le chapitre suivant.

L'analyse des équations de la dynamique des ondes de gravité permet de les classer en deux catégories:

- « wind waves » : ondes générées par le vent et existant dans le champ de vent ;
- houles (swell) celles qui ont quitté le champ de vent. Elles constituent en quelque sorte le résidu du champ de vagues en dehors de leur aire de génération.

Les premières ont généralement des périodes plus courtes que les secondes.

Les glissements de masses de terre dans la mer et dans les lacs ou des perturbations météorologiques créent dans les ports, les lacs, les baies, les lacs et les mers quasi-fermées des oscillations stationnaires connues sous le nom de seiches (ou clapotis) dont les périodes (de l'ordre de quelques secondes à quelques heures) sont en relation directe avec la géométrie de ces bassins.

Les rides observés à la surface de l'eau lors d'un léger coup de vent résultent de l'action de la gravité et de la tension superficielle. Elles sont caractérisées par des fréquences supérieures à 1 Hz.

Dans le tableau ci-dessus ne sont pas repris les tsunamis (raz-de-marée) qui sont des mouvements importants de la surface libre de l'océan provoqués par des déplacements non périodiques du fond de la mer à la suite de tremblements de terre ou d'éruptions volcaniques. Ces tsunamis se propagent à grande distance (Fig.VI.2) et se manifestent dans les régions côtières par des élévations (Fig.VI.3) très importantes (de plusieurs mètres) de la surface de la mer qui emportent tout sur leur passage. La perturbation arrive sous d'abord sous la forme d'un mur d'eau, suivie par des oscillations de forte amplitude générées par la perturbation initiale et ses interactions avec la bathymétrie et la morphologie des côtes.

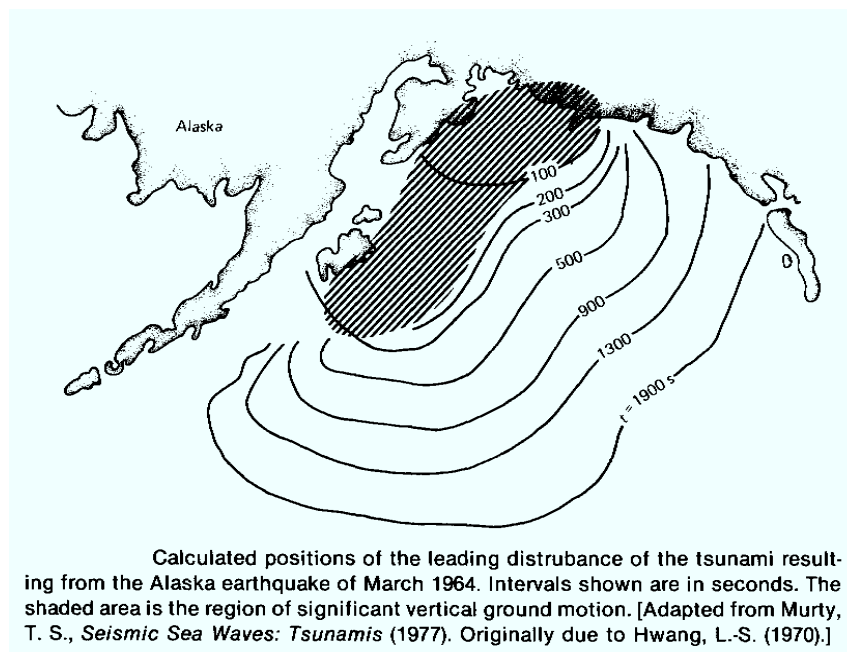
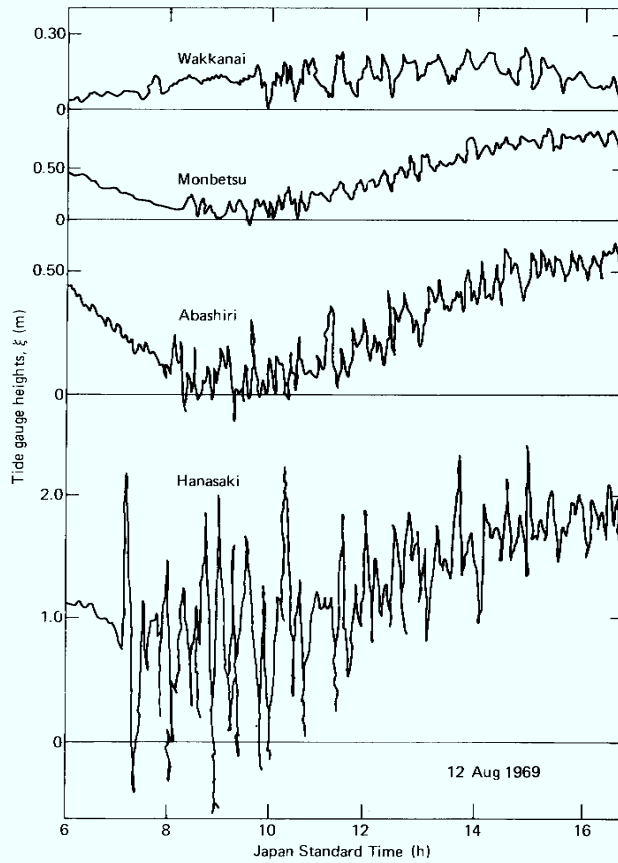


Figure VI.2 Positions de la perturbation principale d'un tsunami résultant d'un tremblement de terre en Alaska.



Tidal and tsunami amplitudes at four stations on the northeast coast of Hokkaido, Japan, showing waveforms on 12 August 1969. [From Murty, T. S., *Seismic Sea Waves: Tsunamis* (1977). Originally due to Hatori, T. (1970).]

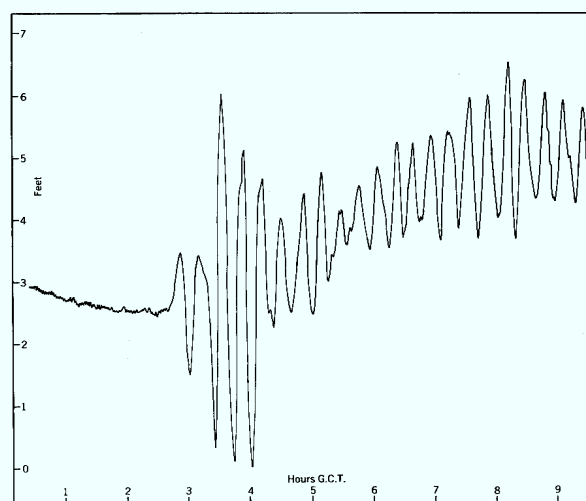


Figure 12.42 Tide gage record of the tsunami of November 5, 1952, as recorded at Pago Pago, Samoa. [From Zerbe (1953).]

Figure VI.3 Variations du niveau de la mer à quatre stations sur la côte nord-ouest du Japon et des Samoa à la suite d'un tremblement de terre.

VI.2 Caractérisations des ondes

La forme de l'interface air mer présente des formes des plus variées et n'est que rarement périodique dans l'espace et/ou dans le temps. La figure VI.4 (a) montre l'évolution temporelle typique du niveau de la mer durant une période agitée. Mathématiquement, ce signal peut être décomposé (Fig.VI.4b) en une somme de signaux périodiques de forme sinusoïdale.

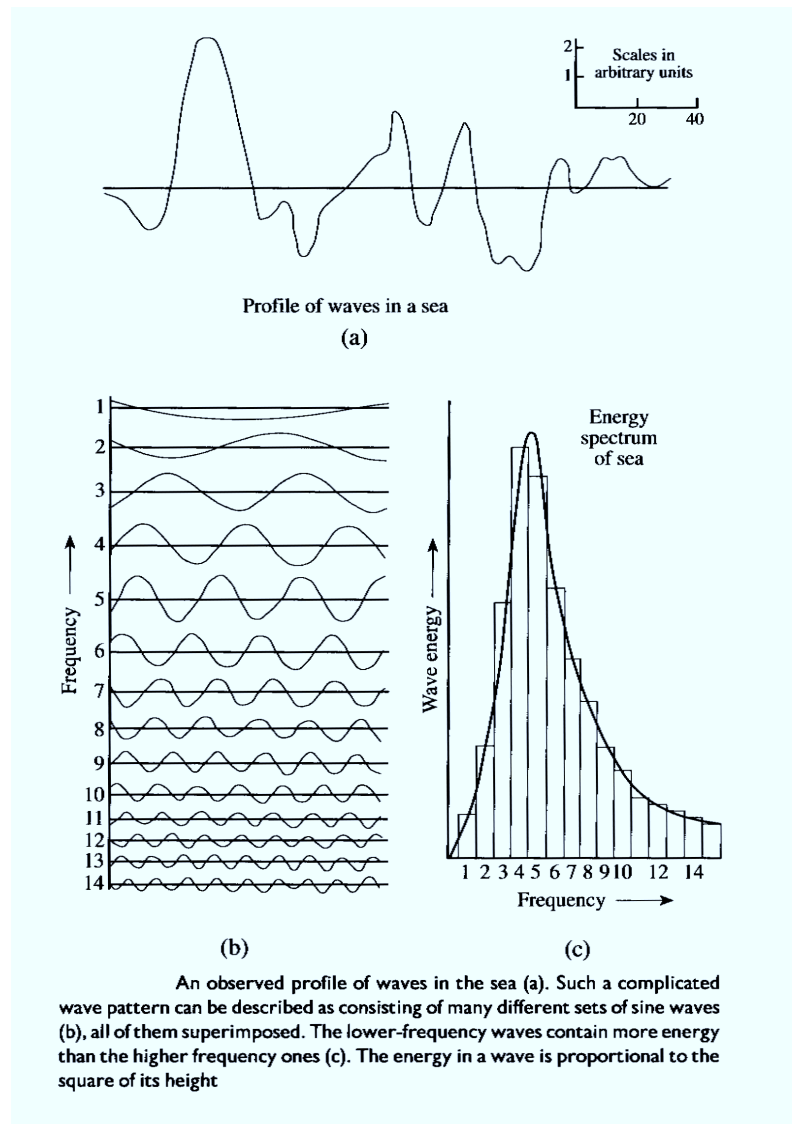


Figure VI.4 Profil caractéristique d'une onde en mer.
(Extrait de Wells, 1999)

Soit ζ l'élévation de l'interface air mer (souvent appelée surface libre) au dessus du niveau de repos. En terme des ondes partielles, l'élévation s'exprime comme suit :

$$\zeta(x, t) = \sum_{i=1}^n \zeta_i(x, t) \quad (\text{VI.1})$$

avec $\zeta_i(x, t) = A_i \sin(\omega_i t - k_i \cdot x) \quad (\text{VI.2})$

où ω_i la fréquence angulaire de l'onde partielle i ;

$k_i = (k_{i,x}, k_{i,y}, k_{i,z})$ les trois composantes du vecteur nombre d'onde k ;

$x = (x, y)$ la position géographique ;

A_i l'amplitude de l'onde partielle i .

Pour la simplicité de l'analyse nous ne considérerons qu'une seule onde partielle (l'indice i est supprimé pour des raisons d'écriture) se propageant dans la seule direction x .

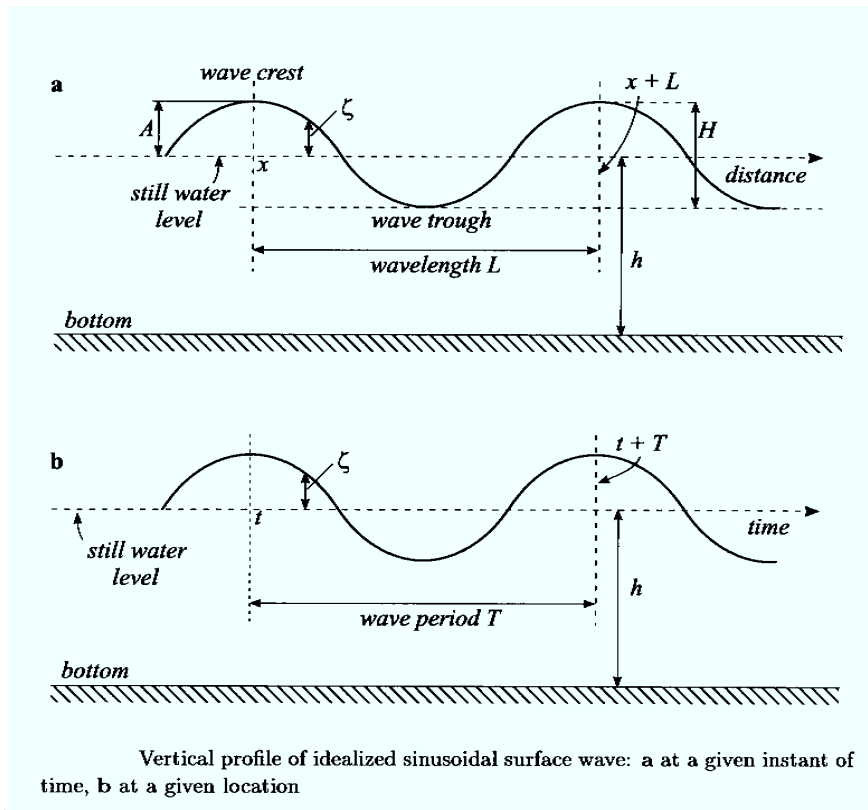


Figure VI.5 Profils verticaux d'une onde sinusoïdale de surface

a) à un instant donné ; b) en un point donné.

(Extrait de Massem, 1999)

La fréquence angulaire et le nombre d'onde sont reliés respectivement à la période (T) et à la longueur d'onde λ par les relations suivantes :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{VI.3})$$

Lorsqu'on se déplace à la vitesse de propagation de l'onde la cote de l'interface ζ est constante. L'argument de la fonction sinusoïdale est tel que:

$$\omega t - k x = \text{constante} \quad (\text{VI.4})$$

La relation entre vitesse de propagation, vitesse angulaire et nombre d'onde se déduit de (VI.4):

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (\text{VI.5})$$

Cette vitesse est appelée célérité de l'onde ou encore vitesse de phase.

Tenant compte de (VI.5), (VI.2) s'écrit :

$$\zeta(x, t) = A \sin(\omega t - k x) = A \sin k(ct - x) \quad (\text{VI.6})$$

VI.3 Vitesse de phase et vitesse de groupe.

Dans l'océan, les ondes de surface n'ont pas la forme d'une onde de forme sinusoïdale pure. Pour la simplicité du raisonnement, considérons une onde de surface constituée de la superposition (Fig.VI.6) de deux ondes progressives sinusoïdales de même amplitude mais de fréquences angulaires différentes :

$$\zeta(x, t) = A \sin(\omega_1 t - k_1 x) + A \sin(\omega_2 t - k_2 x) \quad (\text{VI.7})$$

La trigonométrie donne :

$$\zeta(x, t) = 2A \sin\left\{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right\} \cos\left\{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right\} \quad (\text{VI.8})$$

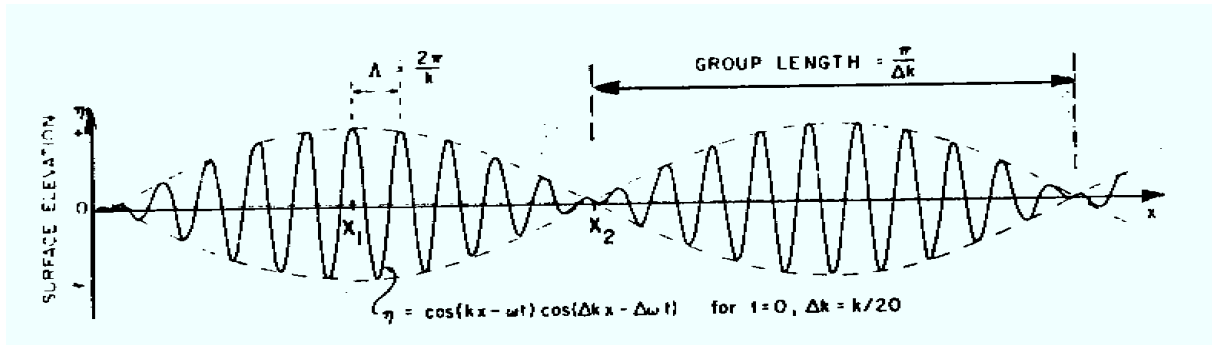


Figure VI.6 Composition de deux ondes sinusoïdales progressives à un instant donné.

Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, la modulation du signal (Fig.VI.6) se propage à la vitesse :

$$c_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \quad (\text{VI.9})$$

Cette vitesse est appelée vitesse de groupe. Ce concept peut être généralisé à un paquet d'ondes et la physique montre:

- un paquet d'ondes est la superposition d'ondes sinusoïdales qui se déplacent chacune à sa propre vitesse de phase c ;
- un paquet d'ondes et son énergie se déplacent à la vitesse de groupe c_g .

La vitesse de groupe d'une onde ou d'un paquet d'ondes se propageant à une dimension est (cfr. VI.9):

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{VI.10})$$

La vitesse de groupe diffère numériquement de celle de phase (voir § suivants).

Remarque : à trois dimensions, la vitesse de groupe est définie par:

$$c_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x} e_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} e_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} e_z \right) \quad (\text{VI.11})$$

avec $k = (k_x, k_y, k_z)$

VI.4 Estimation des divers ordres de grandeur des ondes de surface de gravité

Les périodes et fréquences caractéristiques ont été donnés au Tab.VI.1. Au chapitre III, le lien en les temps caractéristiques et les périodes est le suivant :

$$t_c = \frac{T}{2\pi} \quad (\text{VI.12})$$

On en déduit des ordres de grandeurs pour le temps caractéristique :

$$t_c \simeq 0.5 \text{ à } 2 \text{ sec} \quad (\text{VI.13})$$

De la même manière et tenant compte d'observations, il vient :

$$l_c = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (\text{VI.14})$$

et

$$l_c \simeq 0.05 \text{ à } 50 \text{ m} \quad (\text{VI.15})$$

Les mesures donnent une idée de la variabilité de la composante horizontale de la vitesse des ondes de surface :

$$v_{h,c} \simeq 0 \text{ et } 1 \text{ m/s} \quad (\text{VI.16})$$

La composante verticale de la vitesse est plus difficile à mesurer; une estimation peut se baser sur les faits suivants :

- Au fond, la composante verticale de la vitesse est nulle ;
- à la surface, la condition de continuité impose que la vitesse de déplacement de l'interface soit égale à la composante verticale de la vitesse en ce point :

$$w|_{\zeta} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d}{dt} (A \sin(\omega t - kx)) = \omega A \cos(\omega t - kx) \quad (\text{VI.17})$$

Il résulte de cette relation que la vitesse verticale en surface est directement proportionnelle à l'amplitude de l'onde et de sa fréquence angulaire. Ainsi par exemple, pour une onde de surface caractérisée par une amplitude de 1 mètre et une fréquence angulaire de 1 Hz, la vitesse verticale sera de 1 m/s.

La variabilité de la composante verticale de la vitesse sera de 0 à 1 m/s.

De la même manière on estime la composante verticale par :

$$a_{vert}|_{\zeta} = \frac{d^2 \zeta}{d t^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t - k x) \quad (\text{VI.18})$$

(VI.18) implique que l'accélération verticale est proportionnelle à l'amplitude de l'onde et au carré de sa fréquence angulaire. Pour des valeurs typiques de l'amplitude et de la fréquence angulaire d'une onde de surface, on obtient une borne supérieure pour l'accélération verticale de 1 m/s², c'est-à-dire une valeur non négligeable vis-à-vis de celle de l'accélération de la pesanteur.

VI.5 Dynamique de la houle.

