

TD d'Optique II Série n°1 Filière SMP3

Exercice 1 : Onde plane et onde sphérique

1) Vérifier qu'une onde progressive $f(x - vt)$ est une solution de l'équation de propagation à une dimension $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$. En déduire que l'onde harmonique plane

$\psi(r, t) = A \sin(kx - \omega t)$ est une solution de cette l'équation.

2) Soit $\psi(r, t) = \frac{f(r-vt)}{r}$, où f est une fonction arbitraire deux fois dérivable. Montrer que ψ est une solution de l'équation d'onde à trois dimensions qui correspond à un ébranlement sphérique se propageant à la célérité v .

Exercice 2 : Onde électromagnétique plane

Soit une onde électromagnétique plane harmonique placée dans le vide dont le champ \vec{E} est donné par

$$\begin{cases} E_x(z, t) = 10^2 \sin \pi(3 \cdot 10^6 z - 9 \cdot 10^{14} t) \\ E_y(z, t) = E_z(z, t) = 0 \end{cases}$$



- 1) Donner l'amplitude de cette onde, sa direction de propagation et sa polarisation.
- 2) Déterminer sa célérité, sa longueur d'onde, sa fréquence. De quelle lumière s'agit-il ?
- 3) Ecrivez l'expression du champ magnétique \vec{B} associé à cette onde et faites un schéma de propagation en indiquant les fronts d'onde.

Exercice 3 : Superposition de deux ondes

Soient deux vibrations parallèles de même amplitude réelle a et de même pulsation ω :

$$\psi_1 = a \cos(\omega t), \quad \psi_2 = a \cos(\omega t + \varphi)$$

- 1) Montrer que la vibration résultante de la superposition de deux ondes $\psi = \psi_1 + \psi_2$ peut s'écrire sous la forme $\psi = A \cos(\omega t + \alpha)$. Déterminer A et α . Retrouver ce résultat en utilisant la représentation complexe.

2) Sachant que l'intensité est proportionnelle à l'amplitude au carré. Donner l'intensité résultante dans les cas suivants les deux vibrations sont a) en phase, b) en opposition de phase, c) en quadrature de phase

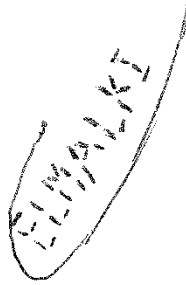
Exercice 4 : Intensité d'une onde électromagnétique

Une onde électromagnétique dans le vide est décrite par $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(kx - \omega t)$.

1) Montrer que la valeur moyenne de la fonction $f(t) = \cos^2(\omega t - kx)$ (fonction variable dans le temps) sur une durée τ très grande devant la période $T = 2\pi/\omega$ de cette fonction (c.à.d $\tau \gg T$) égale à $1/2$.

2) En déduire que l'intensité de l'onde électromagnétique s'écrit $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2$, où c et ε_0 sont la célérité dans le vide et la permittivité du vide, respectivement.



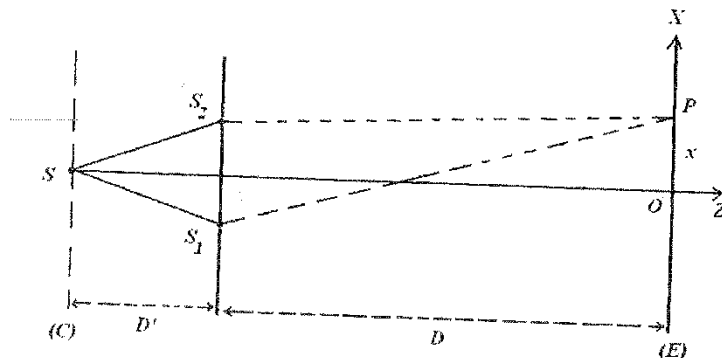


TD d'Optique 2, SMP 3

Série n°2

Exercice 1 : Dispositif des fentes de Young

Soit un dispositif interférentiel (type fentes de Young) de sources secondaires S_1 et S_2 distantes de a , éclairées par une source primaire ponctuelle monochromatique S de longueur d'onde λ .

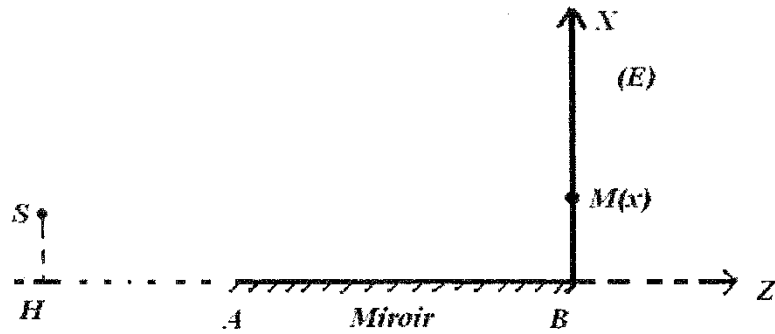


- 1) Déterminer l'ordre d'interférence et l'intensité en un point P du plan d'observation (E).
- 2) Décrire la figure d'interférence observée. Déterminer la position x_0 de la frange centrale ainsi que l'interfrange i .
- 3) On interpose une lame de verre d'épaisseur e et d'indice n devant S_1 . Déterminer le déplacement de la frange centrale du système de franges d'interférence, et préciser le sens de ce déplacement.

Exercice 2 : Miroir de Lloyd

Un miroir plan de largeur $AB = l = 20\text{cm}$, est placé perpendiculairement à un écran E; celui-ci est en contact avec le bord B du miroir à droite. On éclaire le miroir par une source S monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0.60 \mu$, parallèle au miroir, située à une faible distance $HS = h/2 = 1.5 \text{ mm}$ du plan du miroir et à une distance $D = HB = 70 \text{ cm}$ de l'écran.

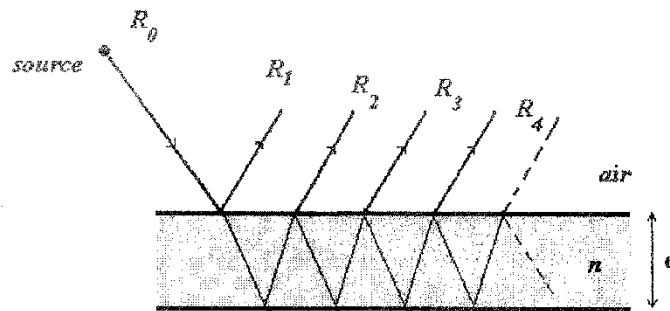
- 1) Préciser sur le schéma le champ d'interférence.
- 2) Ecrire la loi $I(x)$ donnant l'intensité lumineuse sur (E) en un point $M(x)$ du champ d'interférence ($BM = x$).
- 3) Déterminer l'étendu de la zone d'interférence sur (E). En déduire combien de franges brillantes sont visibles sur l'écran.



Exercice 3 : Irisation d'une lame d'eau

On considère une lame d'eau dans l'air. L'épaisseur de la lame est notée e et son indice $n = 1.3$. Le soleil éclaire la lame en incidence normale (voir le schéma ci-dessous). Soient r et t , respectivement, les coefficients de réflexion et de transmission à l'interface entre l'air et l'eau.

- 1) Montrer que les rayons réfléchis R_3, R_4, \dots ont des intensités négligeables devant celles de R_1 et R_2 .
- 2) Déterminer la différence de marche entre R_1 et R_2 . Donner l'expression de l'intensité en un point M de l'espace.
- 3) A quelle condition la lame apparaît-elle colorée ?



Exercice 4 : Interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson (voir Figure ci-dessous) est constitué de deux miroirs M_1 (fixe) et M_2 (mobile) de même taille et d'une lame semi-réfléchissante G (inclivée de 45°) permettant de diviser le faisceau incident en deux faisceaux R_1 et R_2 . La source S est monochromatique de longueur λ .

- A) Initialement M_2 est perpendiculaire à M_1 . Le miroir virtuel M'_1 (image de M_1 par rapport à G) et le miroir M_2 forment une lame d'air à faces parallèles d'épaisseur $e_0 = d_2 - d_1$. Cette lame d'air donne naissance à des anneaux d'interférences d'égale inclinaison i . la lame G ne contribue par aucune différence de marche supplémentaire. L'angle d'incidence i est faible.

Le plan d'observation est placé au foyer image d'une lentille L de distance focale f_i . On donne $d_1=12.5$ cm, $d_2=12.62$ cm, $\lambda=0.6$ μm , $f_i=1.5$ m

1) Donner la différence de marche $\delta(e_0, i)$ entre R_1 et R_2 . En déduire l'ordre d'interférence $p(x)$ en tout point $M(x)$ de (E) .

2) Déterminer le rayon x_k du $k^{\text{ième}}$ anneau brillant en fonction de e , λ , f_i et de $k = (p_0 - p(x))$. Montrer que lorsque k devient grand les anneaux se resserrent.

B) L'onde incidente à une amplitude a . La lame G est caractérisée par ses coefficients de réflexion r et de transmission t . Les miroirs M_1 et M_2 permettent la réflexion totale.

3) Sans refaire la figure et en négligeant les réflexions multiples au niveau de lame G , calculer les amplitudes réelles a_1 et a_2 . En déduire l'intensité I des franges résultant de la superposition de R_1 et R_2 .

4) Donner l'intensité maximale I_{Max} en fonction de $R = |r|^2$ (pouvoir de réflexion de G).

5) Pour former un coin d'air, on fait tourner autour de son extrémité le miroir M_2 d'un angle α . Préciser la surface de localisation des franges et déterminer l'interfrange i .

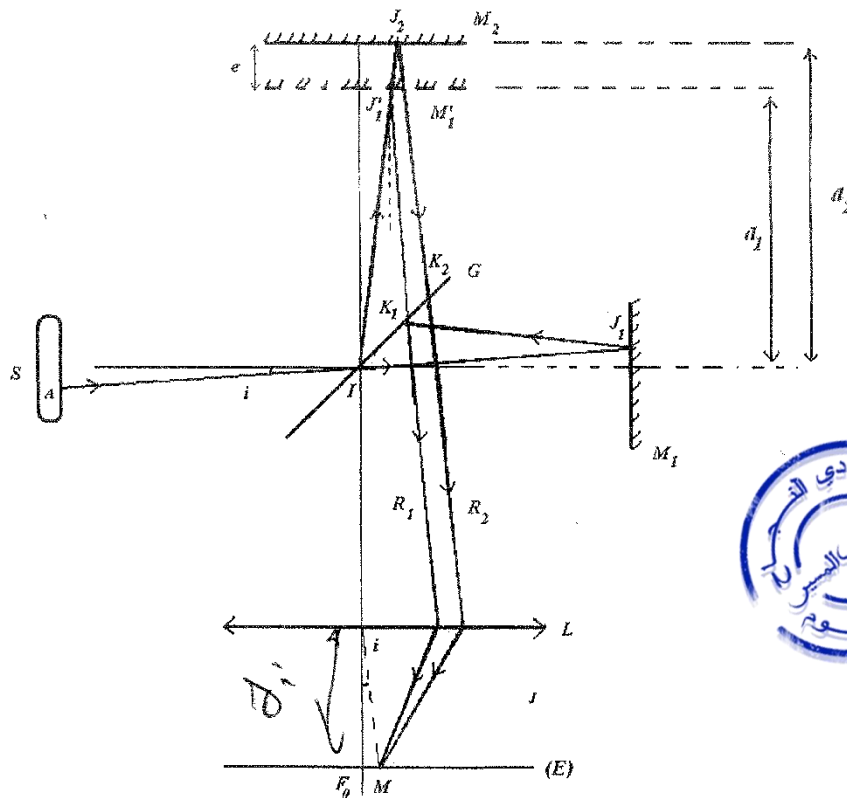


Schéma : interféromètre de Michelson

Exercice 1 : Diffraction par des fentes rectangulaires

On éclaire une fente F par une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 546 \text{ nm}$ en incidence normale. La longueur de la fente est supposée très grande par rapport à sa largeur $a=0.25 \text{ mm}$. Une lentille convergente L de distance focale $F = 1\text{m}$, de même axe que L, permet d'observer dans son plan focal image la figure de diffraction à l'infini produite par la fente F. L'écran E est placé dans ce plan focal (voir schéma ci-dessous).

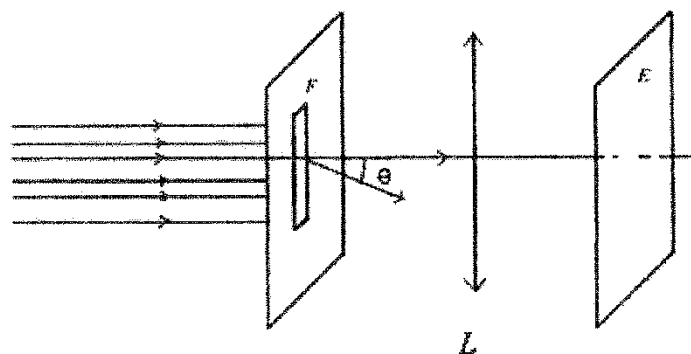
1) Démontrer que, dans une direction du plan horizontal faisant avec l'axe optique un petit angle θ , l'amplitude de la vibration résultante est

$$A(\theta) = A_0 \cdot \frac{\sin \frac{\pi \cdot a \theta}{\lambda}}{\frac{\pi \cdot a \theta}{\lambda}}$$

A_0 étant l'amplitude

résultante pour $\theta=0$. Quelle est dans ce cas la largeur de la fente centrale ? Calculer la distance séparant deux franges noires consécutives.

2) On enlève la fente F et on met à sa place, perpendiculairement à l'axe optique, un écran portant deux fentes parallèles identiques de largeur 0.25 mm dont leurs centres sont distants de 1 mm . Quelle est l'amplitude A' de la vibration résultante dans une direction inclinée d'un petit angle θ par rapport à l'axe, dans un plan horizontal ? Tracer la courbe représentant les variations de l'intensité lumineuse en fonction de θ . Calculer l'interfrange des franges d'interférence.



3) On éclaire maintenant de la même façon un réseau plan, constitué de N fentes identiques, parallèles de largeur a , et dont les centres sont équidistants de l .

a) déterminer la distribution de l'amplitude totale résultante de N fentes, au point M dans la direction θ .

b) En déduire la distribution de l'intensité totale résultante au point M . Que devient cette expression dans le cas d'un réseau parfait à N fentes infiniment fines ? Tracer le graphe de l'intensité correspondante en fonction de x .

Exercice 2 : Tache d'Airy

On réalise une photo d'un objet ponctuel très éloigné (une étoile par exemple). L'objectif a pour distance focal $f = 50$ mm et pour diamètre $D = 2.3$ mm. A cause du phénomène de diffraction, l'image recueillie sur le film n'est pas ponctuelle, mais apparaît sous la forme d'une tache circulaire.

Déterminer la dimension de cette tache (la tache d'Airy). On prendra $\lambda = 600$ nm.

Exercice 3 : Diffraction d'un réseau plan

Une lumière monochromatique «émise par un laser à Hélium-néon ($\lambda = 6328 \text{ \AA}$) tombe sous incidence normale sur un réseau de diffraction contenant 6000 traits /cm. Déterminer les angles où on observe le maximum de premier ordre, le maximum de deuxième ordre, et ainsi de suite.



EMPIRE

Exercice 1

1°) Soit une onde progressive $f(x-vt) = \psi(x,t)$ où f est une fonction 2 fois dérivable

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{ou } u = x - vt, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -v$$

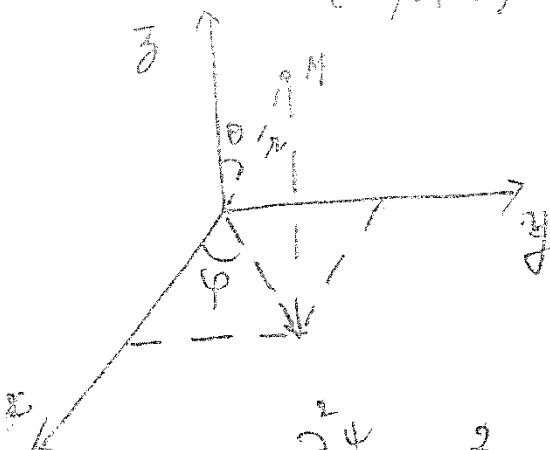
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \quad \text{de m.} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (-v) \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

Donc $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Rightarrow f(x-vt)$ vérifie l'équation d'onde à une dimension d'onde harmonique $\psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$ vérifie l'équation d'onde.

ou $\psi = A \sin\left[k\left(x - \frac{\omega}{v}t\right)\right] = f(x-vt)$ avec $f(x) = A \sin kx$ et $v = \frac{\omega}{k}$

2°) l'équation d'onde s'écrit de manière générale $\Delta \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

Donc le syst de coord. sphériques (r, θ, φ)



Si ψ possède une symétrie radiale on a $\psi = \psi(r,t)$. Donc $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$

Donc $\frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ peut s'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi)$$

l'équation d'onde s'écrit alors $\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial t^2}$. Une

solution générale de cette équation s'écrit sous la forme $f(x-vt)$

Donc $r\psi = f(r-vt)$, c.à.d $\psi(r) = \frac{f(r-vt)}{r}$, où f est 1

fois dérivable.