Le vent soufflant à la surface de l'eau est responsable des courants d'Ekman (cfr.Chap.5) mais également des vagues. Les mécanismes de génération des vagues par le vent et de leurs croissance sont extrêmement complexes. Ils seront abordés qualitativement dans la dernière partie de ce chapitre. En conséquence, on n'examinera ici que le dynamique des houles (swells) de faible amplitude.

Tenant compte des valeurs caractéristiques des variables les équations de la dynamique (Chap.III) se simplifient.

a) *Composante verticale de l'équation de la vitesse.*

La composante verticale de l'équation de la vitesse (III.33) dans laquelle les grandeurs sont les valeurs moyennes et la viscosité moléculaire est remplacée par la viscosité turbulente s'écrit :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - 2\Omega u \cos \phi = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{v}_y \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{v}_y \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{v}_z \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - 2\Omega u \cos \phi = -b - \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{v}_y \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{v}_y \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tilde{v}_z \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Tenant compte des valeurs caractéristiques typiques des différentes grandeurs (cfr. §VI.4)

$$\begin{aligned} t_c &\approx 1 \text{ sec} & l_c &\approx 10 \text{ m} & b &\approx 10^{-4} \text{ à } 10^{-2} \text{ m/s}^2 \text{ (VI.19)} \\ v_c &\approx 1 \text{ m/s} & \tilde{v} &\approx 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

et en ne gardant que les termes les plus importants, l'équation ci-dessus se simplifie comme suit :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -b - \frac{\partial q}{\partial z}$$

(VI.20)

Contrairement aux courants marins, l'équilibre géostrophique n'est pas vérifié ; l'écart par rapport à celui-ci augmente (VI.18) proportionnellement avec l'amplitude de l'onde et le carré de la fréquence angulaire de l'onde.

b) Composantes horizontales de l'équation de la vitesse.

Pour l'analyse des ordres de grandeurs des différents termes de l'équation de la vitesse (III.33) dans laquelle les grandeurs sont les valeurs moyennes et la viscosité moléculaire est remplacée par la viscosité turbulente nous ne considérons qu'une seule composante horizontale, soit la 1. Elle s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2\Omega v \sin \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{v}_y \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{v}_y \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tilde{v}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2\Omega v \sin \phi = -\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{v}_y \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{v}_y \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tilde{v}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Tenant compte des valeurs caractéristiques typiques des différentes grandeurs (VI.19) et en ne gardant que les termes les plus importants, l'équation ci-dessus se simplifie comme suit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (\text{VI.21})$$

On obtient de la même manière la deuxième composante horizontale de l'équation de la vitesse :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial y} \quad (\text{VI.22})$$

La dynamique des ondes de gravité est donc différente de celle des courants marins. Pour cette dernière, l'équilibre géostrophique était bien vérifié.

c) Equation de continuité.

Pour simplifier les calculs nous pouvons (vu la forme des équations VI.21 et 22) considérer des ondes telles que leur direction de propagation coïncide avec la direction x et que les variables (vitesses et pression) ne dépendent pas de la variable y. Dans ces conditions, l'équation de continuité (III.20) se simplifie comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{VI.23})$$

d) Conditions aux limites

La dynamique des fluides, en particulier celle des ondes de gravité (VI.21 à 23), est régie par des équations aux dérivées partielles ; leur résolution demande la connaissance de conditions aux limites. Aux trois équations correspondent trois conditions aux limites :

i) Au fond : la vitesse verticale est nulle : $w|_{fond} = 0 \quad (\text{VI.24})$

ii) A la surface : la pression est constante : $p = p_{atm} = \text{constante}$

la composante verticale de la vitesse doit être égale à celle du déplacement vertical de l'interface :

$$w|_{interface} = \frac{d \zeta}{d t} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (\text{VI.25})$$

en négligeant les termes non linéaires trop petits étant donné les différents ordres de grandeur.

e) Solution du problème

Dans un océan profond ($h \rightarrow \infty$), la solution des équations (VI.21 à 23), compte tenu des conditions aux limites (VI.24 et 25) et en prenant le profil d'interface

$$\zeta(x, t) = A \sin(\omega t - k x) \quad (\text{VI.26})$$

est la suivante :

$$u(x, z, t) = \omega A e^{kz} \cos(\omega t - k x) \quad (\text{VI.27})$$

$$w(x, z, t) = \omega A e^{kz} \sin(\omega t - k x) \quad (\text{VI.28})$$

$$p(x, z, t) = -\rho g z + \rho g A e^{kz} \sin(\omega t - k x) \quad (\text{VI.29})$$

avec
$$\omega^2 = g k \tanh(k h) \quad (\text{VI.30})$$

La solution proposée ci-dessus est calculée en prenant une masse volumique constante égale à la masse volumique de référence.

La relation (VI.30) entre la fréquence angulaire et le nombre d'onde de l'onde dans un milieu donnée est appelée relation de dispersion de l'onde.

Elle prend des formes simple dans différents cas limites.

i) Ondes courtes (ou ondes en milieu profond) : $kh \gg 1$

La relation (VI.30) se simplifie et donne :

$$\omega^2 = g k \quad (\text{VI.31})$$

tout comme la vitesse de phase :

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (\text{VI.32})$$

La vitesse de phase dépend uniquement du nombre d'onde; un paquet d'ondes se déformera au cours de sa propagation. Le milieu est donc dispersif. La vitesse de groupe se déduit de (VI.31) :

$$c_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (\text{VI.33})$$

ii) Ondes longues (ou ondes en milieu peu profond) $kh \ll 1$

La relation (VI.30) se simplifie et donne :

$$\omega^2 = gh \quad (\text{VI.34})$$

tout comme la vitesse de phase :

$$c = \sqrt{gh} \quad (\text{VI.35})$$

La vitesse de phase dépend uniquement de la profondeur. Elle est indépendante du nombre d'onde; un paquet d'ondes ne se déformera pas au cours de sa propagation dans un tel milieu aussi longtemps que la profondeur reste constante. Le milieu est non dispersif. La vitesse de groupe se déduit de (VI.34) :

$$c_g = \sqrt{gh} \quad (\text{VI.36})$$

De manière générale, la vitesse de phase dépend du nombre d'onde et de la profondeur.

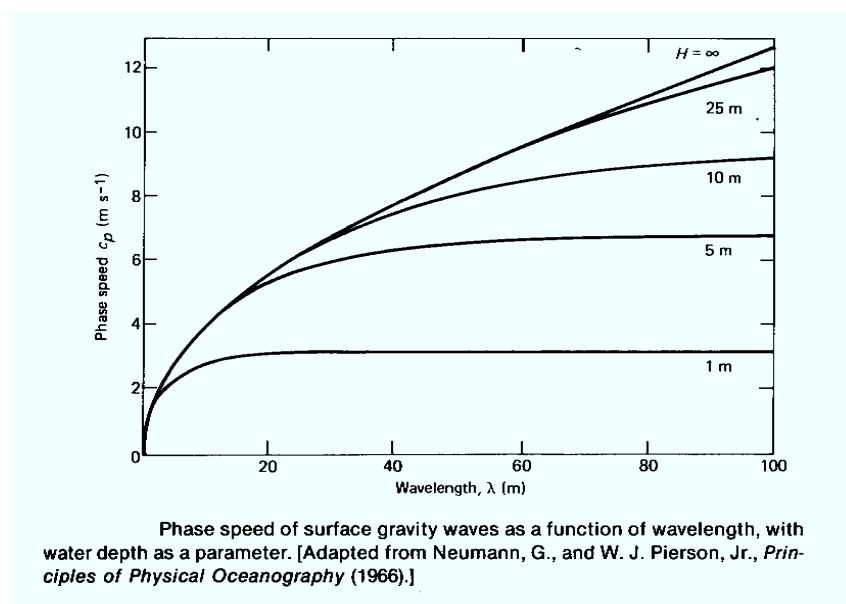


Figure VI.7 Influence de la profondeur et de la longueur d'onde sur la célérité de l'onde.

En toute rigueur, la discussion ci-dessous ne s'applique que dans le cas d'un océan profond.

- La pression ne suit plus exactement une loi hydrostatique ; la composante dynamique de la pression dépend de l'amplitude de l'onde de surface et du nombre d'onde par l'intermédiaire d'une exponentielle.
- L'amplitude des composantes de la vitesse est linéairement dépendante de l'amplitude et de la fréquence angulaire de l'onde.
- Les trajectoires des particules fluides sont fermées et sont circulaires (Fig.VI.8) lorsque la profondeur est infinie. Le rayon de ces cercles diminue de manière exponentielle.
- A une profondeur $z = -\frac{\lambda}{2}$,
l'amplitude de la vitesse et la composante dynamique de la pression sont réduites à 5% des valeurs qu'elles avaient à l'interface air-mer.

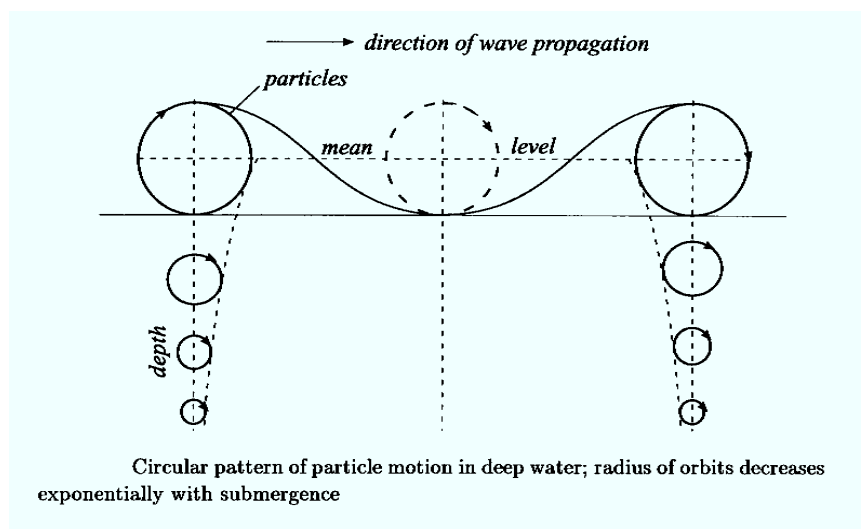


Figure VI.7 Trajectoires des particules fluides pour une onde de surface dans un milieu très profond. (Extrait de Massel, 1999).

Lorsque la profondeur est finie, la résolution des équations de la dynamique est plus difficile. La solution dans ce cas général conduit à des conclusions qui diffèrent quelque peu de celles données ci-dessus. Les trajectoires sont elliptiques et la décroissance n'est plus exactement exponentielle. Au fond en $z = -h$, l'amplitude de la composante horizontale de la vitesse vaut :

$$u_0 = \frac{1}{2} \frac{A\omega}{shkh} \quad (VI.37)$$

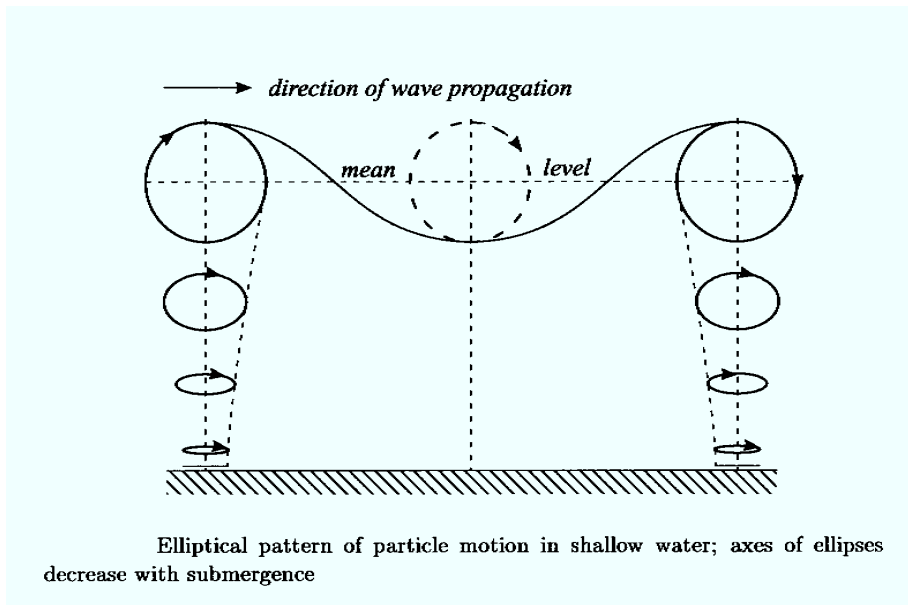


Figure VI.8 Trajectoires des particules fluides pour une onde de surface dans un milieu peu profond. (Extrait de Massel, 1999).

Dans tous ces deux cas, les trajectoires sont fermées et il est impossible d'expliquer de cette manière le transport de sédiments par les vagues. Un calcul complet (cfr. Cours d'océanographie et/ou d'hydraulique appliquée) prenant en compte les termes non linéaires donne, pour des ondes courtes, un déplacement Δ sur la période de l'onde.

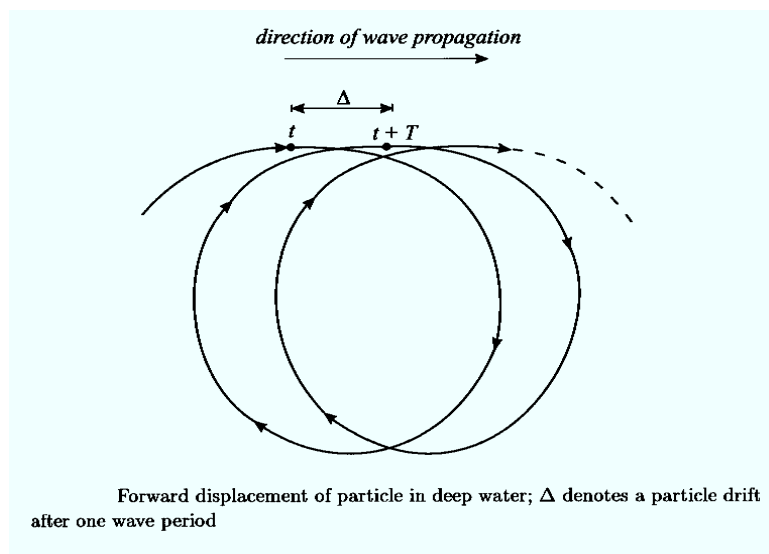


Figure VI.9 Déplacement résultant dans un mouvement ondulatoire de l'interface dans un milieu profond. (Extrait de Massel, 1999).

VI.6 Ondes stationnaires.

Un canal fermé est le siège d'oscillations (seiches) résultant de perturbations d'origine diverses. Si la profondeur du canal est petite vis-à-vis de la dimension horizontale du bassin, la vitesse de phase de l'onde est donnée par la relation (VI.34). Des deux ondes progressives se propageant dans des sens opposés donnent lieu à une onde stationnaire simple si le processus de réflexion de l'onde est parfait à chaque extrémité:

$$\zeta(x, t) = 2A \sin \omega t \cdot \cos kx \quad (\text{VI.36})$$

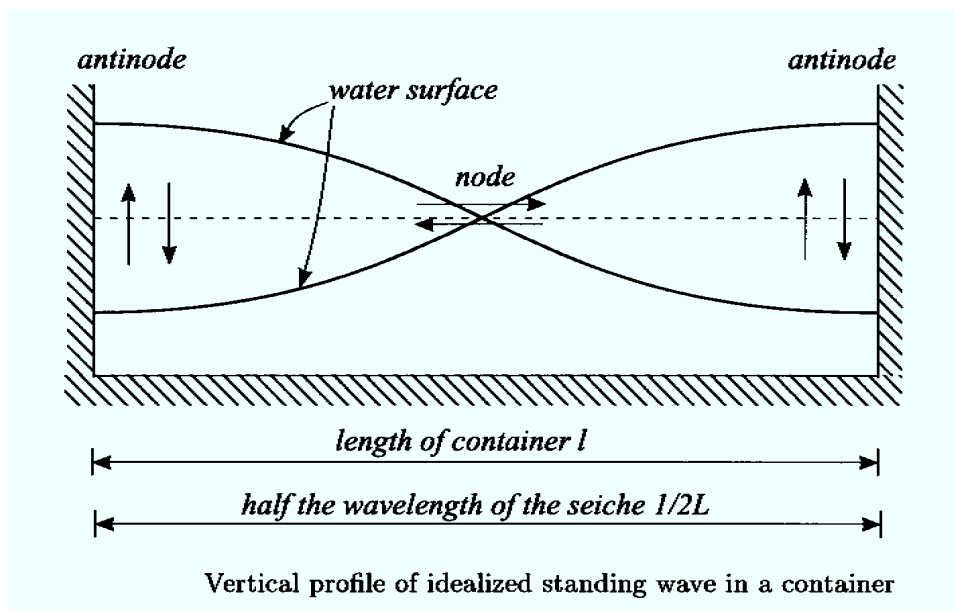


Figure VI.9 Profil vertical d'une onde stationnaire idéalisée dans un canal de longueur l .
(Extrait de Massel, 1999).

Le nombre d'onde n n'est pas arbitraire puisque la vitesse doit s'annuler aux deux extrémités du canal et la dynamique suivre les équation (VI.21 à 23). Le calcul donne en tenant compte de la relation de dispersion (VI.30) :

$$T_n = \frac{2l}{n \sqrt{gh}} \quad (\text{VI.37})$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

L'oscillation est unimodale dans le cas $n = 0$.

Des seiches s'observent plus souvent, forcées par l'action directe de vagues, à l'entrée d'un port ou d'une baie. Dans ce cas, la période des oscillations stationnaires (seiches) est donnée par :

$$T_n = \frac{4l}{n\sqrt{gh}} \quad (\text{VI.38})$$

$n = 1, 3, 5, \dots$

Dans un lac, les masses d'eau oscillent longitudinalement et transversalement à différentes périodes. L'interface présente différentes formes correspondant aux différents modes caractérisés par des périodes liées aux dimensions du bassin et de sa profondeur. La détermination précise de ces périodes d'oscillation, encore appelées seiches, requiert le calcul numérique et l'ordinateur. Une estimation peut se faire grâce à (VI.37).

VI.7 Energie dans une onde sinusoïdale

Une particule matérielle animée d'une vitesse possède une énergie cinétique et une énergie potentielle si elle est déplacée dans le champ de pesanteur par rapport à sa position d'équilibre. Les particules fluides dans une onde de surface caractérisées par des trajectoires elliptiques (circulaires dans le cas d'un océan infiniment profond) auront également une énergie cinétique E_k et une énergie potentielle E_p .

Un calcul relativement complexe donne comme énergies moyennes par unité de surface :

$$E_p = E_k = \frac{1}{4} \rho g A^2 \quad (\text{VI.39})$$

Dans ce cas simple, il y a équipartition de l'énergie entre ces deux types d'énergie.

VI.8 Déformation de la houle dans les régions côtières

Ce paragraphe n'est qu'une introduction à l'étude de la déformation de la houle dans les régions côtières. Des informations plus complètes sont données dans le cours d'océanographie appliquée). Pour la simplicité on considère que l'onde de surface est longue (onde en eau peu profonde). Dans ce cas, les vitesses de phase et de groupe s'expriment par (VI.35 ou 36):

$$c = c_g = \sqrt{gh} \quad (\text{VI.40})$$

a) Réfraction des ondes

Quand la profondeur change, la vitesse de propagation de l'onde se modifie. Ainsi, en se rapprochant des régions, la profondeur diminuant, l'onde se déforme, se réfracte : la longueur d'onde diminue et la vitesse de propagation n'est plus la même tout le long du front d'onde.

Soit une onde plane qui se dirige vers la côte, le modification de profondeur induit un changement dans la direction de propagation de cette onde étant donné que la vitesse de propagation change: on observe un phénomène de réfraction de l'onde. Des exemples de phénomène de réfraction sont donnés aux figures ci-dessous.

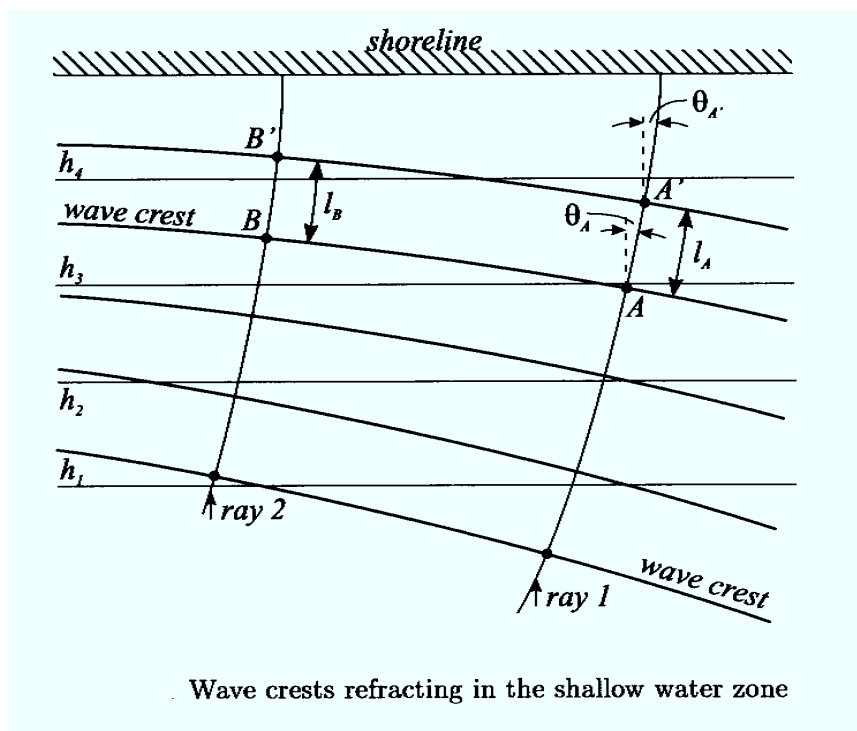


Figure VI.10 Réfraction du front d'onde dans les régions peu profondes.

(Extrait de Massel, 1999)

Le calcul d'un champ de vagues (Fig.VI.11) sera explicité dans le cours d'océanographie appliquée. Signalons qu'il se base sur le principe d'Huyghens : tout point d'un front d'onde se comporte comme une source sphérique..... Largement utilisée en optique, il permet de calculer la déformation du champ de vagues dans les régions côtières. En l'absence de processus de dissipation, étant donné le principe de conservation de l'énergie transmise : l'énergie qui passe entre A et A' se retrouve entre B et B' le long d'une orthogonale en raison de l'inverse de la racine carrée de la distance entre les orthogonales (FigVI.12).

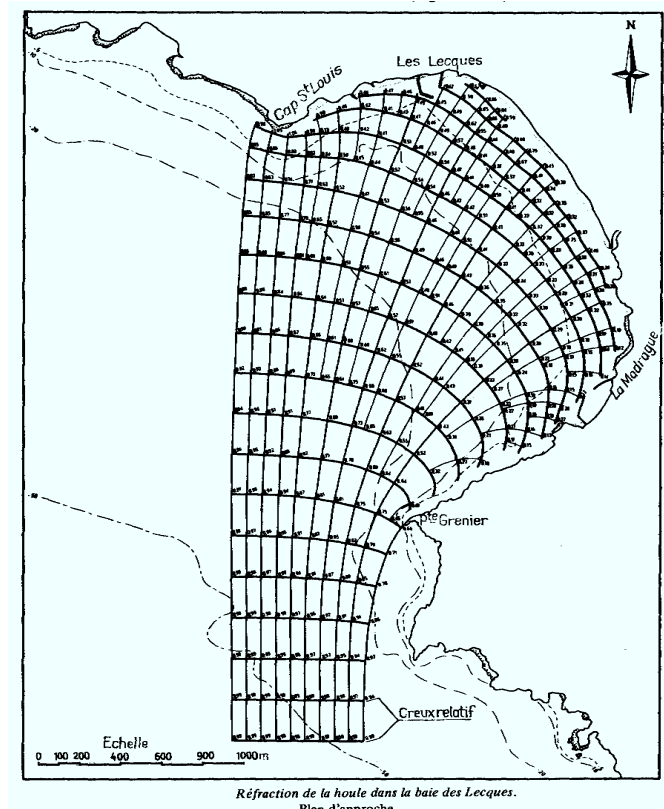
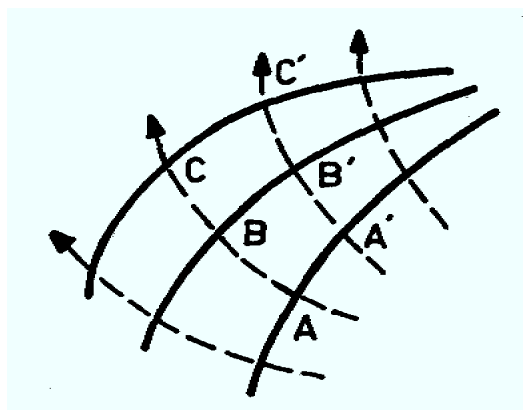


Figure VI.11 Champ de vagues (plan d'approche) dans une zone côtière.
(Extrait de Bonnefille, 1976)



FigVI.12 Déformation du front d'onde et de la direction de propagation d'une houle.

b) *Réflexion d'une onde sur un mur*

Lorsque la houle aborde une paroi imperméable, elle se réfléchit partiellement. La houle réfléchie, combinée à la houle incidente, donne naissance à des oscillations stationnaires appelées clapotis.

Afin de faire apparaître les processus, considérons une onde plane se propageant dans un bassin de profondeur constante et se réfléchissant sur un mur vertical, sans aucun processus de dissipation. Les lois de la réflexion des ondes sont identiques à celles de l'optique ou de l'acoustique. Ainsi,

$$\text{Angle d'incidence} = \text{Angle de réflexion}$$

Le processus de réflexion est plus complexe dans le cas d'une réflexion sur un talus lisse. Elle n'est partielle : lorsque la cambrure est forte, une partie de l'énergie est « détruite » par déferlement. L'approche de ce problème est souvent empirique. Les résultats présentés sur le graphique (Fig.VI.13) donnent le coefficient de réflexion r en fonction de la cambrure γ de l'onde au large et de la pente α du talus :

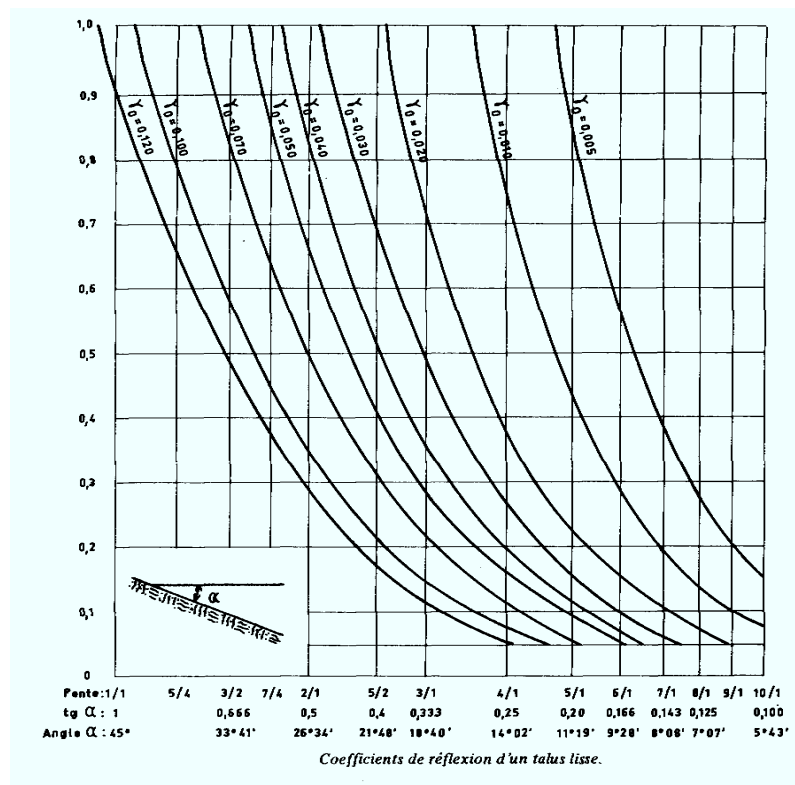


Figure VI.13 Coefficients de réflexion sur un talus lisse.

(Extrait de Bonnefille, 1976)

$$r = \frac{\text{amplitude de l'onde réfléchie}}{\text{amplitude de l'onde incidente}}$$

$$\gamma = \frac{\text{marnage } (\approx 2 * \text{amplitude})}{\text{longueur d'onde}}$$

$$\gamma_0 = \text{marnage au large}$$

Remarque: dans les ouvrages traitant de la houle, on introduit très souvent le concept de creux d'une vague; il est défini par la différence de niveau entre un niveau haut et le niveau bas consécutif.

c) *Diffraction de la houle*

Le processus de diffraction d'une onde est le changement dans la direction de propagation de celle-ci en l'absence de toute variation de la vitesse de propagation. Lorsque un ouvrage n'arrête qu'une partie du front d'onde, des oscillations se manifestent derrière cet ouvrage ; la houle contourne cet obstacle : elle diffracte. Ce phénomène s'observe également dans les régions côtières au voisinage d'irrégularités brutales de la morphologie de la côte.

Avant l'avènement des ordinateurs, la seule méthode efficace pour l'étude de la diffraction de la houle par une jetée ou d'un port était basée sur l'utilisation des modèles physiques ou des méthodes approchées dont celle d'Iribaren basée sur des considérations expérimentales. Soit une digue dont l'extrémité (musoir) est située au point B. Ce point devient émetteur de crêtes d'ondes circulaires centrées en B.

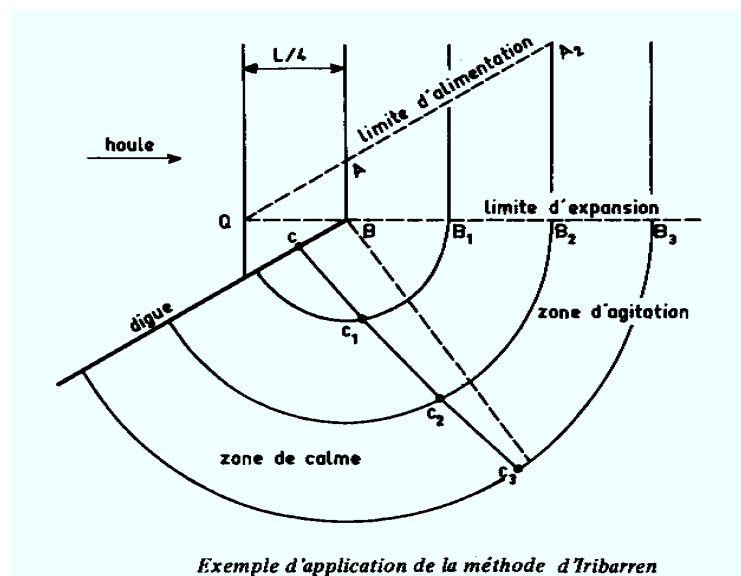


Figure VI.14 Exemple d'application de la méthode Iribaren.

(Extrait de Bonnefille, 1976)

En même temps, il se produit un appel d'énergie qui se propagent en suivant les crêtes de houle avec la même célérité que la houle, le phénomène commence en un point Q situé à une distance $L/4$ avant le musoir (FigVI.14).

La zone d'agitation est limitée par la spirale C, C_1, C_2, C_3, \dots construite de telle manière que $B_n C_n = A_n B_n$. Le long des arcs $A_n B_n C_n$, le creux varie en suivant une loi sinusoïdale depuis le creux au large ($H \approx 2A$ ($A =$ amplitude)) en A_n jusqu'à zéro en C_n . Au point

B_n , le creux vaut : $H \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Déferlement de la houle

Pour une longueur d'onde donnée le creux de la houle n'augmente pas au-delà d'une certaine limite car l'onde devient instable pour une valeur critique de la cambrure. Celle-ci peut être atteinte de deux manières différentes soit par un accroissement de l'amplitude de l'onde, soit par une diminution de la longueur d'onde. Lorsque l'onde est partiellement ou complètement détruite: l'onde déferle.

Lorsque la profondeur diminue, la seule caractéristique de la houle qui semble rester constante est la période. Prenant le cas d'une onde longue (onde en eau profonde) il résulte de la relations de dispersion (VI.410) que la longueur d'onde diminue. Négligeant le frottement sur le fond, on montre dans des cours plus spécialisés que le comportement du creux de la houle en fonction de la profondeur est plus complexe. Le calcul donne, lorsque l'onde se propage vers des milieux de moins en moins profonds, d'abord une diminution du creux, ensuite minimum pour une profondeur égale à $h = 0.15 * \lambda_0$ (λ_0 longueur d'onde au large) enfin une rapide augmentation. Ces deux facteurs sont responsables de l'augmentation de la cambrure de l'onde de surface lorsqu'elle se propage dans des régions peu profondes. La vitesse des particules se rapproche de la valeur de la célérité, jusqu'à l'atteindre. La forme limite de la houle atteinte, le déferlement commence: les particules s'écroulent dans le sens de la propagation.

Divers auteurs proposent plusieurs expressions pour cette cambrure limite : signalons celle de Miche (1944):

$$\gamma_{\text{limite}} = 0.14 \tanh(kh) \quad (\text{VI.41})$$

Au large, la cambrure limite est atteinte sous l'action du vent: déferlement sous forme de moutons. Sur un fond de faible pente, la houle déferle sous différentes formes (Fig VI.15 et 16).

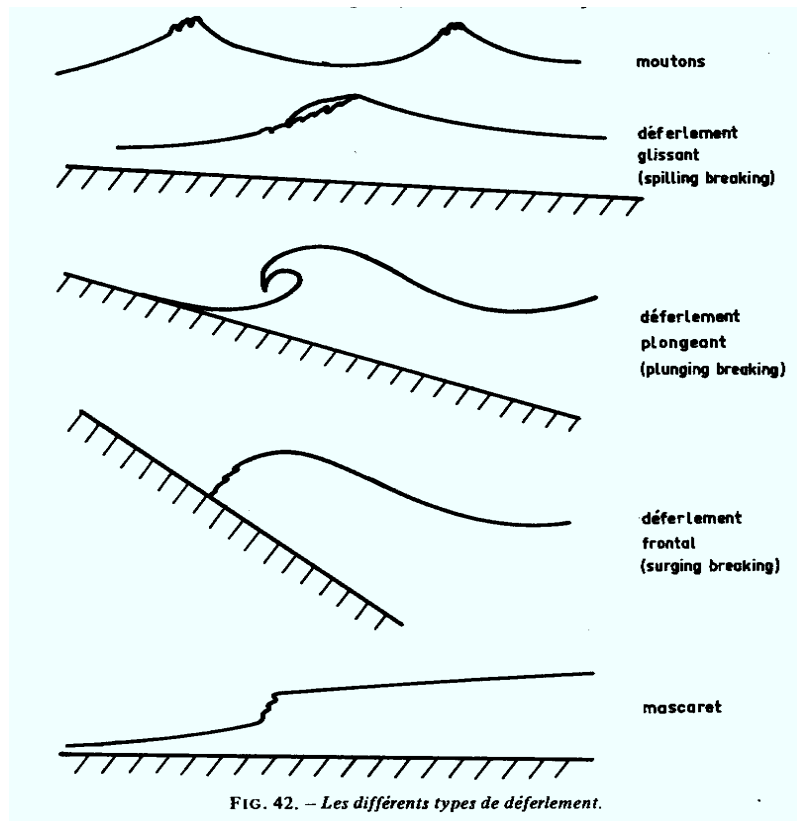


Figure VI.15 Différents types de déferlement. (Extrait de Bonnefille, 1976)

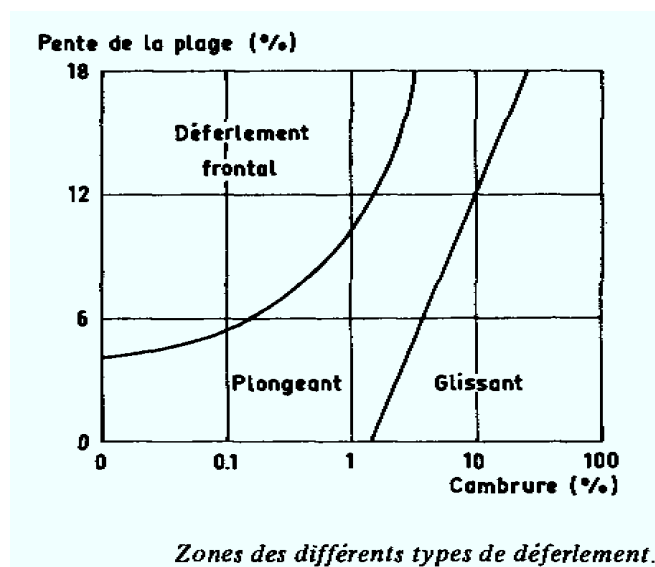


Figure VI.16 Zones des différents déferlements. (Extrait de Bonnefille, 1976)

VI.9 Mécanismes de génération des vagues par le vent.

Les mécanismes responsables de la genèse et de la croissance des vagues (amplitude et longueur d'onde) sont très complexes et relèvent de cours spécialisés. Les mécanismes généralement admis (Fig.VI.17) pour expliquer ces phénomènes sont ceux présentés par Phillips (1957) et de Miles (1957, et suivantes).

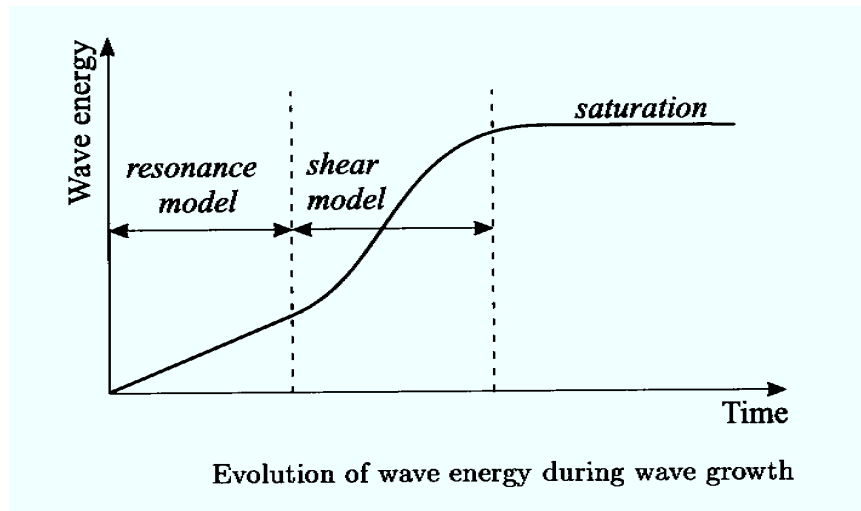


Figure VI.17 Evolution de l'énergie des vagues durant le processus de croissance.
(Extrait de Massel, 1999)

Le modèle de Phillips est particulièrement applicable aux premiers stades de la génération de l'onde de surface tandis que celui de Miles explique mieux la croissance des vagues.