Exercice 2

Soit l'onde plane électromagnétique :

$$\begin{cases} E_x(z,t) = 10 \sin \pi (3 \cdot 10^6 z - 9 \cdot 10^{14} t) \\ E_y = E_z = 0 \end{cases}$$

On a : $E_x(z,t) = E_0 \sin(kz - \omega t)$ ou encore $E_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

l'amplitude $E_0 = 10^2 \text{ V/m}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $v = \frac{\omega}{k}$

La direction de propagation correspond à la direction du vecteur d'onde \vec{k}

Cette onde se propage dans la direction de l'axe OZ car $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La direction de polarisation est l'axe Ox puisque $E_y = E_z = 0$

2) la célérité (ou vitesse) de cette onde $v = \frac{\omega}{k} = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

la longueur d'onde λ , $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0,66 \mu\text{m}$

$\nu = \frac{c}{\lambda} = 4,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ c'est une lumière rouge.



3) On utilise les équations de Maxwell. On a $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ avec $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$

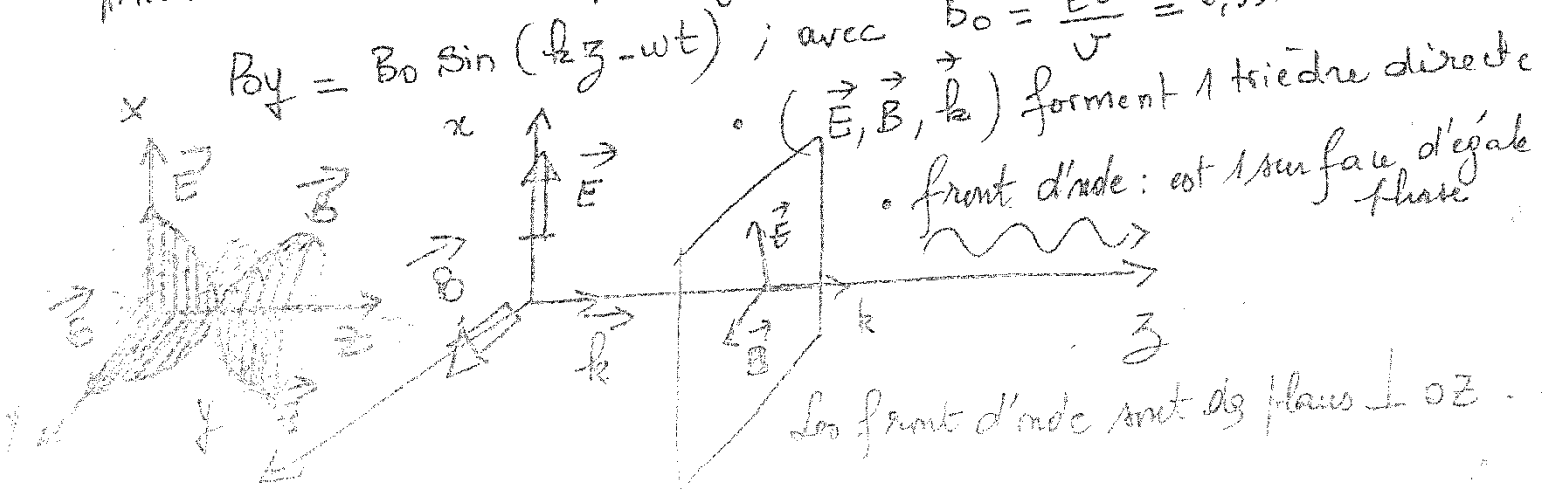
$$\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \Rightarrow B_x = \text{cste}$ ne correspond pas à l'onde progressive

$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = -k E_0 \omega \sin(kz - \omega t) \Rightarrow B_y = \frac{k}{\omega} E_0 \sin(kz - \omega t)$
 $B_y = \frac{E_x}{v}$

$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \Rightarrow B_z = \text{cste}$ ne correspond pas à l'onde progressive.

Finalement on a $B_y = \frac{E_x}{v}$ B est polarisé selon OY .



Exercice 3 :

Soient 2 vibrations d'amplitude réelle a , de pulsation ω et déphasées de φ .

$$\psi_1 = a \cos(\omega t), \quad \psi_2 = a \cos(\omega t + \varphi)$$

La vibration résultante $\psi = \psi_1 + \psi_2$ s'écrira sous la forme : $\psi = A \cos(\omega t + \phi)$

i) en utilisant la méthode trigonométrique :

$$\psi = a (\cos \omega t + \cos(\omega t + \varphi)) = a [2 \cos(\omega t + \varphi/2) \cdot \cos \varphi/2]$$

(on utilise la relation $\cos p + \cos q = 2 \cos(\frac{p+q}{2}) \cdot \cos(\frac{p-q}{2})$)

D'où $A = 2a \cos \varphi/2 \Rightarrow \psi$ est une onde harmonique de \hat{m} pulsation et d'amplitude $2a \cos \varphi/2$ et de phase $\varphi/2$.

En général pour une onde harmonique, l'intensité = la valeur moyenne du module du vecteur de Poynting $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. On montre que

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = E_0^2 \quad (\text{voir cours})$$

Dans ce cas, on a $I = 4a^2 \cos^2 \varphi/2$.



ii) en utilisant la méthode des nombres complexes : soit $\bar{\psi}_1 = a e^{j\omega t}$, $\bar{\psi}_2 = a e^{j(\omega t + \varphi)}$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 = a e^{j\omega t} (1 + e^{j\varphi}) = a e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi/2} (e^{-j\varphi/2} + e^{j\varphi/2})$$

$$\bar{\psi} = 2a \cos \varphi/2 \cdot e^{j(\omega t + \varphi/2)} = A_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi/2)}$$

Cette dernière méthode est plus simple si on a à considérer la superposition de plusieurs fonctions d'onde (voir de l'addition par un réseau par exemple)

$$I = \bar{\psi} \cdot \bar{\psi}^* = 4a^2 \cos^2 \varphi/2$$

2°) Lorsque les 2 vibrations sont en phase on a

$$\varphi = 2\pi \frac{m}{\lambda} \Rightarrow I = 4a^2 = I_{\max}$$

Lorsque les 2 vibrations sont en quadrature de phase

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = 4a^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2a^2$$

en opposition de phase $\varphi = (2m+1)\pi \Rightarrow I = 0$

Exercice 4

Soit une onde plane harmonique $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$.

Sa période temporelle est $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

1°) la valeur moyenne d'une fct $f(t)$ sur 1 durée τ : $\langle f(t) \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(t) dt$

$$\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_T^{T+\tau} \cos^2(\omega t - kx) dt$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2\tau} \left[1 + \frac{1}{2\omega} \left[\sin(\omega t - kx) \right]_{T+\tau}^{T+\tau} - \left[\sin(\omega t - kx) \right]_T \right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega\tau} \left\{ \sin(\omega(t+\tau) - kx) - \sin(\omega T - kx) \right\}$$

or $\frac{1}{4\omega\tau} \ll \frac{1}{2\pi\tau} \ll \frac{1}{2\pi}$ (car $\frac{\tau}{T} \gg 1$ par hypothèse)

De plus le terme entre parenthèses est majoré par 2. D'où $\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2}$

$I = \langle S \rangle$ S est le vecteur de Poynting $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ (dans le vide)

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0} = c\epsilon_0 E^2$$

$$I = \langle S \rangle = c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle = c\epsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

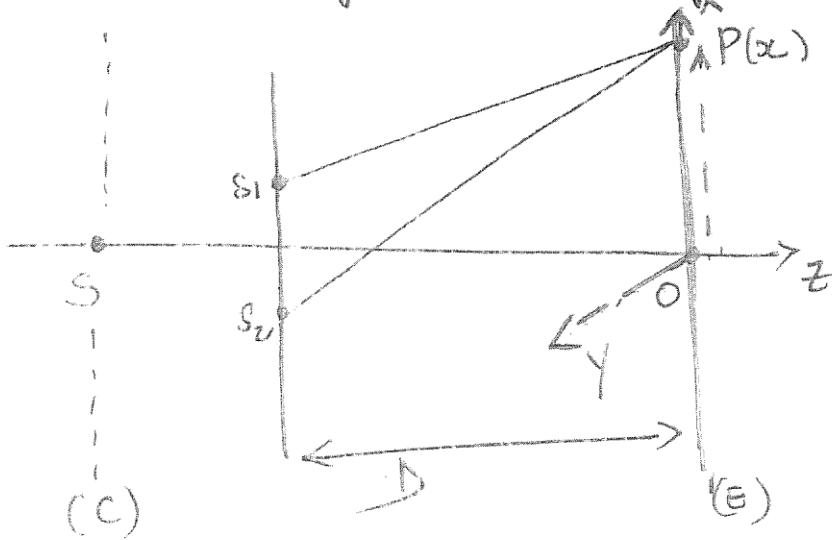


Solution de la série 2.