Le modèle de Phillips repose sur l'idée que le champ de pression atmosphérique n'est ni uniforme ni stationnaire : le champ de pression atmosphérique est turbulent. Des ondes de pression se déplaçant à l'interface air-mer induisent une résonance avec les ondes de surface. Les ondes croissent linéairement en amplitude tout comme leurs vitesses au cours du temps. Ce modèle n'admet aucun processus de feedback entre le croissance des vagues dans l'eau et la couche limite atmosphérique.

Le modèle de Miles, par contre, tient compte de ce processus de feedback. Le mouvement cisailé de l'air dans la couche limite, modulé par la présence d'ondes de surfaces conduit à un couplage résonant entre les mouvements dans l'air et dans l'eau. Ce mécanisme (cfr. Cours

spécialisés) d'explique la genèse des ondes et donne une croissance de type (au lieu de linéaire par la théorie de Phillips) exponentiel pour l'amplitude des vagues.

Cette croissance des ondes ne continue pas infiniment car elle ne s'applique qu'à des processus associés à l'action du vent à la surface. Tout d'abord, la vitesse de phase des ondes augmente graduellement pour atteindre finalement la vitesse du vent. Quand la vitesse de phase devient plus grande ou égale à celle du vent, le vent ne peut plus apporter de l'énergie aux vagues : elles sont dans un état de saturation (Fig.VI.17). Ensuite, le second phénomène limitant la croissance de l'énergie est le déferlement des vagues qui se manifeste par la formations de moutons (white caps) pour les ondes courtes en eau profonde.

VI.10 Propriétés statistiques des vagues

La simple observation de la surface de la mer indique que l'interface air-mer présente une forme différente de celle associée à une seule onde de type sinusoïdal. La Fig.VI.4 fournit un enregistrement type des oscillations de l'interface. Une analyse de ce signal conduit à décomposer ce signal en une série d'ondes sinusoïdales qui possèdent des amplitudes donc des énergies variables. Les observation indiquent également que ces propriétés ne sont pas constantes: elles dépendent de plusieurs paramètres comme la durée de l'action du vent , de la vitesse du vent et de la zone sur laquelle agit le vent (fetch). Si le vent souffle suffisamment longtemps, un équilibre est éventuellement atteint entre l'énergie dissipée par les vagues et l'énergie fournie par le vent. Une telle mer est dite complètement développée. Cet état est un état idéal car l'équilibre est rarement atteint en raison du caractère non stationnaire du vent.

Traditionnellement par l'échelle de Beaufort de vent (Tab.VI.2) donne une relation simple entre la vitesse du vent et l'état de la mer.

Des études statistique sur la variabilité du niveau de la mer ont permis de déterminer un profil théorique (Fig.VI.18) du spectre d'énergie des ondes de surface et d'analyser l'influence de la vitesse du vent (Fig.VI.19), de la durée de l'action du vent (Fig.VI.20) et du fetch (Fig.VI.22) sur ce spectre d'énergie qui mesure la quantité d'énergie cinétique contenue dans l'onde par unité de surface:

The Beaufort Wind Scale (adapted from Bearman, 1997)

B°	Name	Wind speed		State of the sea-surface	H (m)
		knots	m/s		
0	Calm	< 1	0.0– 0.2	Sea like a mirror	0
1	Light air	1– 3	0.3– 1.5	Ripples with appearance of waves;	0.1-0.2
2	Light breeze	4– 6	1.6– 3.3	Small wavelets;	0.3-0.5
3	Gentle breeze	7–10	3.4– 5.4	Large wavelets; crests begin to break;	0.6-1.0
4	Moderate breeze	11–16	5.5– 7.9	Small waves becoming longer; frequent white horses;	1.5
5	Fresh breeze	17–21	8.0–10.7	Moderate waves taking longer form;	2.0
6	Strong breeze	22–27	10.8–13.8	White foam crests extensive everywhere;	3.5
7	Moderate gale	28–33	13.9–17.1	Sea heaps up and white foam from breaking waves begins to be blown in streaks;	5.0
8	Fresh gale	34–40	17.2–20.7	Moderately high waves of greater length; edges of crests break into spindrift;	7.5
9	Strong gale	41–47	20.8–24.4	High waves, sea begins to roll;	9.5
10	Whole gale	48–55	24.5–28.4	Sea-surface takes on white appearance as foam in great patches is blown in very dense streaks;	12
11	Storm	56–64	28.5–32.7	Exceptionally high waves; sea covered with white patches of foam, visibility reduced;	15
12	Hurricane	> 64	>32.7	Air filled with foam and spray; visibility greatly reduced	>15

B° denotes the Beaufort wind scale.

Tableau VI.2 Echelle de Beaufort de vent.

$$E = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (\text{VI.42})$$

où $S(\omega)$ est le spectre fréquentiel de l'onde de surface .

$S(\omega)$ est en quelque sorte une mesure de la probabilité d'occurrence d'un onde de fréquence comprise en ω et $\omega + d\omega$. Comme l'énergie totale contenue dans un onde de surface sinusoïdale par unité de surface est proportionnelle à $E \sim \rho g A^2$, divisant cette énergie par unité de surface par ρg , les unités généralement admises en océanographie pour $S(\omega)$ seront en $m^2 \cdot s$.

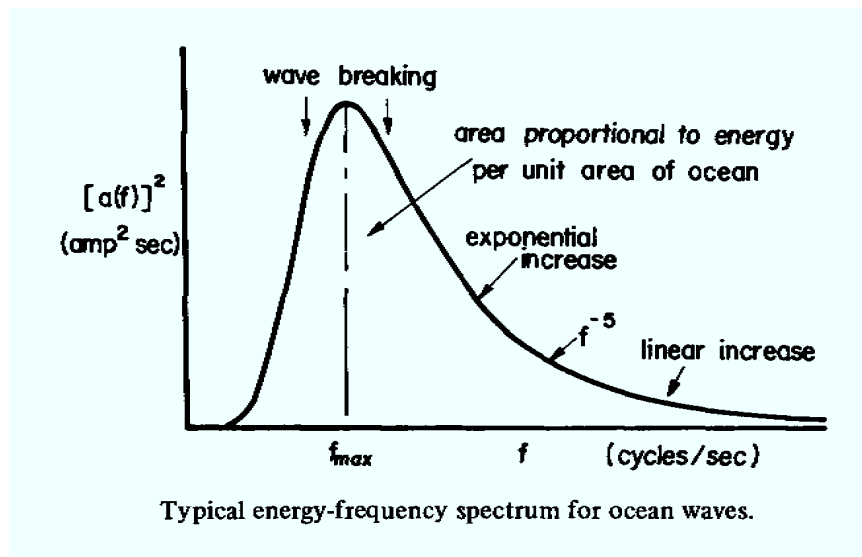


Figure VI.18 Spectre énergétique théorique pour des ondes de surface.

(Extrait de Massel, 1999).

i) Influence de la vitesse du vent sur le spectre d'énergie d'un champ de vagues.

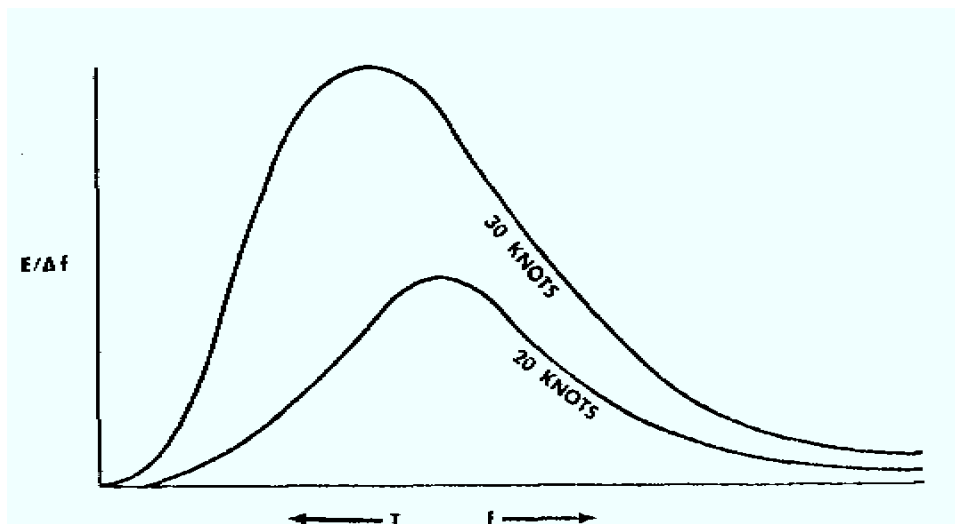


Figure VI.19 Evolution du spectre d'énergie théorique des ondes de surface en fonction de la vitesse du vent.

L'énergie totale des ondes présentes à l'interface air-mer par unité de surface augmente rapidement avec la vitesse du vent et le maximum d'énergie correspond à des fréquences de plus en plus basses.

ii) Influence de la durée d'action du vent sur le spectre d'énergie d'un champ de vagues.

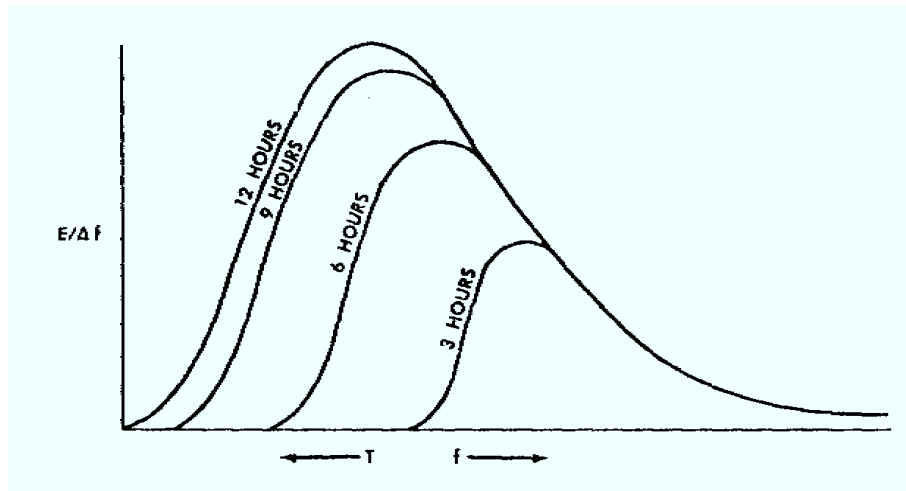


Figure VI.20 Evolution du spectre d'énergie théorique des ondes de surface en fonction de la durée d'action du vent.

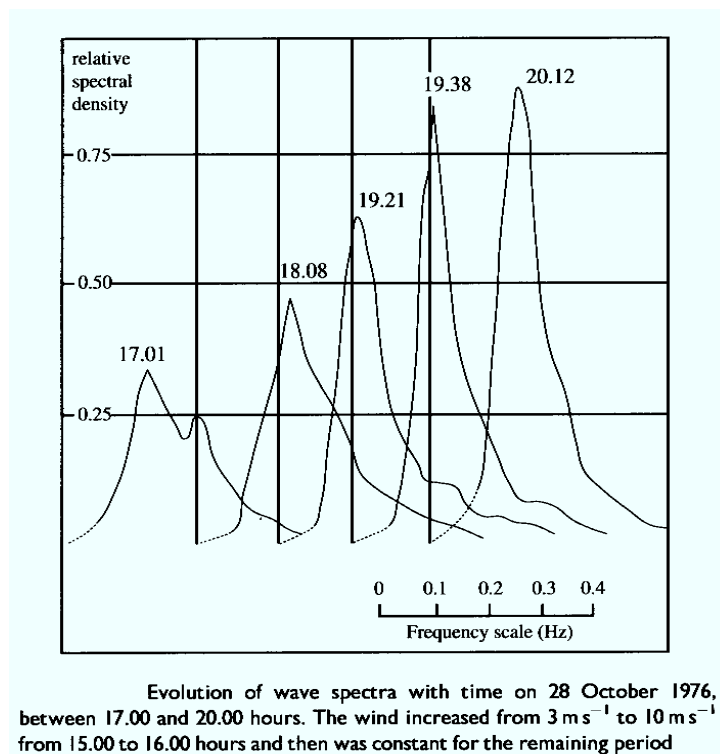


Figure VI.22 Evolution du spectre observé d'énergie des ondes de surface en fonction de la durée d'action du vent. (Extrait de Apel, 1987).

Plus la durée d'action du vent augmente, le calcul et l'observation montrent

- une augmentation de l'énergie totale de l'onde,
- la hauteur de l'onde la plus probable augmente
- la fréquence de la hauteur la plus probable diminue
- une saturation progressive du champ de vagues. La mer se rapproche de l'état mer complètement saturée.

iii) Influence de zone d'action (fetch) du vent sur le spectre d'énergie d'un champ de vagues.

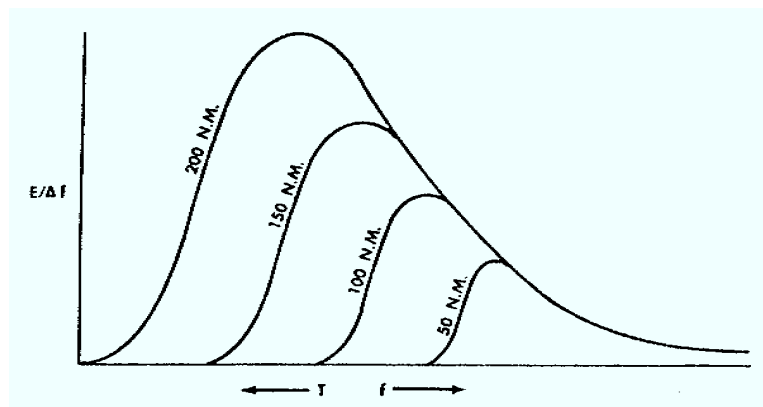


Figure VI.22 Evolution du spectre d'énergie théorique des ondes de surface en fonction du fetch (zone d'action du vent) en miles nautiques.

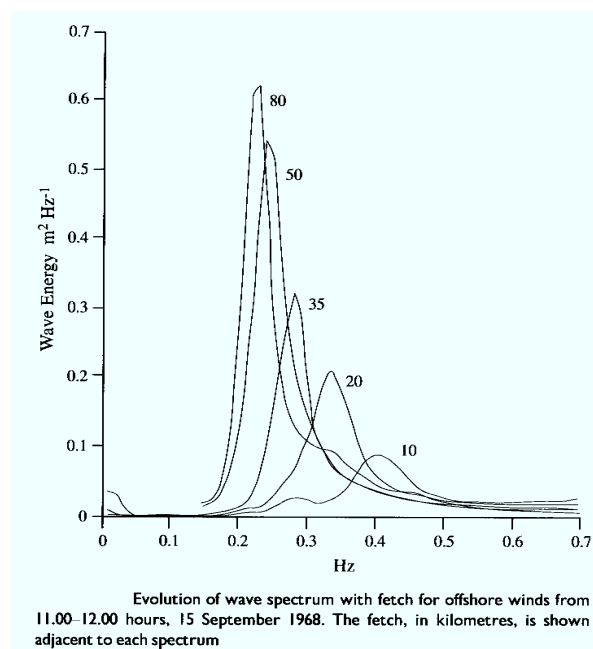


Figure VI.23 Evolution du spectre observé d'énergie des ondes de surface en fonction du fetch. (Extrait de Appel, 1987).

Plus la zone d'action du vent augmente, le calcul et l'observation montrent

- une augmentation de l'énergie totale de l'onde,
- la hauteur de l'onde la plus probable augmente
- la fréquence de la hauteur la plus probable diminue
- une saturation progressive du champ de vagues. La mer se rapproche de l'état mer complètement saturée.

Remarques.

En raison des grandes variations dans les caractéristiques des ondes de surface, il est nécessaire d'introduire un certain nombre de paramètres « globaux » qui caractérisent les spectres d'énergie; un paramètre élémentaire utilisé en statistique est la valeur moyenne de l'amplitude des vagues ou des creux, habituellement appelée hauteur moyenne des vagues :

$$\bar{H} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i \quad (\text{VI.43})$$

N : le nombre de mesures de creux.

Habituellement un enregistrement classique représentatif de l'état de la mer dure une vingtaine de minutes. Celui-ci contient plus de 100 mesures. Pour les applications techniques, en raison de la forme du spectre, un paramètre plus intéressant est la hauteur de la vague significative (moyenne de 1/3 des plus grosses vagues) H_s . En pleine mer, la relation entre hauteur moyenne et hauteur significative est la suivante :

$$H_s = 1.6 \bar{H} \quad (\text{VI.44})$$

Une autre manière de définir ces paramètres est de les relier à l'énergie totale E_t contenue dans le spectre. Dans ce cas la hauteur moyenne et la hauteur significative sont données par :

$$\bar{H} = 1.77 \sqrt{E} \quad (\text{VI.45})$$

et

$$H_s = 2.83 \sqrt{E} \quad (\text{VI.46})$$

A partir de nombreuses observations, différents auteurs ont établi, pour des situations géographiques données, des graphiques permettant de « prévoir » la hauteur de la vague la plus significative en fonction de la vitesse du vent, de la durée de celui-ci et du fetch ; un exemple est présenté ci-dessous.

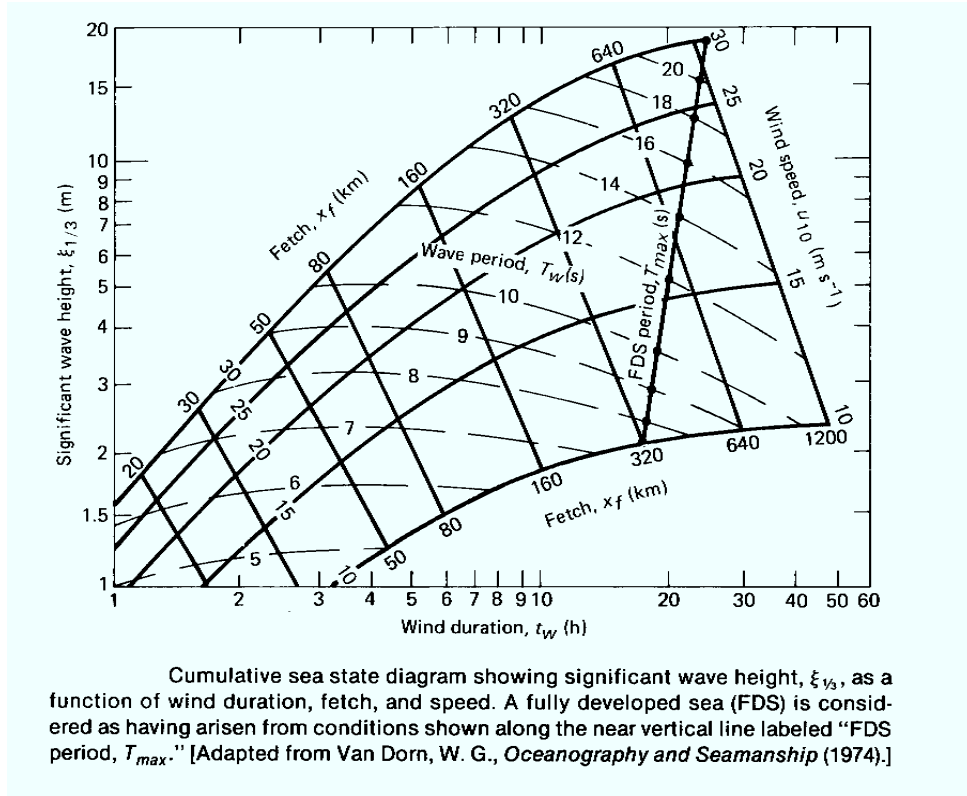


Figure VI.24 Diagramme présentant la hauteur de la vague la plus significative en fonction des paramètres météorologiques.