Ex 1

On considère le dispositif des 2 trous (ou fentes) de Young.



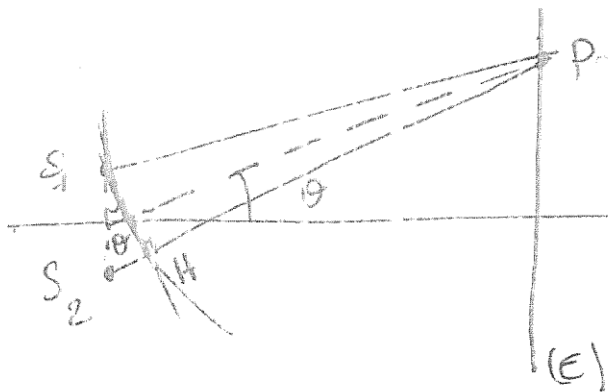
$$S_1 S_2 = a$$

on suppose que :

a et x sont très petits devant D ($a \ll D$, $x \ll D$)

la d.d.m au pt P est :

$$\delta = r_2 - r_1 = S_2 P - S_1 P$$



$$S_2 P - S_1 P \approx S_2 H \quad (\text{puisque } a \ll D, x \ll D)$$

$$\text{Or } \sin \theta = \frac{S_2 H}{a} \Rightarrow S_2 H = a \sin \theta$$

$$\text{De plus on peut écrire } \tan \theta \approx \sin \theta \approx \frac{x}{D}$$

$$\text{D'où } \delta = \frac{ax}{D}$$

1°) L'ordre d'interférence $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D}$ d'intensité $I = 2I_0 (1 + \cos \varphi)$

I_0 : intensité de S_1 et S_2 . $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = 2\pi p \Rightarrow I = 2I_0 (1 + \cos 2\pi p)$

2°) Les franges sont données par $\varphi(p) = \text{cste}$ (c'est des droites // Oxy).
(c'est $x = \text{cste}$)

Les franges brillantes correspondent à $\begin{cases} \varphi = 2m\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \text{ou} \\ \delta = m\lambda \\ \text{ou} \\ p = m \end{cases} \Rightarrow \frac{ax}{\lambda D} = m$

$$\Rightarrow x_m^b = m \frac{\lambda D}{a}$$

Les franges sombres correspondent à $x_m^s = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{a}$

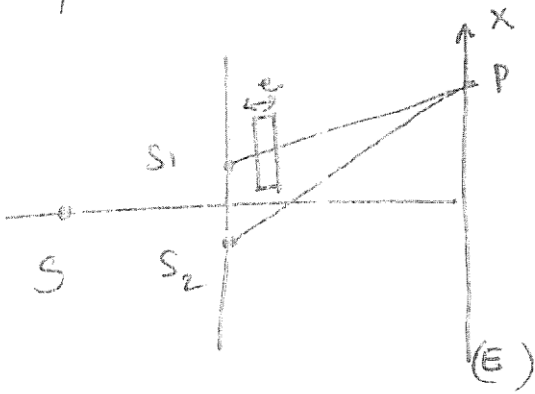
La frange centrale correspond à $\delta = 0$ (c'est 1 chemin optique $S_1 P = S_2 P$)

$\delta(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \Leftrightarrow$ la frange centrale est située en 0.

L'interfrange est la distance entre 2 franges de même nature.

$$i = x_{m+1}^b - x_m^b \quad \text{ou encore} \quad i = (\Delta x^b)_{\Delta p=1} \Rightarrow i = \frac{\lambda D}{a}$$

5) On interpose une lame de verre d'indice n devant S_1 soit e l'épaisseur de cette lame. La nouvelle d.d.m s'écrit :



$$S' = (S_2 P) - (S_1 P)$$

or $(S_1 P) = S_1 P + (n-1) \cdot e$
 (l'introduction de lame de verre entraîne une augmentation du chemin optique de $(S_1 P)$ de $(n-1)e$ (voir optique géométrique S_2))

D'où $S' = (x_2 - x_1) - (n-1)e = \frac{ax}{D} - (n-1)e \Rightarrow p' = \frac{ax}{D} - \frac{(n-1)e}{\lambda}$

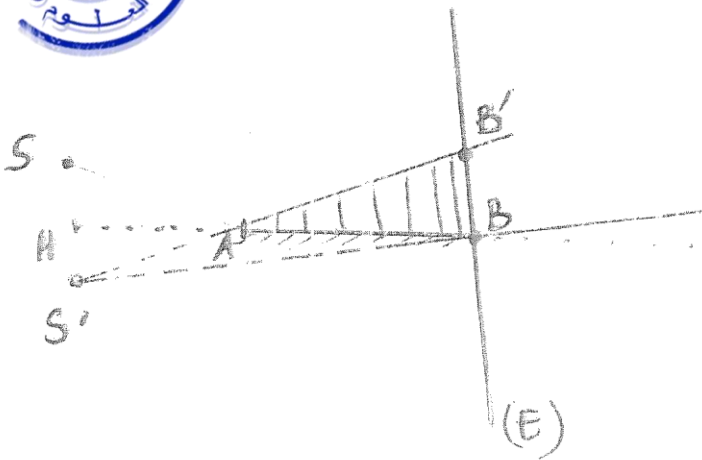
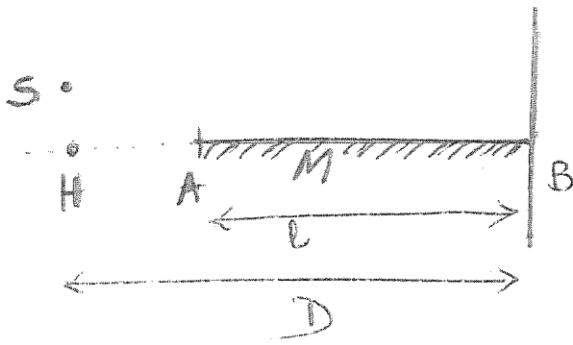
La frange centrale changera de position : $p'(x_c') = 0 \Rightarrow x_c' = \frac{(n-1)eD}{a}$
 \Rightarrow déplacement vers le haut. (dans la partie de l'espace où on place la lame)

\Rightarrow la frange centrale se déplace du côté où il y a la lame.



Ex 2

Soit le dispositif du miroir de Lloyd suivant :



1°) Le dispositif permet d'obtenir des interférences entre les rayons provenant directement de S et ceux provenant de la réflexion de S sur le miroir M. Le système est équivalent au dispositif de Young avec les 2 sources S et S' : image de S par rapport au miroir M. La zone d'interférence = zone hachurée c'est la zone où il y a rencontre entre les rayons de S et de S'. L'étendue de la figure d'interférence sur l'écran (E) est BB'.

Puisque le dispositif est équivalent à celui de Young, la figure d'interférence sera constituée de franges : des droites parallèles \perp au plan de la figure.

2°) On a $SH = \frac{h}{2} \Rightarrow SS' = h = a$ d d m en point M de l'écran situé à la distance x de B s'écrit $S = S_g + S_{opt}$ où S_g : diff. de marche géométrique

$S_g = \frac{ax}{D}$ (voir le cours), $S_{op} = \frac{\lambda}{2}$ (ceci est dû à la réflexion d'une sur le miroir)

$\Rightarrow \Psi = \Psi_{geo} + \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} + \pi$. L'intensité I s'écrit : $I = 2I_0 (1 + \cos \Psi)$

où I_0 : intensité de S au point M. $\Rightarrow I = 2I_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right)$
 $= 4I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi ax}{\lambda D} \right)$

$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D} + \frac{1}{2}$ $f \cdot b \leftrightarrow p = m \Rightarrow x_m^b = \left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda D}{a}$ $m = 1, 2, 3, \dots$
 $f \cdot S \leftrightarrow p = m + \frac{1}{2} \Rightarrow x_m^S = m \frac{\lambda D}{a}$ $m = 0, 1, 2, \dots$

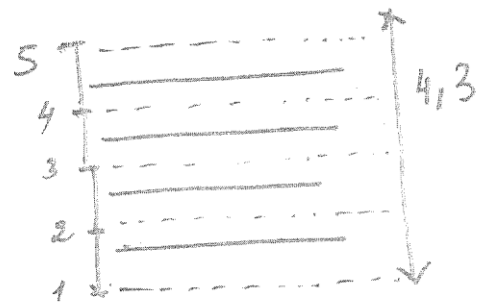
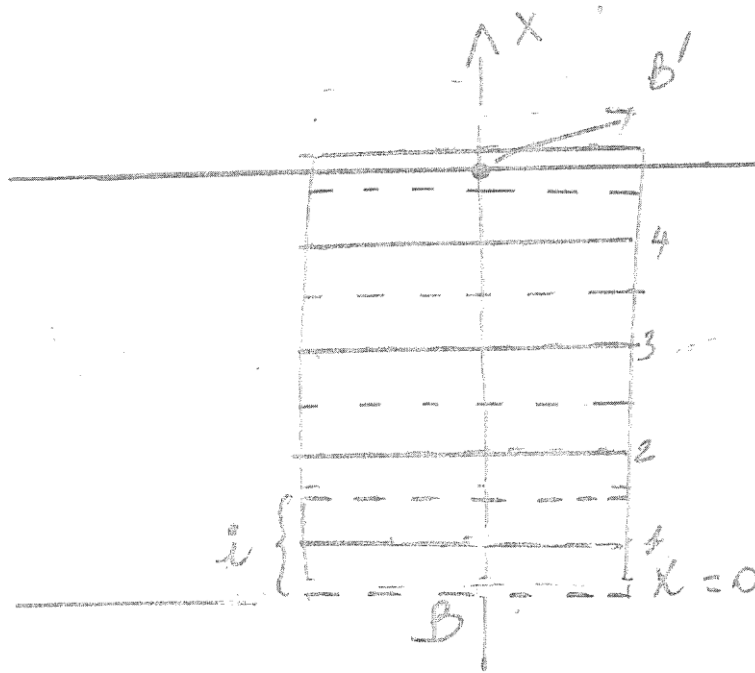
3°) Les franges en $x=0$ correspondent à $p(x=0) = \frac{1}{2}$ frange sombre. Le nombre d'interfranges (c'est le nombre d'intervalles dans), $N = \frac{BB'}{i}$ est l'interfrange.

$$i = x_{m+1}^t - x_m^t = \frac{\lambda D}{\alpha}$$

Déterminons d'abord BB' . On remarque (triangles semblables) que

$$\frac{BB'}{HS'} = \frac{AB}{HA} \Rightarrow BB' = HS' \frac{AB}{HA} \quad \text{A.N.} \quad BB' = 0,6 \text{ mm}$$

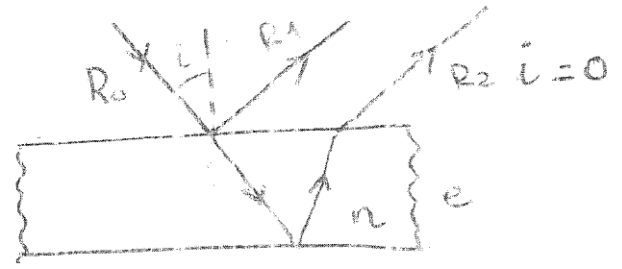
$$i = 140 \text{ } \mu\text{m} \Rightarrow N = \frac{0,6 \cdot 10^3}{140} = [4,3] \rightarrow \dots$$



- le nombre de frange brillantes visibles sur BB' d'après le schéma est de 4
- le nombre de franges sombres est 5.

Ex. 3

On considère une lame d'eau dans l'air. On éclaire cette lame avec de la lumière du soleil en incidence normale.



1°) Les coefficients de réflexion et transmission sont donnés par les équations de Fresnel.

En incidence normale on a $r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$ pour

le passage d'un milieu n_1 à l'autre n_2 .

→ pour l'interface air/eau

$$r_{1,2} = \frac{1 - 1,3}{2,3} = -0,13$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \times 1}{2,3} = 0,87$$

$$r = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}$$

$$t = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}$$

→ pour l'interface eau/air

$$r_{2,1} = \frac{1,3 - 1}{2,3} = 0,13$$

$$t_{2,1} = \frac{2 \times 1,3}{2,3} = 1,13$$

$$R = r^2$$

$$T = \left(\frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} \right)^2 \cdot t^2$$

$$R + T = 1$$

Soit A_0 amplitude du rayon incident R_0 . Le rayon R_1 a subi une réflexion air/eau (réflexion dure) d'où $A_1 = r_{1,2} A_0$. Le rayon R_2 a subi une

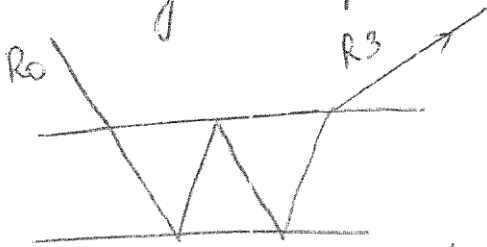
$$A_2 = -0,13 A_0$$

transmission air/eau + réflexion eau/air + transmission eau/air. Son amplitude

A_2 s'écrit $A_2 = (t_{1,2} r_{2,1} t_{2,1}) A_0 \approx 0,13 A_0$

On constate que $|A_1| \approx |A_2|$

pour le rayon R_3 qui a subi 3 réflexions dans la lame : on a $A_3 = A_2 (r_{2,1})^2$
 $A_3 = 0,017 A_2$



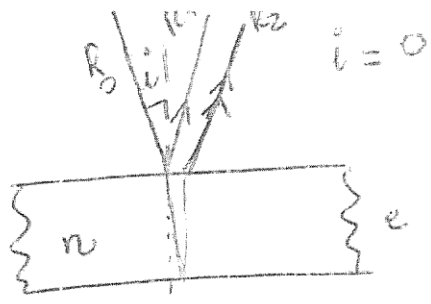
A_3 est négligeable devant A_2 . Plus le nombre de réflexions est important plus l'amplitude est faible. Donc

seuls R_1 et R_2 ont une amplitude significative.

L'intensité $I = |A|^2 \Rightarrow R_3, R_4, \dots$ peuvent être négligés dans l'étude asymptotique d'interférence



2)



$S = S_{\text{symétrique}} + S_{\text{optique}}$
 $S_{\text{symétrique}} = 2ne$
 $S_{\text{optique}} = \frac{\lambda}{2}$ (réflexion dure air/eau)

$$P = \frac{2\pi}{\lambda} \times 2ne + \pi \Rightarrow I = 2I_0 (1 + \cos \Phi) = 2I_0 \left(1 - \cos \frac{4\pi ne}{\lambda}\right)$$

$$P = \frac{2ne}{\lambda} + \frac{1}{2} \quad I_0 = 4I_0 \sin^2\left(\frac{2\pi ne}{\lambda}\right) \quad ; \quad \text{avec } I_0 = (A_0)^2$$