VI.11 Ondes internes

Jusqu'à présent on n'avait considéré que les ondes à la surface de la mer (houles et vagues générées par le vent). L'observation indique la présence d'ondes « internes » dans le milieu marin, à l'interface entre des couches d'eau aux masses volumiques différentes en particulier au niveau de la thermocline. L'océan étant un milieu stratifié, des ondes internes se manifestent à différents niveaux.

Les mécanismes de génération de ces ondes internes sont variés et font toujours l'objet de nombreuses recherches. Des causes possibles sont l'instabilité de l'écoulement en présence

d'un fort gradient vertical de vitesse (par exemple : passage de violents courants de marée à travers des zones caractérisées par des variations importantes de la bathymétrie), le transfert non linéaire à partir des ondes de surface et les effets barométriques associés au mouvement lent d'une dépression atmosphérique et aux variations de hautes fréquences dans la contrainte de vent.

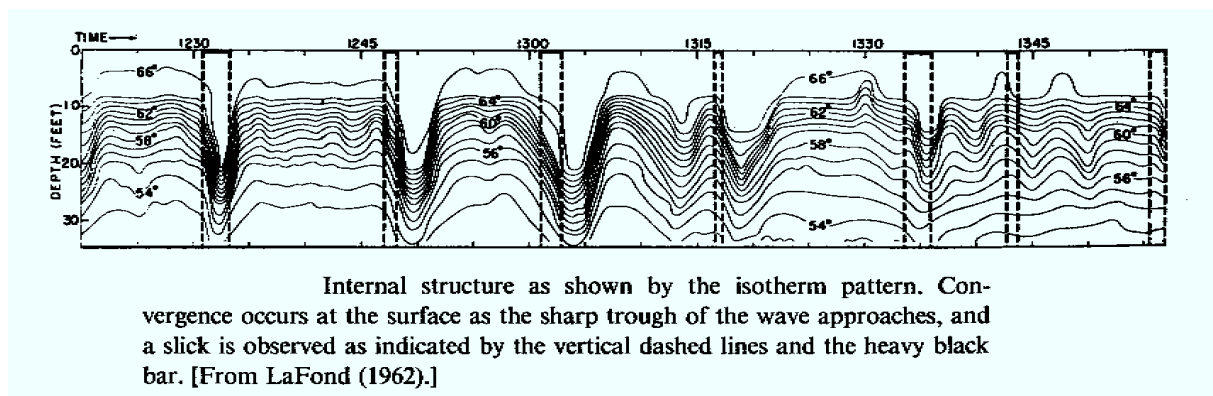
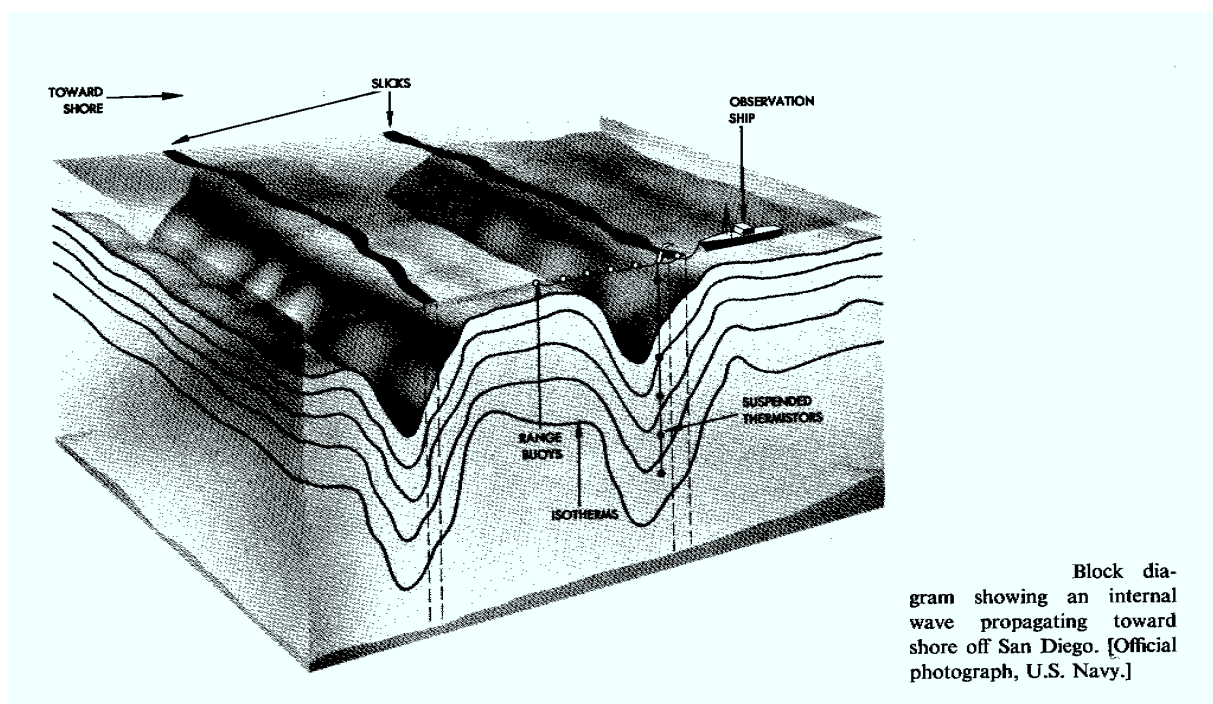


Figure VI.25 Structure d'ondes internes qui se manifestent par des variations périodiques de la température (Degrés F) et se propageant au large de San Diego . Des slicks sont observés au voisinage des zones de convergences en surface. (Extrait de Neumann et Pierson, 1963).

Un exemple historique est la génération d'ondes internes dans un fjord au passage d'un bateau (Fig.VI.26).

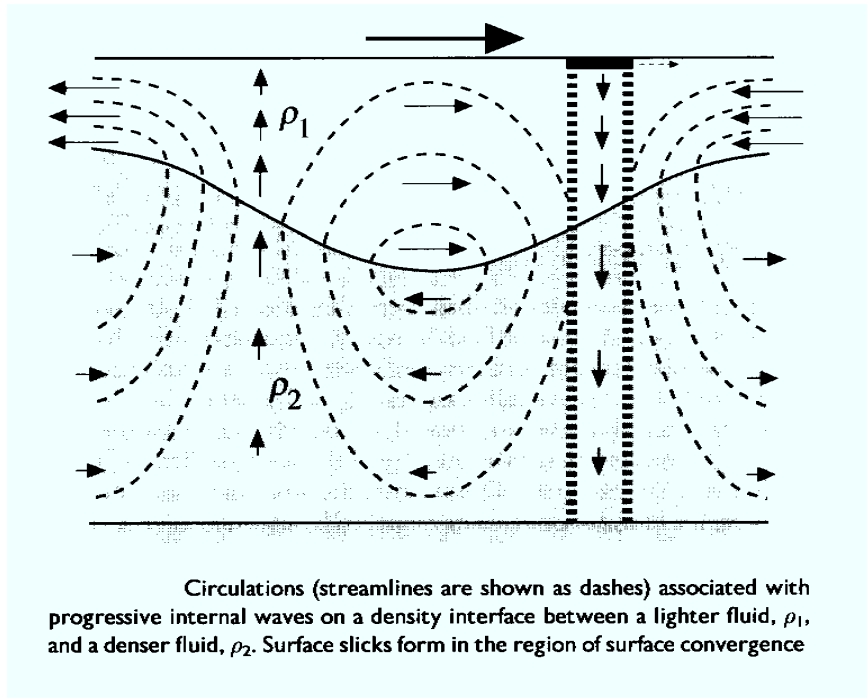


Figure VI.26 Onde interne à l'interface de 2 couches de fluide aux masses volumiques différentes. (Extrait de Wells, 1999).

L'étude des ondes internes dans le cas de deux couches horizontales d'eau d'épaisseur constante (h_1 et h_2 respectivement les épaisseurs des couches supérieure et inférieure) et de masse volumiques ρ_1 et ρ_2 est relativement simple. Il suffit d'intégrer les équations de la dynamique décrites au début de ce chapitre pour les fluides 1 et 2 et d'introduire au niveau de l'interface deux autres conditions aux limites :

$$w|_{\text{interface}, 1} = w|_{\text{interface}, 2} = \frac{d\zeta}{dt} \quad (\text{VII.47})$$

et

$$p_1 = p_2 \quad (\text{VI.48})$$

L'indice représente la couche étudiée.

Cette résolution conduit à une nouvelle relation de dispersion qui prend des formes simples dans les cas limites suivants :

- a) ondes courtes (ondes en eau profonde) (kh_1 et $kh_2 \gg 1$)

La relation de dispersion et la vitesse de phase s'écrivent :

$$\omega^2 = \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \right) g k \quad (\text{VI.49})$$

et

$$c^2 = \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \right) \frac{g}{k} = \frac{\Delta \rho}{\rho_1 + \rho_2} \frac{g}{k} \quad (\text{VI.50})$$

$\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$ la différence de masse volumique (faible dans l'océan).

Comme pour les ondes de surface le milieu est dispersif mais la vitesse de propagation des ondes internes est plus petite que celle de l'onde de surface pour un nombre d'onde donné.

- b) Ondes longues (ondes en eau peu profonde) kh_1 et $kh_2 \ll 1$

La relation de dispersion s'écrit:

$$\omega^2 = g k^2 \frac{h_1 h_2 \Delta \rho}{\rho_2 h_1 + \rho_1 h_2} \quad (\text{VI.51})$$

Etant donné la faible différence de masse volumique entre les deux couches, (VI.51) devient :

$$\omega^2 = \frac{g k^2}{\rho_2} \frac{h_1 h_2 \Delta \rho}{h_1 + h_2} \quad (\text{VI.52})$$

Lorsque l'épaisseur de la couche d'eau légère est mince comparativement à celle de la couche dense, la relation de dispersion se simplifie:

$$\omega^2 = \frac{g k^2 h_1 \Delta \rho}{\rho_2} \quad (\text{VI.53})$$

et la vitesse de phase devient :

$$c^2 = \frac{g h_1 \Delta \rho}{\rho_2} \quad (\text{VI.54})$$

Ce milieu est non dispersif pour ces nombres d'onde mais l'onde interne se propage beaucoup plus lentement que l'onde de surface correspondante.

Remarque : Dans l'exemple du bateau naviguant dans un fjord, ce bateau crée une onde de sillage en surface et une onde interne si la couche d'eau légère est mince. Dépendant de la vitesse et de la longueur du bateau, la circulation dans la couche inférieure perturbera la progression de celui-ci. Ce phénomène est connu sous le nom d'eau morte (dead water) parce que la vitesse de progression des bateaux est ralentie par ce phénomène.

Lorsque les deux couches fluides sont horizontales et d'épaisseur constante l'onde interne se propage horizontalement. Dans la nature, la stratification fluide n'est pas uniforme; il en résulte que les ondes internes se propagent dans toutes les directions et subissent des réflexions aux différentes interfaces. Le problème est dans ce cas beaucoup plus compliqué.

CHAPITRE VII.

FORCE ASTRONOMIQUE DE MAREE ANALYSE ET PREVISION DES MAREES Marées - Tempêtes

VII.1 Introduction

L'origine de la marée est gravitationnelle. Dans le cadre de ce cours on ne considère que les systèmes soleil terre et lune terre. En raison de la rotation de la terre autour de son axe de sa révolution autour du soleil et du mouvement de la lune autour de la terre, il est utile de commencer par un rappel de quelques définitions.

Jour solaire moyen: intervalle de temps moyen entre deux passages consécutifs du soleil devant un méridien. On divise ce temps en 24 heures (solaires).

Jour lunaire moyen: intervalle de temps moyen entre deux passages consécutifs de la lune devant un méridien. Il vaut (par rapport au jour solaire) 24 h 50 min 28.32 sec. Le jour lunaire moyen est plus long (1.035050 m.s.d) que le jour solaire moyen puisque la lune tourne autour de la terre dans le même sens.

Mois sidéral: temps nécessaire pour que la lune effectue une révolution complète autour de la terre par rapport à des étoiles supposées fixes (en première approximation). Il vaut 27 j 7 h 43 min 11,5 sec (27.3217 m.s.d).

mois synodique: temps nécessaire pour une révolution de la lune autour de la terre par rapport au soleil. Sa durée est de 29 j 12 h 44 min 28,28 sec (ou 29.5306 m.s.d). Il est donc plus long que le mois sidéral car la terre tourne autour du soleil.

Mois tropique: temps nécessaire pour que la lune effectue une révolution complète autour de la terre par rapport au point vernal d'équinoxe , soit, 27.3216.m.s.d. La différence par rapport au mois synodique résulte du déplacement très lent du point vernal d'équinoxe.

Année tropique : Intervalle de temps entre deux équinoxes vernaies, soit 365.2422 m.s.d)

VII.2 Caractérisation de la marée

La marée s'observe le long des côtes au moyen d'un repère plongé dans l'eau. Une observation plus précise et plus régulière des variations temporelles des niveaux de la surface de la mer s'effectue au moyen des marégraphes enregistreurs. La dénivellation est appelée marnage. La Fig.VII.1 montre des variabilités temporelles caractéristiques de la surface de la mer en divers points du globe. L'analyse des enregistrements des niveaux et des courants dans des mers telles que la mer du Nord montrent que la marée présente une périodicité quasi semi-diurne. Sur nos côtes la marée met un peu plus de douze heures à monter (le courant associé à ce mouvement vertical est appelé flot) et à descendre (le courant associé, le jusant). Dans certaines régions du monde (en mer de Chine par exemple), la périodicité est du type diurne.

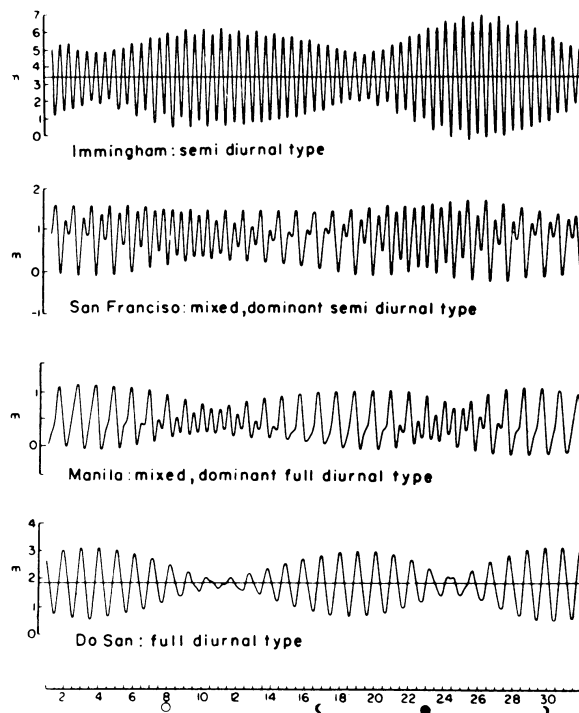


Figure VII.1 Variations temporelles du niveau de la mer pour quelques ports.

En raison de la position géographique de la Belgique, on s'intéressera surtout aux marées de type semi-diurne. L'observation montre que les hautes mers (marées hautes) et les basses mers (marées basses) n'ont pas des amplitudes identiques. S'observent des

périodes de grandes marées ou vives-eaux et des périodes de petites marées ou mortes-eaux. Deux grandes marées consécutives sont séparées par un intervalle de temps de quatorze jours environ; il en va de même pour les mortes-eaux intercalaires. Entre le creux d'une morte-eau et le plein de la vive-eau suivante, on observe un accroissement progressif du marnage: on dit que la mer rapporte ou qu'on est en revif. Le contraire du revif est le déchet. Enfin, toutes les vives eaux et toutes les mortes eaux ne sont pas d'égale importance: la périodicité est beaucoup plus longue et sera discutée dans le chapitre portant sur l'analyse du potentiel de la marée.

VII.3 Lignes cotidales et lignes d'égale amplitude

La propagation de la marée est souvent très complexe; il convient donc de la caractériser. Certaines mers continentales ont des marées qui fonctionnent en ondes stationnaires, notamment le golfe du Bengale, la mer de Chine méridionale, la mer du Japon... . Dans d'autres cas, les ondes de marées se comportent comme des ondes progressives: la marée s'y propage à partir de l'océan voisin avec un retard qui croît de l'entrée vers le fond. Les cas les mieux étudiés en Europe sont la mer du Nord et la Manche.

La représentation graphique habituelle des marées se fait par les lignes cotidales (isochrones de haute mer) et par les lignes d'égale amplitude (Fig.VII.2). Si le signal de marée est monochromatique l'amplitude vaut un demi marnage.

Dans le plan horizontal (x,y) , l'élévation de la surface pour une marée de fréquence angulaire σ se met sous la forme :

$$\zeta(x, y, t) = A(x, y) \sin(\sigma t) + B(x, y) \cos(\sigma t)$$

ou

$$\zeta(x, y, t) = C(x, y) \sin(\sigma t - \theta(x, y)) \quad (\text{VII.1})$$

ζ représente l'élévation de la surface par rapport au niveau de repos et $C(x,y)$ et $\theta(x,y)$ respectivement l'amplitude et la phase de l'onde. Il est habituel de diviser la période en heures du constituant. Ainsi, la période de la marée semi diurne-lunaire est divisée en douze heures lunaires.

Lorsque les lignes cotidales émanent d'un point, ce point est appelé point amphidromique. De la définition même de ce point, l'élévation de la surface n'évolue pas avec le temps. La figure ci-dessous présente les lignes cotidales et d'égale amplitude, les deux points amphidromiques réels et le point amphidromique virtuel (près de la côte norvégienne) correspondant à la marée semi-diurne lunaire (désignée par le symbole M_2 explicité dans la suite) de la mer du Nord.

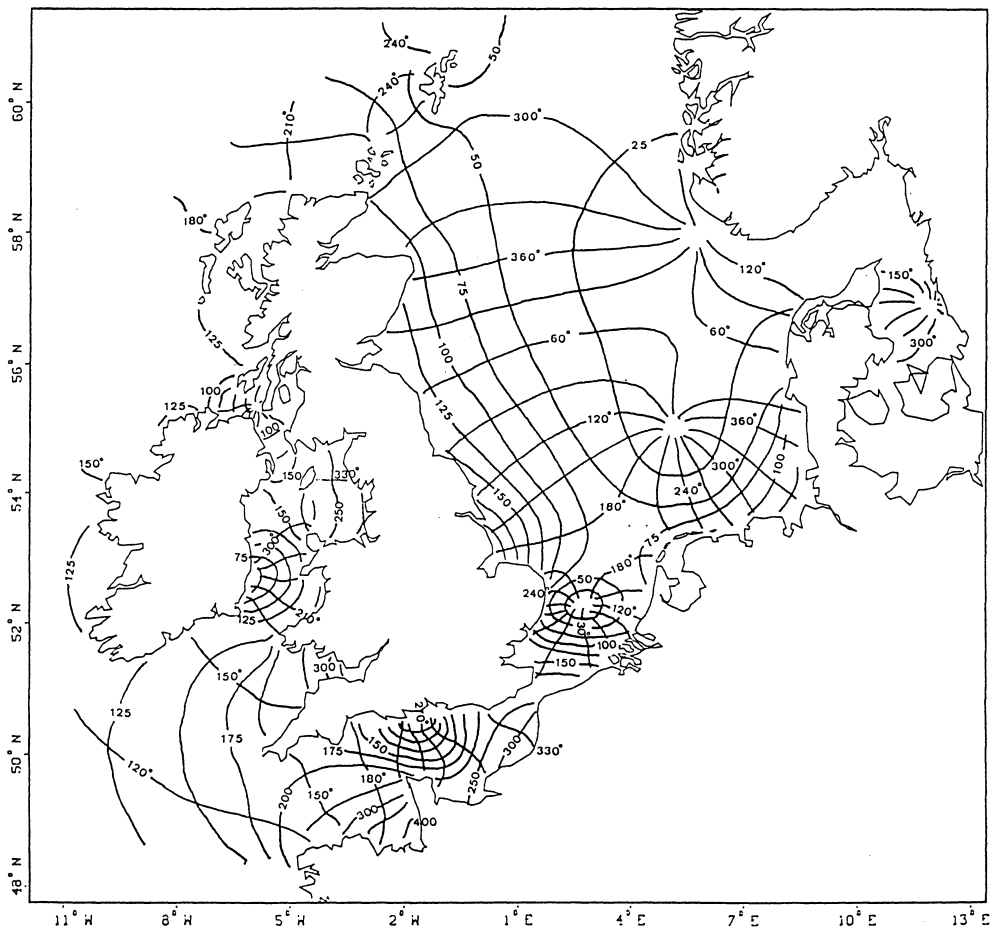


Figure VII.2 Lignes cotidales et lignes d'égale amplitude pour la marée semi-diurne lunaire dans la mer du Nord. Localisation des points amphidromiques.