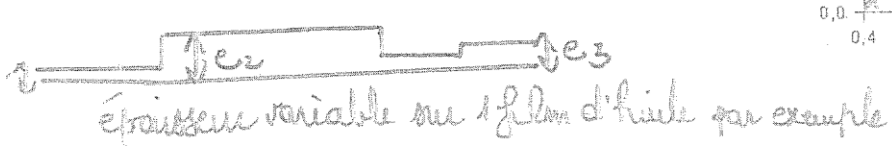
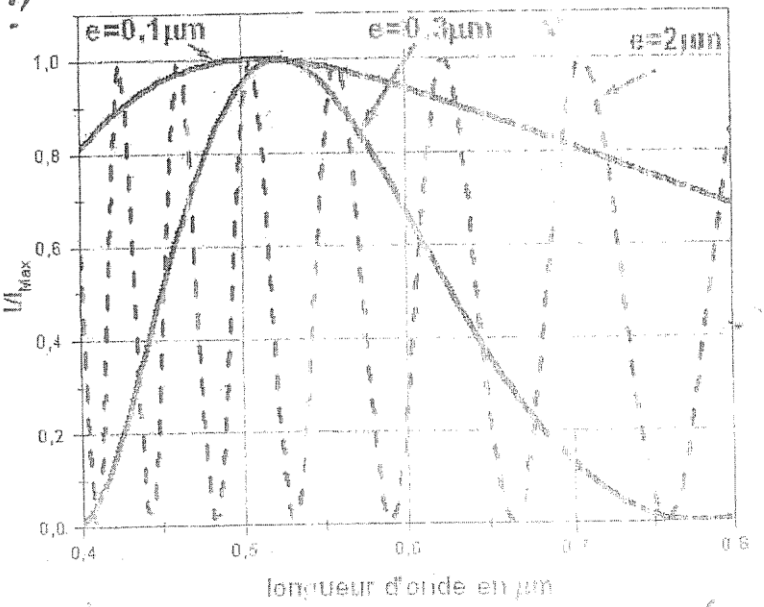
l'intensité I en point M ne dépend pas de la position de ce point.
 I ne dépend que de e et λ . Selon son épaisseur la lame renvoie une lumière plus ou moins importante en fonction de λ du spectre ou visible ($0,4 \mu\text{m} < \lambda < 0,8 \mu\text{m}$)

Pour $e = 0,1 \mu\text{m}$ on constate $I(\lambda) \approx \text{cte} \Rightarrow$ la lame apparaît blanche
 Pour $e = 0,3 \mu\text{m}$ $I(\lambda)$ atteint sa valeur maximale pour 1 longueur d'onde λ_0 et décroît nettement autour de λ_0 : la lame apparaît avec la couleur associée à λ_0 .



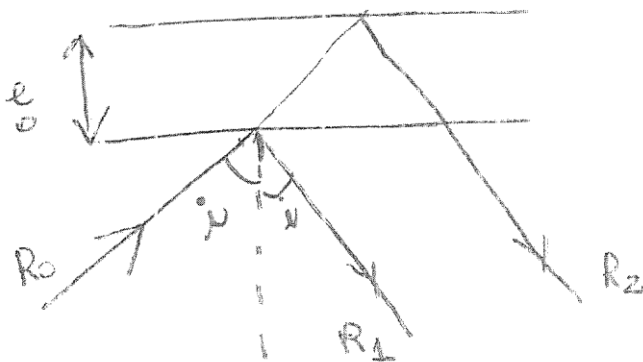
Pour $e = 2 \mu\text{m}$, $I(\lambda)$ varie rapidement et atteint sa valeur max pour de nombreuses λ_0 si ce nombre est très important. Leur moyenne leur valeurs et la lame apparaît à nouveau blanche.

Pourquoi voit des irisations sur des films?
 L'épaisseur e n'est pas uniforme on obtient une irisation sur toute la lame comme c'est le cas d'un film d'huile sur une nappe d'eau ou une bulle de savon.



Ex. 4

A) 1°) La d.d.m entre R_1 et R_2 $S = 2e_0 \cos i$ (Le système est équivalent à une lame d'air).



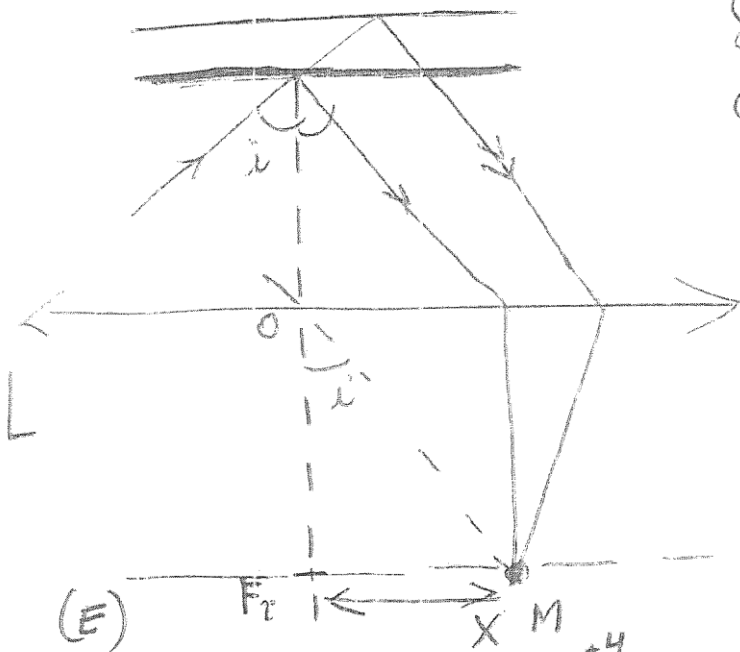
i est faible $\Rightarrow \cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2}$

D'où $S = 2e_0 (1 - \frac{i^2}{2})$

or $\tan i = \frac{x}{f_i} \approx i$ ce qui donne

$S = 2e_0 (1 - \frac{x^2}{2f_i^2})$ avec $f_i = OF_i$

Sur l'écran on obtient des anneaux concentriques de rayon $X = FM$



$\phi = \frac{S}{\lambda} = \frac{2e_0}{\lambda} (1 - \frac{x^2}{2f_i^2})$

• Au centre F_1
 $P_0(x=0) = \frac{2e_0}{\lambda}$; $e_0 = d_2 - d_1$



$\phi_0 = \frac{2e_0}{\lambda} = \frac{2 \times 0,12 \cdot 10^{-4}}{0,6} = 4000$

On voit que l'anneau au centre est brillant

On constate que l'ordre au centre est le max et qu'il diminue du centre vers la périphérie de (E)

l'anneau brillant correspond à $p = m$, $m \in \mathbb{N}$. Dans l'approximation à faible

ona $p = \frac{2e_0}{\lambda} (1 - \frac{x^2}{2f_i^2}) = m \Rightarrow p = p_0 (1 - \frac{x^2}{2f_i^2})$

$\Rightarrow p_0 - p = \frac{x^2}{2f_i^2} p_0$ or $p_0 - p = k$ où k est le numéro de l'anneau

$\Rightarrow \boxed{X_k = \frac{\lambda}{e_0} f_i^2 \cdot k} \Rightarrow X_k = f_i \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{e_0}} \cdot \sqrt{k}$

On remarque que X_k^2 varie de façon linéaire avec le numéro k .

$$X_{k+1}^2 - X_k^2 = r \quad \text{avec } r = \frac{\lambda}{e_0} f_i^2 \Rightarrow X_k^2 \text{ est suite arithmétique de raison } r.$$

$$\frac{X_{k+2}}{X_k} = \sqrt{\frac{k+1}{k}} = \sqrt{1 + \frac{1}{k}}. \quad \text{Lorsque } k \text{ devient } \infty \Rightarrow \frac{X_{k+1}}{X_k} \rightarrow 1$$

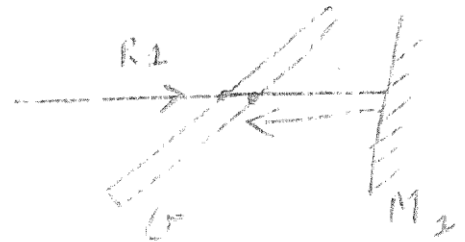
\Rightarrow les anneaux se resserrent. le rayon de l'anneau $k+1 \approx$ rayon de l'anneau k