VII.4 Force de marée

Les manifestations des marées sont connues depuis la plus haute antiquité. On sait depuis longtemps que la marée est en rapport avec les mouvements relatifs de la terre d'une part, de la lune et du soleil d'autre part.

L'explication rationnelle du phénomène basée sur les travaux de Newton et de ses successeurs (Laplace, Darwin et bien d'autres) est rappelée ci-dessous.

La loi de la gravitation postule que la force d'attraction entre deux masses ponctuelles est proportionnelle aux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance entre ces deux masses:

$$\|F\| = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{VII.2})$$

avec m_1 et m_2 les masses des deux corps supposés ponctuels, r la distance qui les sépare et γ la constante universelle de gravitation. Une des plus récentes estimations est:

$$\gamma = [6,673 + 0,003] \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \quad (\text{VII.3})$$

Il est important de rappeler que la loi de Newton n'est valable que pour un repère inertiel. Un tel repère pourrait être centré sur le soleil supposé immobile et dont les axes orthonormaux pointent dans des directions fixes.

Soit le système de repère présenté à la Fig. VII.3. La loi de Newton pour le point A dans le système inertiel centré en O par unité de masse s'écrit :

$$\frac{d^2}{dt^2}(\text{OA}) = P(\text{A}) + G(\text{A}) + \sum_{i=1} F_i(\text{A}) \quad (\text{VII.4})$$

où P est la résultante des forces non gravitationnelles, G représente l'attraction gravitationnelle de la terre sur le point A et F_i l'attraction gravitationnelle de l'astre B_i sur le point matériel A.

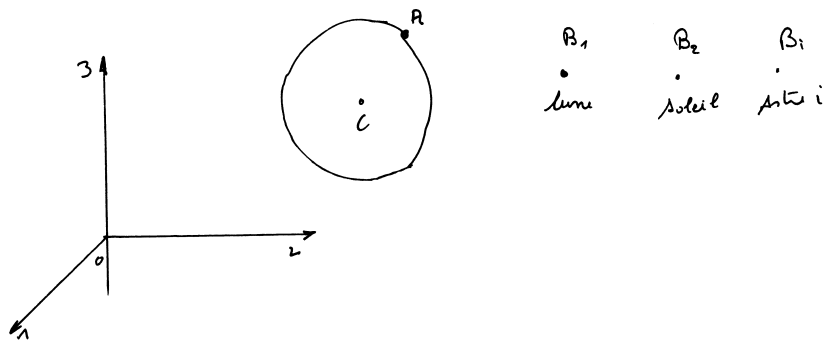


Figure VII.3 Système inertiel considéré.

C: la position du centre de la terre;

A: un point sur la terre affecté d'une masse unitaire;

B_i : la position de l'astre

Recherchons la valeur du rapport suivant $\frac{\|F\|}{\|G\|}$

quand le point A se trouve dans le voisinage de la surface de la terre. Pour estimer l'ordre de grandeur de ce rapport, considérons le schéma donné à la figure.VII.4

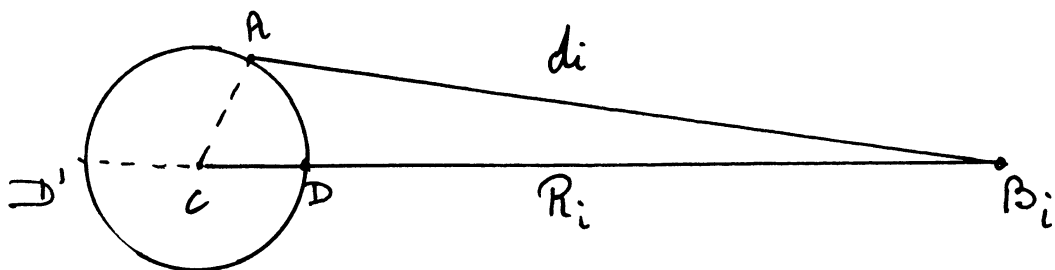


Figure VII.4 Schématisation du système terre astre B_{VII} .

Pour toutes les planètes, $r \ll R_i$, d'où il vient:

$$\|F_i(A)\| \approx \|F_i(C)\| \quad (VII.5)$$

Une application directe de la loi de la gravitation pour les différentes planètes et pour la terre donne le rapport des normes des forces gravitationnelles

$$\frac{\|F\|}{\|G\|} = \frac{m_i}{m_t} \frac{r^2}{R_i^2} \quad (\text{VII.6})$$

Si r est pris égal au rayon équatorial de la terre, $\frac{r}{R_i}$ est le sinus de la parallaxe horizontale équatoriale (parallaxe: angle sous lequel serait vue de façon normale, à partir d'un astre, une longueur égale au rayon terrestre.)

Les valeurs moyennes sont:

pour la lune $\frac{r}{R_1} = 0.016593 \quad (\text{VII.7})$

pour le soleil $\frac{r}{R_2} = 4.2615 \cdot 10^{-5} \quad (\text{VII.8})$

Comme les données astronomiques donnent

pour le système terre lune $\frac{m_t}{m_1} = 81.53 \quad (\text{VII.9})$

pour le système terre soleil $\frac{m_2}{m_t} = 333\,420 = 333.420 \quad (\text{VII.10})$

le rapport des normes des forces gravitationnelles vaut :

$$3.4 \cdot 10^{-6} \text{ pour la lune} \quad (\text{VII.11})$$

et $6.0 \cdot 10^{-4} \text{ pour le soleil} \quad (\text{VII.12})$

Malgré sa plus grande distance par rapport à la terre, le soleil exerce une force d'attraction 200 fois plus grande que celle de la lune en raison de sa très grande masse. Ceci est normal puisque la terre tourne autour du soleil. L'expérience montre que la lune provoque une marée deux fois plus importante que le soleil. Quelle est donc l'origine de la force de marée ?

Comme le point A se trouve dans le voisinage de la terre, il est plus rationnel de décrire le mouvement du point A par rapport à des axes centrés sur le centre de la terre et non plus sur le centre du soleil.

Écrivons tout d'abord dans le système inertiel décrit précédemment l'équation du mouvement du centre d'inertie de la terre situé en très bonne approximation au centre de la terre:

$$\frac{d^2}{dt^2}(OC) = P(C) + \sum_{i=1} F_i(C) \quad (\text{VII.13})$$

La résultante des forces non gravitationnelles (comme les forces de pression et de radiation) est négligeable et sera négligée dans la suite.

Le mouvement de A par rapport à C dans le nouveau repère est régi par l'équation suivante:

$$\frac{d^2}{dt^2}(CA) = P(A) + G(A) + \sum_{i=1} (F_i(A) - F_i(C)) \quad (\text{VII.14})$$

Posons
$$M_i(A) = F_i(A) - F_i(C) \quad (\text{VII.15})$$

La force de marée est l'attraction gravitationnelle due à la planète placée en B_i quand elle est mesurée en A, moins l'attraction de cette même planète mais mesurée au centre de la terre. Cette attraction résiduelle est la force qui accélère A par rapport à C et qui tend à déformer la géosphère.

Une autre manière de présenter la force de marée est la suivante: quand on se réfère à un système non inertiel tel que celui centré en C, le point matériel A est soumis aux forces de gravitation $G(A)$ et $F_i(A)$ ainsi qu'à une force fictive d'inertie $-F_i(C)$. La Fig.VII.5 montre schématiquement la direction des forces de marée en quelques points choisis.

Déterminons l'ordre de grandeur de la force de marée en calculant la force $M_i(A) = F_i(A) - F_i(C)$ au zénith. Dans ce cas, les directions des $F_i(A)$ et $F_i(C)$ coïncident et la norme de la force de marée par unité de masse est donnée par:

$$\|M_i(A)\| = \frac{\gamma m_i}{(R_i - r)^2} - \frac{\gamma m_i}{R_i^2} \cong \frac{2\gamma m_i r}{R_i^3} \quad (\text{VII.16})$$

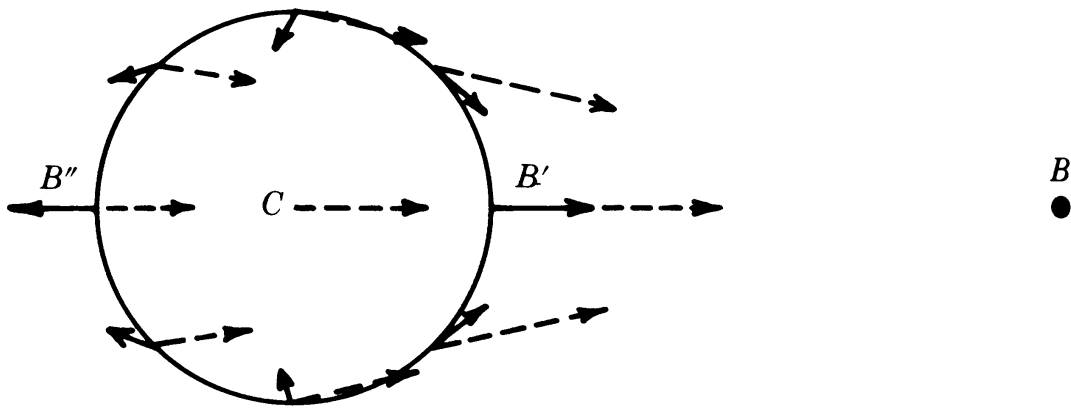


Figure VII.5 Forces d'attraction gravitationnelle et forces de marée en quelques points choisis.

La comparaison des ordres de grandeur de la force de marée par rapport à la force de gravité donne :

$$\frac{\|M_i(A)\|}{\|G(A)\|} \cong 2 \frac{m_i}{m_t} \left(\frac{r}{R_i} \right)^3 \quad (\text{VII.17})$$

Ce rapport vaut : pour le système terre lune: $0.56 \cdot 10^{-7}$

pour le système terre soleil: $0.26 \cdot 10^{-7}$

Les forces de marée solaire et lunaire sont donc du même ordre de grandeur.

Il reste à élucider une question: pourquoi ne pas ignorer les forces de marée qui sont 10^{-7} fois plus petites que l'attraction terrestre ?

- Tout d'abord, on peut mesurer des fluctuations aussi petites. La mesure se fait par une technique indirecte: on détecte la réponse de la couche terrestre. De telles mesures sont très utiles pour connaître la structure et les propriétés élastiques de la terre.
- Beaucoup plus important est le fait que dans la géosphère (lithosphère, hydrosphère et atmosphère) la force de gravité dirigée vers le centre de la terre est quasi égale à la force non gravitationnelle P (reliée à la pression). Ceci signifie

que l'équilibre hydrostatique est quasi vérifié. Dans ces conditions $P(A) + G(A)$ est très petit vis-à-vis de G .

- Examinons les directions de ces forces: la force de gravité est perpendiculaire au géoïde et les déplacements des masses (d'eau par exemple) sont produits par la composante de la force de marée qui fait un angle droit avec la force de gravité G . Cette composante de la force de marée tend à accumuler les masses d'eau vers les points D et D' (Fig.VII.5) Ceci est le mécanisme primaire des marées. Les déplacements verticaux sont en quelque sorte les réponses cinématiques à des déplacements horizontaux. Les déplacements verticaux ne sont donc pas provoqués par les composantes radiales des forces de marée.

Lorsqu'on travaille avec un système d'axes centrés en C et liés à la terre, apparaissent les accélérations de Coriolis et centripète. Généralement, on utilise la gravité apparente g au lieu de la gravité vraie G . Elle est définie par:

$$g(A) = G(A) - \Omega \times (\Omega \times CA) \quad (\text{VII.18})$$

La vitesse de rotation de la terre est constante en première approximation. La force fictive d'inertie "centrifuge" est dirigée perpendiculairement à l'axe de rotation de la terre. Elle tend à déformer la terre. Au cours des temps géologiques, la terre, soumise à la force g , s'est aplatie. Le rayon de la terre à l'équateur mesure 21,4 Km de plus que celui mesuré au pôle.

VII.5 Potentiel de marée

Les forces de gravitation et donc les forces de marée dérivent d'un potentiel. Il constitue un outil pour l'examen de la variabilité temporelle du signal de marée; il permet en outre de définir les marées à l'équilibre et leurs amplitudes.

Recherchons le potentiel associé W à la force de marée due à un astre B .

$$M_i(A) = F_i(A) - F_i(C) \quad (\text{VII.19})$$

Le potentiel de la marée M_i ($M = -\nabla W$) est donné (cfr. Cours spécialisés) en bonne approximation par W_i :

$$W = -\frac{\gamma m}{2R} \left(\frac{r}{R} \right)^2 (3\cos^2 \vartheta - 1) \quad (\text{VII.20})$$

L'indice i relatif à l'astre i est supprimé pour simplifier l'écriture.

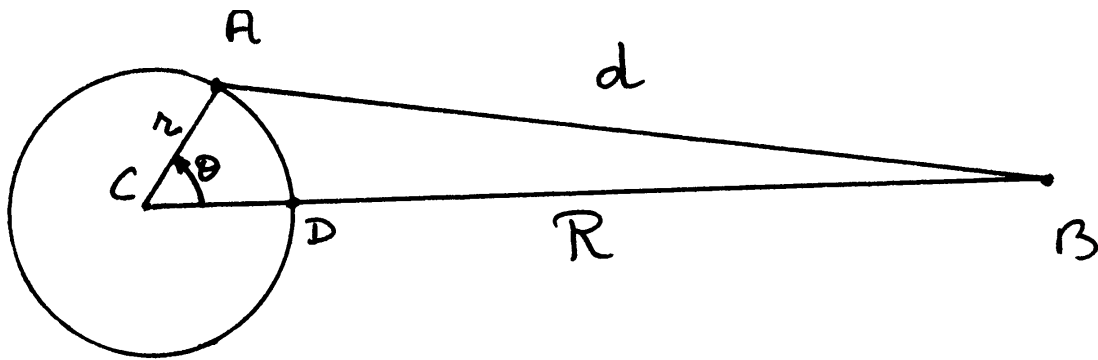
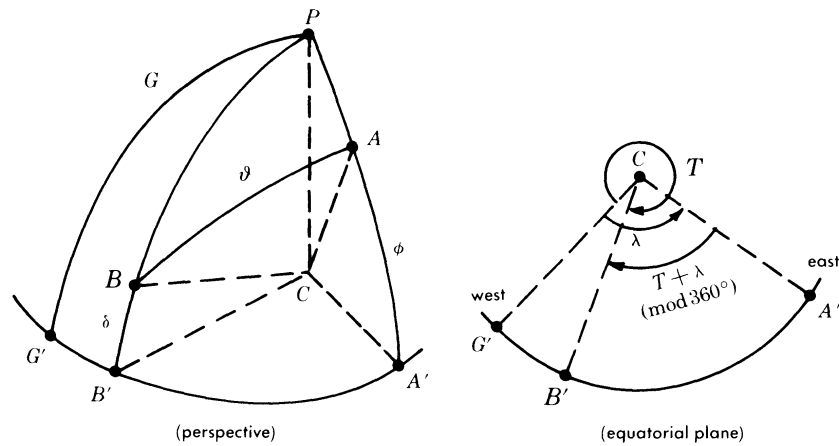


Figure VII.6 Relations entre les distances

Pour un calcul plus explicite, il convient d'introduire les coordonnées astronomiques sur la sphère céleste géocentrique et de relier l'angle azimutal θ aux coordonnées du point A considéré et aux caractéristiques de l'orbite de la planète qui provoque l'attraction.

La distance zénithale géocentrique θ est définie par l'arc du grand cercle sur la sphère céleste géocentrique, entre les points A et B. Le point A est le point de percée sur la sphère céleste géocentrique de la droite joignant le centre de la terre et le point où se situe l'observateur, le point B est le point de percée sur la sphère céleste géocentrique de la droite joignant le centre de la terre et l'astre considéré. Par convention, l'angle horaire T est positif dans la direction Ouest et la longitude λ est positive vers l'est.



Left : perspective of the geocentric celestial sphere ; right : plane of the celestial equator. Points and circles on the sphere are :

Points

- A*: field point
- B*: disturbing body
- G*: Greenwich
- P*: North Pole

Circles

- PAA'*: meridian of *A*
- PBB'*: hour circle of *B*
- PGG'*: meridian of *G*
- G'B'A'*: celestial equator

Positions of *A* and *B* are fixed by the following angles :

Angles for A

- $A'CA \equiv \phi$: latitude
- $G'CA' \equiv \lambda$: longitude

Angles for B

- $B'CB \equiv \delta$: declination
- $G'CB' \equiv T$: hour angle

Angles for B relative to A

- $ACB \equiv \vartheta$: zenith angle
- $A'CB' \equiv T + \lambda \pmod{360^\circ}$: hour angle

Longitude λ is measured eastwards from the meridian of Greenwich and hour angle T westwards.

Figure VII.7 Sphère céleste géocentrique.

Les significations des points et des cercles sont les suivantes:

- | | |
|---|-------------------------------------|
| <i>P</i> : pôle nord | <i>B</i> : astre perturbateur |
| <i>G</i> : Greenwich | <i>a</i> : point perturbé |
| <i>PAA'</i> : méridien passant par <i>A</i> | <i>PGG'</i> : méridien de Greenwich |
| <i>GB'A'</i> : équateur céleste | |
| δ : déclinaison | ϕ : latitude du point <i>A</i> |
| λ : longitude du point <i>A</i> | <i>T</i> : angle horaire |
| ϑ : angle zénithal | |

Appliquons la loi fondamentale de la trigonométrie sphérique au triangle sphérique *PBA* dessiné sur la sphère céleste géocentrique.

$$\cos \vartheta = \cos \widehat{PA} \cos \widehat{PB} + \sin \widehat{PA} \sin \widehat{PB} \cos(T + \lambda) \quad (\text{VII.21})$$

ou encore

$$\cos \vartheta = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos(T + \lambda) \quad (\text{VII.22})$$

Introduisant (VII.22) dans l'expression de $\frac{1}{2}(3\cos\vartheta^2 - 1)$, il vient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(3\cos\vartheta^2 - 1) &= \frac{1}{4}(3\sin^2\phi - 1) \cdot (3\sin^2\delta - 1) + \frac{3}{4}\sin 2\phi \sin 2\delta \cdot \cos(T + \lambda) \\ &\quad + \frac{3}{4}\cos^2\phi \cos^2\delta \cos 2(T + \lambda) \quad (\text{VII.23}) \end{aligned}$$

Cette expression multipliée par $-\frac{\gamma m r^2}{2R^3}$ donne le potentiel de marée.