1) d'amplitude de R_1 : $a_1 = a_0 t^R r \approx r_M$

2) r_M : réflexion totale du milieu $n_1, r_M = 1$

r : coefficient de réflexion de la lame G

t : coefficient de transmission de G



$$a_2 = a_0 t^2 r = a_1$$

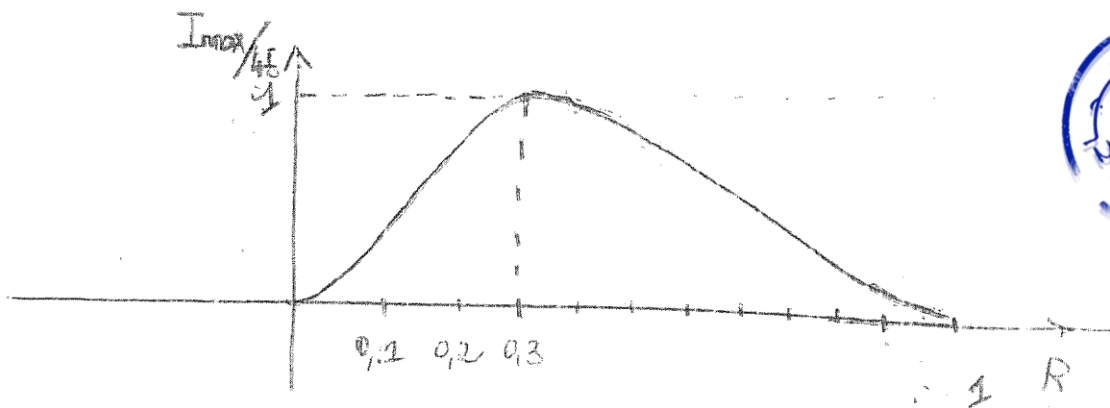
$$\Rightarrow \begin{cases} I = 2 I_A (1 + \cos 4) \\ \text{avec } \frac{I_A}{I_0} = T^2 R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{\max} = 4 I_0 \\ I_{\min} = 0 \end{cases}$$

$$M = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = 1$$

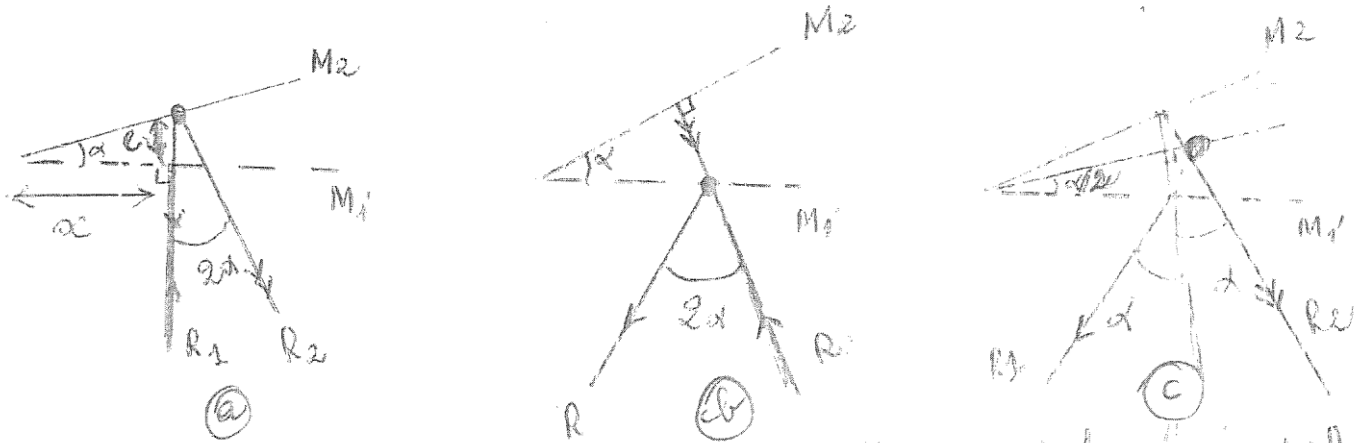
$$I_{\max} = 4 I_0 R \cdot T^2 = 4 I_0 R (1-R)^2$$

Courbe.

3) normalisée = $I_M / 4 I_0 = f(R) = (1-R)^2 \cdot R = R(R^2 - 2R + 1)$



5°) considérons le coin d'air d'angle α petit. Les R_1 et R_2 sont représentés sur les figures a), b) et c). On obtient des franges rect. lignes localisées sur le coin d'air. On peut focaliser sur les 3 situations a, b et c pour avoir une idée sur la localisation des franges et la valeur de l'interfrange i



a) Les rayons R_1 et R_2 se croisent au niveau de M_2 . Les franges sont localisées sur M_2 .

$$S = 2e \quad \text{or } \tan \alpha \cong \frac{e}{x} \cong \alpha \Rightarrow S = 2x^2 \Rightarrow i = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

b) Les rayons R_1 et R_2 se croisent au niveau de M_1' . Donc les franges sont localisées sur M_1' .

$$S = 2e \quad \tan \alpha \cong \frac{e}{x} \Rightarrow p = \frac{S}{\lambda} = \frac{2x^2}{\lambda} \Rightarrow i = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

c) Les rayons se croisent au niveau de la bissectrice. Les franges sont localisées sur la bissectrice de (M_1', M_2) .

$$S = 2 \cdot e \quad \text{avec } \tan \alpha = \frac{e}{x} \Rightarrow e = x \alpha$$

$$\Rightarrow p = \frac{2x^2 \alpha}{\lambda} \Rightarrow i = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

On conclut que quelque soit la direction d'incidence, l'interfrange rect. -partir grand la \hat{m} $i = 0,52 \text{ mm}$.

Remarque: pour répondre à la question 5°) le schéma (a) suffit pour

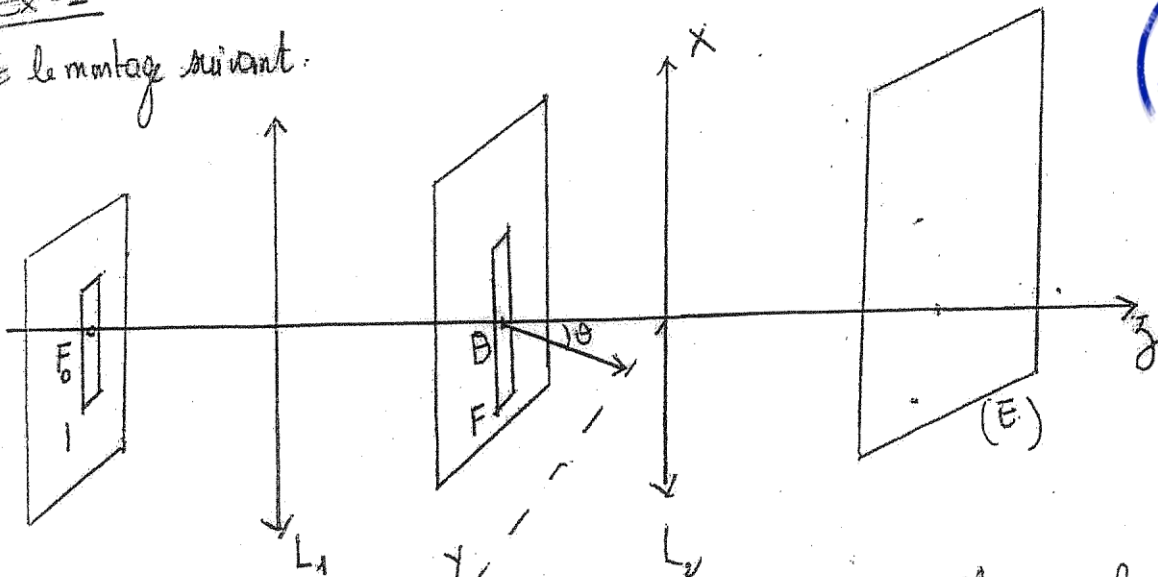
expliquer le phénomène observé.



Solution de la série 3

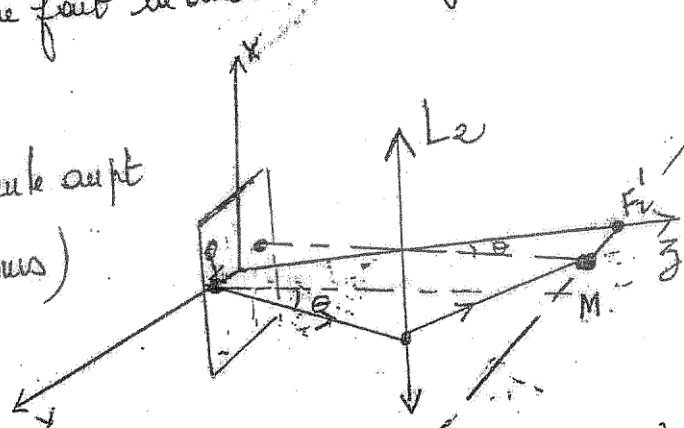


Soit le montage suivant.



Dans le plan horizontal OYZ , les rayons provenant de F_0 illuminent la fente F en incidence normale. Soit θ l'angle que fait la direction d'un rayon diffracté par la fente rectangulaire avec l'axe OZ .