Il est composé de trois termes qui sont des fonctions de la latitude, de la longitude et de la déclinaison de l'astre perturbateur. Le facteur de déclinaison varie lentement au cours du mouvement orbital de B.

Examinons les trois termes:

- Le premier terme est responsable des marées de longue période. Reprenant la notation de Laplace, il s'agit d'une marée de première espèce. Ce terme ne dépend pas de la vitesse de rotation de la terre.
- Le deuxième terme induit la marée de deuxième espèce. Comme la période de rotation de la terre est de l'ordre de 24 heures (à part une petite déviation due au mouvement orbital), ce terme donne naissance aux marées diurnes.
- Le troisième génère les marées semi-diurnes .

VII.6 Equations de la dynamique pour les marées

Etant donné les ordres de grandeurs des temps caractéristiques des phénomènes de marées, l'hypothèse quasi-statique est d'application. La projection horizontale de

l'équation de la quantité de mouvement avec l'hypothèse de l'équilibre quasi-hydrostatique est:

$$\frac{d}{dt}u + f e_z \wedge u = -g \nabla \zeta - \nabla W \quad (\text{VII.24})$$

en faisant l'hypothèse d'une pression atmosphérique uniforme pour mettre en évidence les effets de la marée et en négligeant les termes dissipatifs.

La résolution de cette équation requiert l'utilisation de méthodes numériques d'intégration. Les cartes présentant les champs des courants, les lignes cotidales et d'égale amplitude (Fig.VII.2) se préparent à partir de ces résultats.

Dans le cas statique, (VII.24) devient:

$$\nabla (g \zeta_{\text{équil}} + W) = 0 \quad (\text{VII.25})$$

Il en résulte que:

$$\zeta_{\text{équil}} = -\frac{W}{g} \quad (\text{VII.26})$$

Etant donné la variabilité du terme trigonométrique du potentiel de marée et les valeurs des différents paramètres de celui-ci, le marnage lunaire sera de $2 \times 0,26 = 0,54$ m et le marnage solaire de $2 \times 0,12 = 0,24$ m. La déformation maximale de la surface du géoïde est de l'ordre de 0,78 m.

VII.7 Historique de l'analyse et des prévisions des marées

Les prévisions du niveau de la mer étaient publiées dans des almanachs bien avant la modélisation hydrodynamique des marées et la théorie du signal. Elles étaient relativement satisfaisantes pour les ports où les observations constituaient des séries temporelles suffisamment longues.

Actuellement existent deux types de méthodes de prévision des marées l'une harmonique (la plus fiable et la plus utilisée), l'autre non harmonique (méthode d'influence) que nous ne développerons pas dans ce chapitre.

Quelques grandeurs souvent utilisées dans l'analyse des marées.

- Syzygie : lorsque la terre, le soleil et la lune sont sensiblement alignés (nouvelle lune et pleine lune), c'est-à-dire aux syzygies, les forces de marée dues à la lune et au soleil s'additionnent positivement: la résultante est donc maximale.
- Age de la marée : intervalle de temps, exprimé en jours solaires moyens, entre le passage de la marée haute et celui correspondant à la marée de vive-eau précédente.
- Inégalité diurne : différence entre deux marées hautes (ou marées basses consécutives).
- Inégalité semi-mensuelle : différence entre la cote de la marée haute du moment considéré et celle de la marée de vive-eau moyenne.
- Niveau moyen : Ce niveau est difficilement définissable car la surface "libre" de la mer est en éternel mouvement. Par convention, il est défini comme étant la moyenne temporelle du niveau de la surface de l'eau sur un intervalle suffisamment long pour éliminer la plus part des oscillations de moyenne et de haute fréquence.
- Zéro des cartes : (chart datum). Les cartes de navigation exigent qu'une carte donne les profondeurs minimales (du moins de manière approximative).

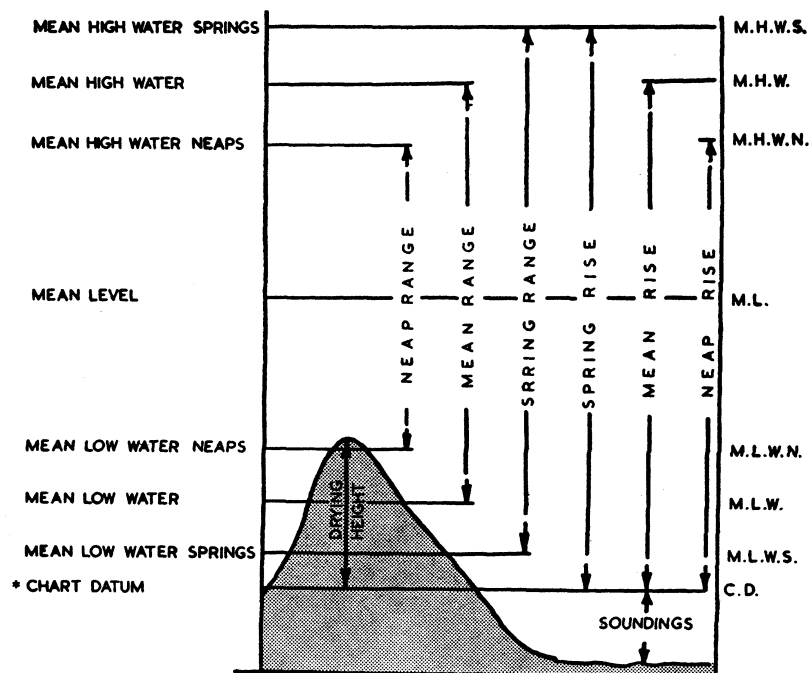


Figure VII.8 Relations entre les différents niveaux et marnages.

La Conférence Hydrographique Internationale de 1926 s'accorda sur une définition encore vague du zéro de carte (chart datum). Ce niveau est défini comme étant un plan en-dessous duquel la marée ne descend que très rarement. Selon les pays et les sources, les résultats obtenus sont quelque peu différents. Le niveau de plus basse mer est souvent pris (d'autres conventions existent en Angleterre et aux Etats Unis) comme étant le zéro de carte. Il est donné par:

$$S_0 - 1.2*(M_2 + S_2 + K_2) \quad (\text{VII.27})$$

où M_2 , S_2 , K_2 sont les amplitudes des marées partielles (définies plus tard) et S_0 la cote du niveau moyen par rapport au niveau de la carte.

VII.8 Méthodes empiriques de prévision des marées

Ces méthodes sont anciennes et ne sont plus guère utilisées par les océanographes. Certaines restent cependant d'application en navigation. En océanographie, pour caractériser l'importance des marées diurnes par rapport à celles semi-diurnes, on introduit le facteur de forme F :

$$F = \frac{K_1 + O_1}{M_2 + S_2} \quad (\text{VII.28})$$

F	Type de marée
0. – 0,25	Semi-diurne
0,25 – 1,5	Mixte, semi-diurne dominant
1,5 – 3	Mixte, diurne dominant
3 et plus	Diurne

Tableau II.1 Facteurs de forme

Dans le facteur de forme, n'interviennent que les marées partielles K_1 , O_1 , M_2 et S_2 qui seront définies dans la suite.

La méthode empirique de prévision d'usage courant en France est la méthode du coefficient de marée et de l'unité de hauteur. Sur les côtes françaises, la marée a une amplitude sensiblement proportionnelle à celle observée à Brest. Etant donné ce fait expérimental, il sera possible de déterminer les marées pour tous les ports français à condition de connaître celle de Brest et le rapport existant entre la marée du port considéré et celle de Brest. Pour chaque port on définit une unité de hauteur qui vaut le demi-marnage de la marée de syzygie d'équinoxe : Cette marée est considérée comme ayant un coefficient de 100. Pour chiffrer l'inégalité semi-annuelle et semi-mensuelle, est introduit le coefficient de marée qui exprime les variations du marnage au cours du temps, abstraction faite de la hauteur de la dénivellation. Ce coefficient varie entre 0,2 (les plus basses mers) et 1,2 (les plus hautes mers). Ce coefficient s'exprime en centièmes. Des marées de 116 et plus ne s'observent pas chaque année. Une marée moyenne a un coefficient de 70, une de vive-eau moyenne 95 et une de morte-eau moyenne 45.

VII.9 Méthode harmonique d'analyse du potentiel de marée

Primitivement, cette méthode fut développée par Kelvin et Darwin le siècle dernier. Comme l'élévation de la surface de la mer et les courants résultent de l'action de la force de marée et de la force d'inertie de coriolis à travers les équations de la dynamique, il est raisonnable de penser que l'élévation soit en rapport direct avec la force de marée ou avec son potentiel.

Dans l'océan, loin des côtes, les termes non linéaires des équations sont négligeables vis-à-vis des linéaires. Il en résulte que la variabilité temporelle de l'élévation du niveau de la mer est en relation directe avec celle du potentiel. Pour les amplitudes des

élévations et des courants le problème est plus complexe car elles dépendent de la géométrie et de la bathymétrie des bassins.

Pour analyser la variabilité temporelle, on se base sur celle du potentiel de marée.

Les trois facteurs astronomiques du potentiel de marée (VII.23) dépendent du mouvement relatif de la lune et du soleil par rapport à la terre. L'inspection de ces facteurs montre qu'ils dépendent des trois éléments suivants:

$$\begin{aligned} R &= R(t) \\ \delta &= \delta(t) \\ \cos(s(T + \lambda)) \end{aligned} \quad (\text{VII.29})$$

avec $s = 0,1,2$

Le facteur astronomique de chaque terme du potentiel (longue période, diurne et semi-diurne) est relié au temps par une relation non linéaire de sorte que la dépendance temporelle n'est ni harmonique ni même périodique.

Le potentiel de marée est développé sous la forme d'une somme de termes sinusoïdaux qui correspondront à des marées partielles:

$$C_i \cos(\sigma_i t + s \lambda + \theta_i) \quad (\text{VII.30})$$

avec $s = 0,1,2$ le numéro de l'espèce, σ_i la vitesse angulaire de la marée partielle i , θ_i sa phase et C_i le coefficient astronomique.

Comme les déclinaisons et parallaxes ont des périodes de l'ordre du mois pour la lune et de l'année pour le soleil, ces deux phénomènes produisent la modulation du facteur « horaire ». Pour cette raison, des bandes spectrales s'observeront au voisinage des fréquences correspondant à un-demi jour et à un jour.

Le temps dans toutes ces formules est le temps universel (T.U). L'origine des temps est pris conventionnellement à 0 heure, le 1er janvier de l'année 1900.

La vitesse angulaire de la marée partielle i est une combinaison linéaire de la vitesse angulaire de la terre et de certaines vitesses angulaires de référence (voir Tabl.II.2).

$$\sigma = s \omega^{(0)} + m \cdot \omega \quad (\text{VII.31})$$

où s est le numéro de l'espèce.

$m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ composantes du vecteur de modulation m ;

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5)$ composantes du vecteur oméga.

Période (par rapport au jour solaire moyen)	Description
$360^\circ / \omega_1 = 27.3216$ jours (mois tropique)	Période de la déclinaison lunaire (référence : point vernal)
$360^\circ / \omega_2 = 365.2422$ jours (année tropique)	Période de la déclinaison solaire (référence : point vernal)
$360^\circ / \omega_3 = 8.847$ années	Période du périégée lunaire
$360^\circ / \omega_4 = 18.613$ années	Période du nœud lunaire
$360^\circ / \omega_5 = 20\,940$ années	Période du périhélon

Tableau II.2 Périodes fondamentales des mouvements orbitaux de la lune et du soleil

$360^\circ / \omega_1 = 27.3216$ jours représente le mois tropical et $360^\circ / \omega_2 = 365.2422$ jours l'année tropicale.

La vitesse de rotation de la terre $\omega^{(0)}$ est prise égale à :

$$\omega^{(0,1)} = \Omega - \omega_1 \quad (\text{VII.32})$$

ou

$$\omega^{(0,s)} = \Omega - \omega_2 \quad (\text{VII.33})$$

$\omega^{(0,1)}$ est la vitesse angulaire correspondant au jour lunaire moyen, $\omega^{(0,s)}$ la vitesse angulaire correspondant au jour solaire moyen et Ω la vitesse angulaire sidérale de rotation de la terre.

Période (jour solaire moyen)	Description
$360^\circ / \Omega = 0.99727$ jours 23h 56' 4"	Jour sidéral
$360^\circ / \omega^{(0,s)} = 1.00000$ jours	Jour solaire
$360^\circ / \omega^{(0,1)} = 1.035050$ jours 24h 50' 28"	Jour lunaire

Tableau II.3 Périodes fondamentales de rotation de la terre.

Parmi toutes les combinaisons possibles entre les Ω et ω_i , ne sont conservées que les plus importantes. En océanographie, en raison d'un bruit de fond d'origine météorologique important seront exclus tous les termes dont le coefficient astronomique C_i est inférieur à 0.05. Le potentiel de marée simplifié ne contient plus que dix neuf composantes (cfr.Tab.II.4):

7 composantes à long terme

7 composantes diurnes

5 composantes semi-diurnes

Les termes (centraux) principaux sont représentés par les symboles:

$$(M_0, S_0^*), (O_1, P_1), (M_2, S_2)$$

Les indices inférieurs indiquent la périodicité approximative de la marée partielle sur un jour. Les symboles sont ceux utilisés pour identifier les marées partielles.

a) *Marées à longue période*

Les deux premières marées partielles S_0^* et M_0 sont indépendantes du temps. La troisième est associée au mouvement du nœud ascendant de l'orbite de la lune. Ssa (marée semi-annuelle solaire moyenne) est due à la déclinaison solaire. Mm est la marée mensuelle lunaire résultant de l'excentricité de l'orbite de la lune. Mf est la marée semi-mensuelle (fortnightly) lunaire associée à la variation mensuelle de la déclinaison de la lune. La réponse de l'océan à ces marées partielles est quasi-statique.

Coefficient	Vitesse angulaire	Période	Symbole
C_i	σ deg/heure	$360^\circ / \sigma$	
Marées à longue période			
0.2341	0		S_0^* (constante solaire)
0.5046	0		M_0 (constante lunaire)
0.0655	$\omega_4 = 0.00221$	18.613 années	- (nodal à M_0)
0.0729	$2\omega_2 = 0.08214$	182.621 années	Ssa (« déclinaison » solaire)
0.0825	$\omega_1 - \omega_3 = 0.54437$	27.555 jours	Mm (elliptique à M_0)
0.1564	$2\omega_1 = 1.09803$	13.661 jours	Mf (« déclinaison » lunaire)
0.0648	$2\omega_1 + \omega_4 = 1.10024$	13.633 jours	- (nodale à Mf)

Tableau II.4a Composantes à long terme du terme astronomique de marée caractérisées par $C_i > 0.05$

b) *Marées diurnes et semi-diurnes*

Les termes diurnes et semi-diurnes pourraient être décrits de la même manière que les composantes à long terme.

Coefficient	Vitesse angulaire	Période	Symbole
C_i	σ deg / heure	$360^\circ / \sigma$	
Marées Diurnes			
0.0722	$(\omega^{(0,1)} - \omega_1) - (\omega_1 - \omega_3) = 13.39866$	26.868 heures	Q_1 (elliptique à O_1)
0.0710	$(\omega^{(0,1)} - \omega_1) - \omega_4 = 13.94083$	25.823 heures	- (nodal à O_1)
0.3769	$(\omega^{(0,1)} - \omega_1) = 13.94304$	25.819 heures	O_1 (principal lunaire)
0.1755	$(\omega^{(0,s)} - \omega_2) = 14.95893$	24.066 heures	P_1 (principal solaire)
0.1682	$(\omega^{(0,s)} - \omega_2) + 2\omega_2 = \Omega = 15.04107$	23.934 jours	K_1^s (declin. à P_1)
0.3623	$(\omega^{(0,1)} - \omega_1) + 2\omega_1 = \Omega = 15.04107$	23.934 jours	K_1^l (declin. à O_1)
0.0718	$(\omega^{(0,1)} + \omega_1) + \omega_4 = 15.04328$	13.633 jours	- (nodale à K_1^l)
Marées semi-diurnes			
0.1739	$2\omega^{(0,1)} - (\omega_1 - \omega_3) = 28.43973$	12.658 heures	N_2 (elliptique à M_2)
0.9081	$2\omega^{(0,1)} = 28.98410$	12.421 heures	M_2 (principal lunaire)
0.4229	$2\omega^{(0,s)} = 30$	12 heures	S_2 (principal solaire)
0.0365	$2\omega^{(0,s)} + 2\omega_2 = 2\Omega = 30.08214$	11.967 heures	K_1^s (declin. à S_2)
0.0786	$2\omega^{(0,1)} + 2\omega_1 = 2\Omega = 30.08214$	11.967 heures	K_1^l (declin. à M_2)

Tableau II.4b Composantes diurnes et semi- diurnes du terme astronomique de marée caractérisées par $C_i > 0.05$

Il n'existe pas de termes M_1 et S_1 correspondant à M_2 et S_2 . L'explication est donnée dans des cours plus avancés. Comme K_1^s et K_1^l ont exactement la même période (un jour sidéral), ces deux termes sont regroupés pour former la marée partielle K_1 (appelée marée diurne luni-solaire). De la même façon, K_2^s et K_2^l sont couplés pour donner la marée semi diurne luni-solaire.

Les enregistrements des niveaux de la surface et des courants contiennent un bruit de fond résultant de facteurs étrangers aux marées (perturbations du niveau de la mer dues aux conditions météorologiques). Il faut donc admettre un bruit de fond dans le spectre de marées.

L'analyse des enregistrements de marée doit normalement s'effectuer sur des séries temporelles supérieures à 19 ans pour résoudre la faible bande latérale correspondant à la bande nodale lunaire.

Lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir des mesures sur une période aussi longue, on choisit un intervalle d'un an comme longueur standard. Celle-ci est suffisante pour en extraire les principales composantes diurnes et semi-diurnes. Néanmoins, pour mettre en évidence les composantes nodales lunaires, on peut introduire le facteur de modulation complexe v_k dont l'amplitude est f_k et sa phase μ_k .

$$\sum_i f_i C_i \cos(\sigma_i t + s\lambda + \theta_i + \mu_i) \quad (\text{VII.34})$$

ou

$$\sum_i f_i C_i \cos(V_i + \mu_i) \quad (\text{II.35})$$

avec $V_i = \sigma_i t + s\lambda + \theta_i$

La somme exclut maintenant les termes nodaux qui sont implicitement pris en compte par les f_i et μ_i . Ceux-ci sont généralement donnés dans les tables de marée.

L'introduction des facteurs de modulation réduit le nombre de marées partielles 19 à 15. De manière récapitulative le Tabl.VII.5 indique l'origine des différentes marées partielles. Si sont exclus les termes constants (M_0 et S_0) et combinés les K_2 et K_1 , il ne reste plus que onze constituants importants.

	Lunaire	Lunaire	Lunaire	Solaire	Solaire
Espèce	Principale	Elliptique	Déclina.	Principale	Déclina.
0	M_0	Mm	Mf	S_0	Ssa
1	O_1	Q_1	K_1^1	P_1	K_1^s
2	M_2	N_2	K_2^1	S_2	K_2^s

Tableau II.5 Principaux termes du potentiel de marée

VII.10 Analyse harmonique de la marée selon Doodson

Le potentiel de marée étant exprimé en fonction de la déclinaison et de l'angle horaire de la lune et du soleil, cela permet en principe de calculer le potentiel de marée une fois ces grandeurs connues. En pratique, on préfère utiliser d'autres variables astronomiques (Fig.VII.9) qui sont elles-mêmes des fonctions implicites du temps :

- s longitude moyenne de la lune,
- h longitude moyenne du soleil,
- p longitude du périégée lunaire,
- $N' = -N$ négatif de la longitude du nœud ascendant de la lune N ,
- $p' = p_s$ longitude du périhélieon,

Toutes ces longitudes sont calculées à partir du point vernal d'équinoxe γ .

Doodson choisit ces variables, plus le temps lunaire τ pour ré-écrire le potentiel de marée. Le résultat de ses calculs donne des termes dont l'argument temporel d'origine astronomique est le suivant;

Les valeurs numériques des fréquences angulaires, exprimées en degrés par jour solaire moyen, sont données ci-dessous :

Vitesses angulaires	
ω_τ	360°- 12.19074939 deg./jour
ω_S	13.17639673 deg./jour
ω_h	0.98564734 deg./jour
ω_p	0.11140408 deg./jour
ω_N	0.05295392 deg./jour
ω_{P_1}	0.00004707 deg./jour

Tableau VII.6 Vitesses angulaires utilisées dans le développement de Doodson.

La table des nombres de Doodson pour les principales composantes de la marée astronomique sont donnés dans des cours plus avancés.

Se basant sur l'analyse harmonique du potentiel de marée, l'élévation de la surface libre s'exprime par le développement en série suivant :

$$z(t) = \sum_{k=1} |a_k| \cos(\sigma_k t + \alpha_k) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_k a_k e^{i\sigma_k t} \right\} \quad (\text{VII.38})$$

Les amplitudes complexes a_k sont déduites de l'analyse du signal de marée aux différents points de mesure. α_k représente la phase de la marée i au point x,y considéré et $|a_k|$ son amplitude. Cette phase n'est pas un invariant car elle dépend du choix de l'origine des temps (cfr. §VII.12).

VII.11 Analyse du signal de marée dans les mers littorales

Le potentiel de marée se décompose en une série théoriquement illimitée de termes sinusoïdaux. Chacune des fréquences fondamentales se retrouve dans l'analyse harmonique des courbes de marée: composantes lunaires et solaires à longue période, diurne et semi-diurne.

Dans les mers littorales, il est nécessaire d'introduire en plus des fréquences fondamentales associées au forçage astronomique des fréquences multiples et composées de celles-ci. L'observation des résultats d'analyses réalisées sur des enregistrements faits à la côte permet de constater que ces composantes atteignent parfois 10 à 20 % de l'amplitude des composantes astronomiques.

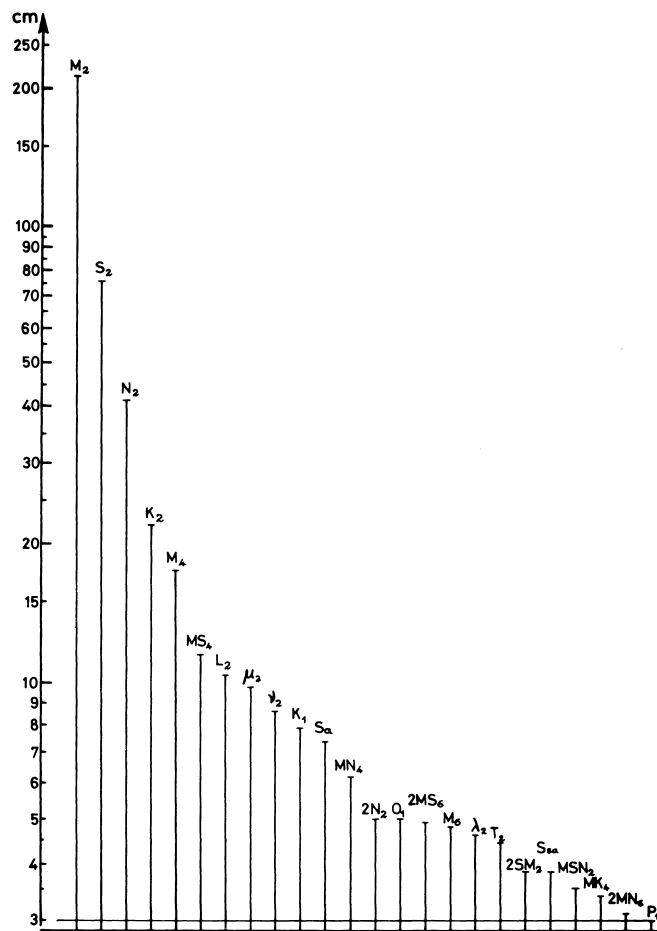


Figure VII.10 Valeurs moyennes des amplitudes des principales marées partielles dans la Manche. (Extrait de Le Provost, 1976)

La génération de composantes non-astronomiques de marée est liée à la déformation des ondes durant leur propagation dans les zones littorales peu profondes. Il en est de même dans les fleuves dans leur partie maritime. Il résulte de différentes études que les harmoniques des marées fondamentales et des marées mixtes sont engendrées par les termes d'advection et par les termes de frottement sur le fond. Le tableau ci-dessus présente les principales composantes non linéaires de la marée lorsque seules interviennent les marées astronomiques $M_2(\omega_1)$, $S_2(\omega_2)$, $N_2(\omega_3)$.

Termes d'accélération spatiales	Terme de friction
Niveau moyen	$M_6(3\omega_1)$
$M_4(2\omega_1)$	$M_{10}(5\omega_1)$
$MS_0(\omega_2 - \omega_1)$ Mélangé avec MS_f	$2MS_2(2\omega_1 - \omega_2)$ Mélangé avec μ_2
$MS_4(\omega_1 + \omega_2)$	$2MS_6(2\omega_1 + \omega_2)$ $4MS_6(4\omega_1 - \omega_2)$
$MN_0(\omega_3 - \omega_1)$ Mélangé avec Mm	$2MN_2(2\omega_1 - \omega_3)$ Mélangé avec L_2
$MN_4(\omega_1 + \omega_3)$	$2MN_6(2\omega_1 + \omega_3)$
Niveau moyen	Amortissement de M_2
$S_4(2\omega_2)$	$S_6(3\omega_2)$, $S_{10}(5\omega_2)$, $2SM_2$, $2SM_6(2\omega_2 \pm \omega_1)$ $3M_2S_2(3\omega_1 - 2\omega_2)$
$SN_0(\omega_2 - \omega_3)$	$MSN_2(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)$
$SN_4(\omega_2 + \omega_3)$	$MNS_2(\omega_1 + \omega_3 - \omega_2)$

Tableau II.7 Fréquences angulaires des principales composantes non linéaires de marée en Manche.

VII.12 Utilisation des tables de marée

Différents organismes internationaux fournissent les informations nécessaires (e.g. tableau VII.8) à la prévision des marées pour les principaux ports du monde.

L'élévation de la surface libre est donnée par:

$$\zeta(t) = z_0 + \sum_{k=1} z_k = \sum_{k=0} |a_k| \cos(\sigma_k t + \alpha_k) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0} a_k e^{i\sigma_k t} \right\} \quad (\text{VII.39})$$

Les phases des amplitudes complexes n'étant pas des invariants puisqu'elles dépendent du choix de l'origine des temps, elles peuvent néanmoins être définies de « manière unique » par l'introduction du retard de phase de Greenwich g_k .

Il est nécessaire de rappeler les différentes définitions du temps.

- Le temps solaire vrai est défini par l'angle horaire c'est-à-dire par l'angle formé par le plan méridien passant par le centre du soleil et le plan méridien du lieu. Par définition, il est midi lorsque $H=0$. Ce temps solaire vrai est le même pour tous les points situés d'un même méridien.
- En raison de la variabilité séculaire et périodique du jour solaire vrai on a défini le temps solaire moyen, (encore appelé temps solaire local). La durée d'un jour solaire moyen, divisée en 86 040 secondes, est celle du 1^{er} janvier 1900.
- Le temps civil n'est que le temps solaire moyen mais avec une origine à minuit.
- Le temps universel (T.U) est le temps civil (moyen) du méridien de Greenwich.
- Enfin, le temps légal est défini pour chaque pays ou région. L'heure légale est liée au T.U par une différence fixe, généralement exprimée en heures entières afin d'éviter que l'heure (temps solaire moyen) d'un lieu ne diffère pas trop de l'heure officielle de ce lieu. Ce temps (clock time) pour une zone $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, est le temps solaire (moyen) pour les méridiens de longitude $(0, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \dots)$

où $v_k = f_k \cdot e^{i\mu_k}$ est le facteur complexe de modulation nodale, $H_k = |H_k| \cdot e^{-ig_k}$ l'amplitude complexe vraie du constituant k et $V_k(t_0)$ la valeur de l'argument astronomique du constituant i à Greenwich au moment du temps local t_0 ou en autres termes, la longitude de l'astre calculée par rapport au méridien de Greenwich en $t = t_0$. La phase de l'amplitude complexe H_k , soit g_k , porte le nom de retard de phase de Greenwich (déphasage de l'onde de marée - pleine mer - par rapport à la culmination de l'astre fictif générateur de l'onde k à Greenwich).

Tenant compte des expressions ci-dessus, la phase α_k se met sous une forme :

$$g_k = V_k(t_0) + \mu_k(t_0) - \alpha_k \quad (\text{VII.41})$$

La substitution de (VII.40 et 41) dans (VII.38) donne :

$$\xi(t) = z_0 + \sum_k f_k H_k \cos(\sigma_k t + (V_k(t_0) + \mu_k(t_0)) - g_k) \quad (\text{VII.42})$$

où z_0 le niveau moyen du point considéré,
 t le temps légal du lieu
 H_k l'amplitude vraie de la marée partielle k ,
 g_k le déphasage de cette marée partielle k en relation avec le passage de l'astre fictif générateur de cette marée partielle à Greenwich,
 f_k et μ_k les corrections nodales pour l'année considérée,
 $V_k(t_0)$ l'argument astronomique du constituant k c'est-à-dire la longitude de l'astre calculée par rapport au méridien de Greenwich, en $t=0$.

Dans le passé on utilisait la phase kappa qui représentait le retard de phase entre la pleine mer et la culmination de l'astre perturbateur au point considéré. La relation entre les phases K_k et g_k est donnée (Fig.VII.11) par :

$$g_k = K_k + pL - \sigma_k S_0 \quad (\text{VII.43})$$

- où p représente l'indice de la composante,
 L longitude du port exprimée en degrés ouest de Greenwich,
 S_0 longitude du méridien du fuseau exprimée en heures et comptée positivement à l'ouest de Greenwich,
 σ_k vitesse angulaire du constituant k exprimée en degrés/heure solaire moyenne.

Sur la figure ci-dessous sont représentés fictivement les éléments qui entrent en compte pour exprimer l'élévation de la surface libre z_k de la marée partielle k de vitesse angulaire σ_k .

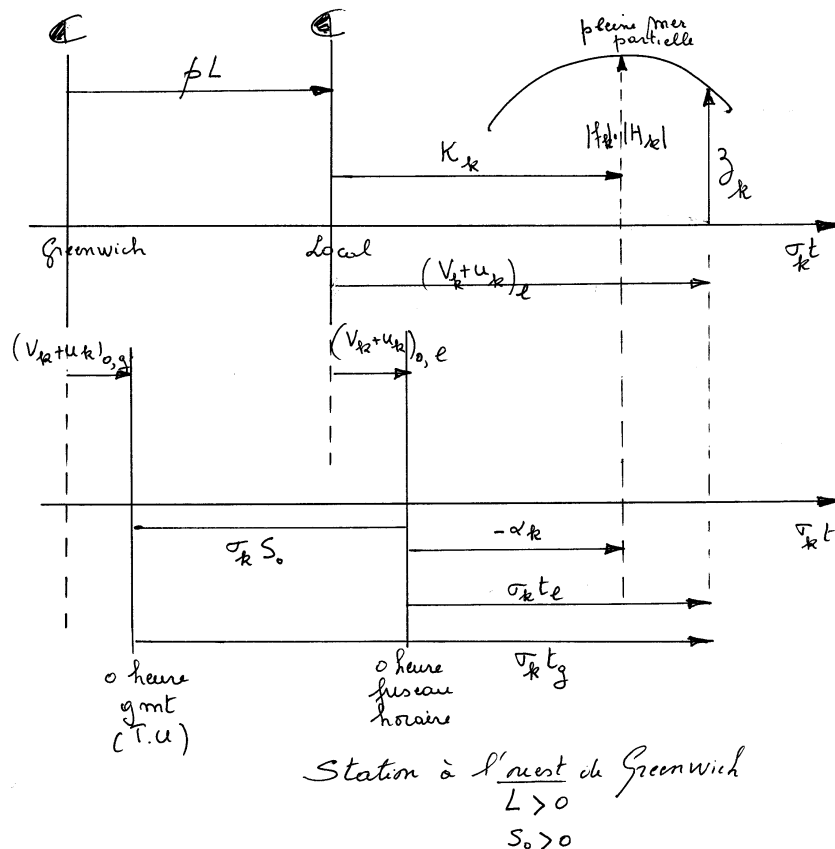


Figure VII.11 Relations entre les phases et les arguments astronomiques.

Sur la figure sont tracés les différents éléments en supposant que la station était à l'ouest de Greenwich. Dans ce cas, L et S sont des grandeurs positives.

$V_k(t_{\text{local}}, \text{local}) = (V_k)_{\text{local}}$ Valeur de l'argument astronomique au méridien local
à l'instant t_{local}

$V_k(t_0, \text{local}) = (V_k)_{0, \text{local}}$ Valeur de l'argument astronomique au méridien local
à $t_{\text{local}} = t_0 = 0$

$V_k(t_0, g) = (V_k)_{0, g}$ Valeur de l'argument astronomique au méridien de
Greenwich à l'instant initial $t_{\text{Greenwich}} = t_0 = 0$

VII.13 Le problème de la prévision des tempêtes:une première approche

Les perturbations atmosphériques, principalement les dépressions, produisent des gradients de pression atmosphérique et des champs de vent qui induisent des contraintes de cisaillement à l'interface air-mer.

Dans le cadre de l'approximation quasi-statique, valable pour des tempêtes (temps caractéristique de l'ordre du jour), la pression à l'intérieur du fluide est donnée (cfr. Chapitre IV) par :

$$p(z) = p_{\text{am}} + (\zeta - z) \rho_{\text{réf}} g + \int_z^{\zeta} \sigma g dz \quad (\text{IV.14})$$

Il est intéressant d'estimer la perturbation du niveau d'eau en supposant qu'il est associé à un champ de pression atmosphérique stationnaire. L'équation (IV.16) des composantes horizontales de la vitesse se réduit à :

$$\nabla p = 0 \quad (\text{VII.44})$$

Le perturbation du niveau de l'interface air-mer est la suivante :

$$\zeta_{\text{équilibre}} - \zeta_{\text{réf}} = \frac{1}{\rho g} (p_{\text{réf}} - p) \quad (\text{VII.45})$$

où $p_{\text{réf}}$ est une pression de référence égale en première approximation à la pression atmosphérique standard $p_{\text{réf}} = 1013 \text{ HPa}$. Le passage d'une dépression produit statiquement une augmentation de niveau. Ainsi, une chute de 10 Hpa induit statiquement une augmentation du niveau de la mer de 0.10 m. En réalité le problème du passage d'une dépression est plus complexe en raison des termes d'inertie.

Le chapitre V enseigne qu'une contrainte de vent conduit à la création d'un courant. La détermination de l'impact de cette contrainte vent sur les courants et les niveaux d'eau requiert la résolution des équations de la mécanique des fluides. Le problème se complique en raison du couplage non linéaire entre les phénomènes météorologiques et les marées.

$$\zeta = \zeta_{\text{marées}} + \zeta_{\text{tempêtes}} + \zeta_{\text{interaction marées - tempêtes}} \quad (\text{VII.46})$$

Conventionnellement, on définit une onde de tempête par $S(t)$:

$$S(t) = \zeta(t) - \zeta_p(t) \quad (\text{VII.47})$$

où $\zeta(t)$ est le niveau de la surface (interface air-mer) et $\zeta_p(t) = \zeta_{\text{marées}}$ le niveau de la surface obtenu par une prévision de marée. $\zeta(t)$ et $\zeta_p(t)$ sont exprimés par rapport au niveau correspondant au repos. La Fig.VII.12 présente le champ des perturbations des niveaux d'eau (par rapport aux niveaux de marée prévus) à l'occasion du passage de la forte dépression atmosphérique (31 janvier - 1^{er} février 1953), responsable des terribles inondations en Hollande et en Belgique.

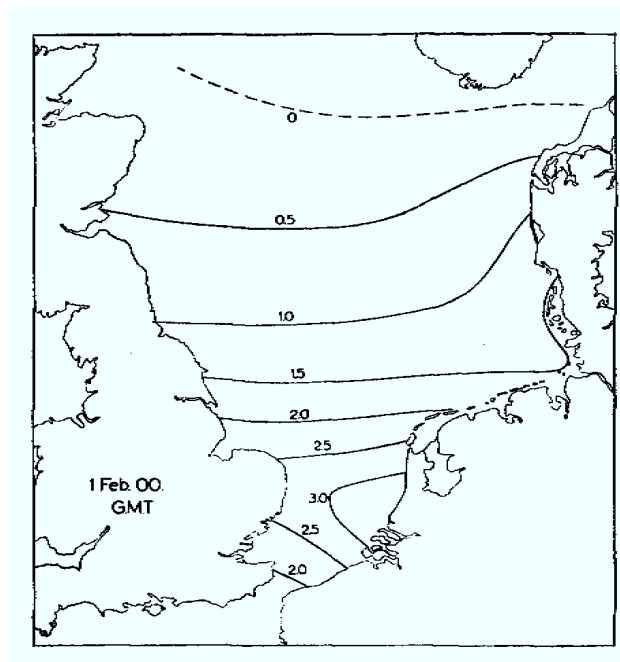


Figure VII.12 Perturbations des niveaux d'eau lors du passage d'une forte dépression atmosphérique en Mer du Nord le 31 janvier 1953.

Cette définition suppose que la marée et la tempête soient deux phénomènes indépendants l'un de l'autre. Bien que les forces génératrices de ces phénomènes soient indépendantes, les marées et les tempêtes se propagent dans un même milieu. Comme les équations de la mécanique des fluides sont non-linéaires, il en résultera un couplage entre les deux phénomènes.

Les besoins de la navigation et la protection des côtes exigent de bonnes prévisions. Dans ce chapitre nous n'envisagerons que les méthodes "empiriques". Une des premières formules utilisées par les ingénieurs se base sur des lois du type:

$$S(t) = \mu B(t - \tau_B) + \sum_i \lambda_i (W(t - \tau_w))^n \quad (\text{VII.48})$$

où B représente la déviation de la pression atmosphérique par rapport à une valeur de référence et W la vitesse du vent. n est un exposant devant être ajusté en fonction des observations. Cette formule postule que la hauteur du niveau de la surface de la mer au

temps t est une fonction de la pression atmosphérique existant à cet endroit au temps $(t - \tau_B)$ et de la vitesse du vent existant dans une région i au temps $(t - \tau_w)$.

Cette formule fut utilisée avec un certain succès en mer du Nord avant l'avènement des modèles hydrodynamiques. Le succès de cette méthode découle d'une très bonne connaissance des marées et des tempêtes. Malheureusement, les séries temporelles sont souvent trop courtes pour calibrer correctement des formules du type de (VII.48).

En génie maritime, on s'intéresse aux marées les plus hautes pour dimensionner les digues; en navigation par contre, c'est le problème des marées tempêtes négatives. Sur celles-ci on ne possède que peu de données.