L'amplitude diffractée par les points P de la fente au pt M correspondant à la direction θ (d'après le cours)



$$A(M) = k \int_{\text{Fente}} e^{i\varphi(P)} ds$$

avec $\varphi(P) = \varphi(\theta) + \frac{2\pi}{\lambda} [(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y]$

on prend $\varphi(\theta) = 0$ sachant que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$
 $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ car les rayons incidents $\perp OZ$. De plus $\alpha = 0$ car on considère des rayons diffractés dans le plan OYZ .

$$\Rightarrow A(M) = C \int_{\text{Fente}} e^{\frac{i2\pi}{\lambda} \beta y} dx dy = C \int_{-a/2}^{a/2} e^{\frac{i2\pi}{\lambda} \beta y} dy \int_{-b/2}^{b/2} dx$$

C est une constante $C = k e^{i\varphi(\theta)}$

$\varphi(\theta)$: vibration en M diffractée par θ : origine des phases. (1)

$$A(M) = C b a \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} a \theta}{\frac{\pi}{\lambda} a \theta}$$

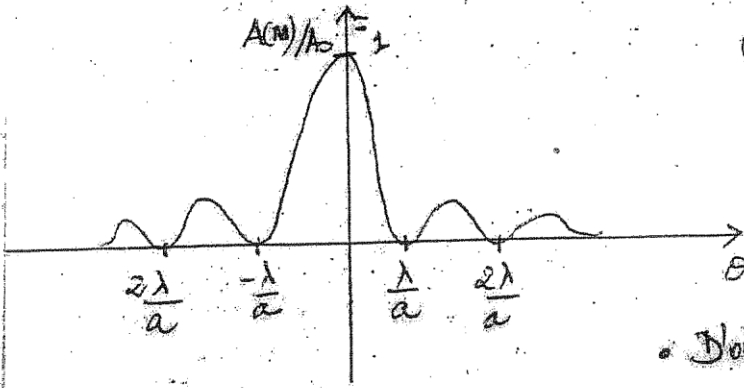
Or $\alpha = \sin \theta \approx \theta$ (car θ est petit).

Dans la direction $\theta = 0$ $A(M \rightarrow F_2') = A_0 \Rightarrow A(M) = A_0 \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} a \theta}{\frac{\pi}{\lambda} a \theta}$

(où F_2' : foyer image de L_2 .)

L'étendue angulaire de la figure centrale est $\Delta \theta = \frac{2\lambda}{a}$

ou ma : $\theta = \frac{y}{f'}$ $f' = \frac{1}{2}$



$\Rightarrow y = f' \theta \Rightarrow \Delta y = f' \Delta \theta$
 Donc la largeur de la fente centrale $\Delta y = \frac{2\lambda f'}{a}$

$\Delta y = 4,36 \text{ mm}$

AN: $a = 0,25 \text{ mm}$
 $\lambda = 546 \text{ nm}$
 $f' = 1 \text{ m}$

De m la distance séparant 2 franges noires est $\Delta y_{n+1} - y_n = \frac{\lambda}{a} f' \Rightarrow \Delta = 2,18 \text{ mm}$

On considère maintenant 2 fentes identiques \perp OB , dans les mêmes conditions que la 1^{ère} question.

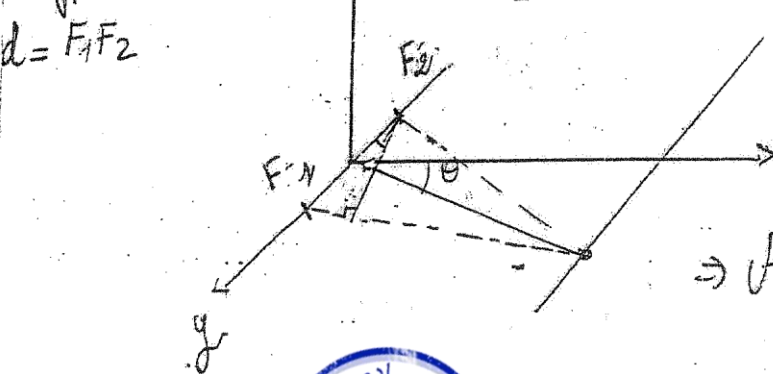
Soit $A_1(M)$ amplitude au point M, diffractée par la fente F_1 . D'après 1^{er})

la $A_1(M) = A_0 \frac{\sin u}{u}$ avec $u = \frac{\pi}{\lambda} a \theta$. La 2^{ème} fente donne la m^{ême} amplitude A_2 .

Puisque les 2 sources sont cohérentes, car elles sont issues de la m^{ême} source F_0 , la

différence de marche entre ces 2 sources s'écrit : $S = d \sin \theta = d \theta \Rightarrow \psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$

d'ampitude résultante des 2 sources s'écrit (d'après chap II : interférences)

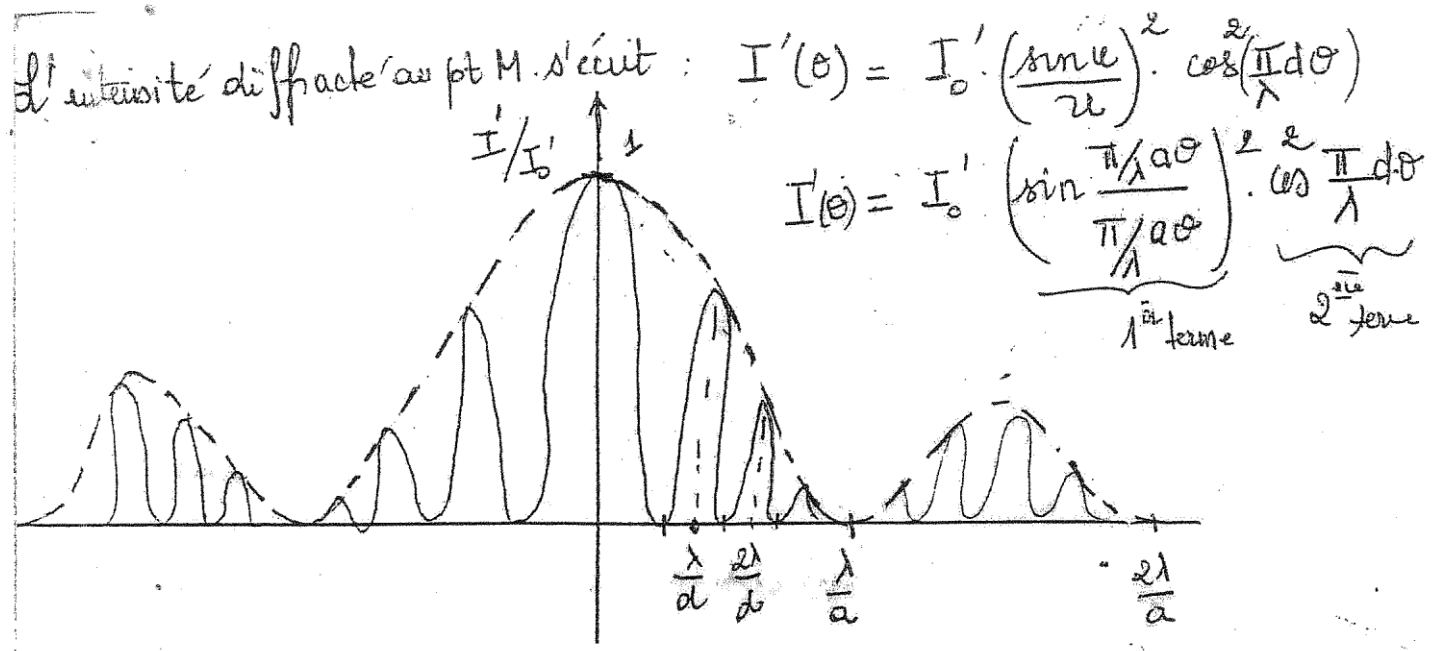


$A'(M) = 2 A_0 \frac{\sin u}{u} \cos \frac{\psi}{2}$

$\Rightarrow A(M) = 2 A_0 \frac{\sin u}{u} \cos \left(\frac{\pi}{\lambda} d \theta \right)$

avec $u = \frac{\pi}{\lambda} a \theta$





Le 1^{er} terme est dû à la diffraction par une fente de largeur a : c'est l'enveloppe des absisses des min $\pm \frac{\lambda}{a}, \pm \frac{2\lambda}{a}, \dots$

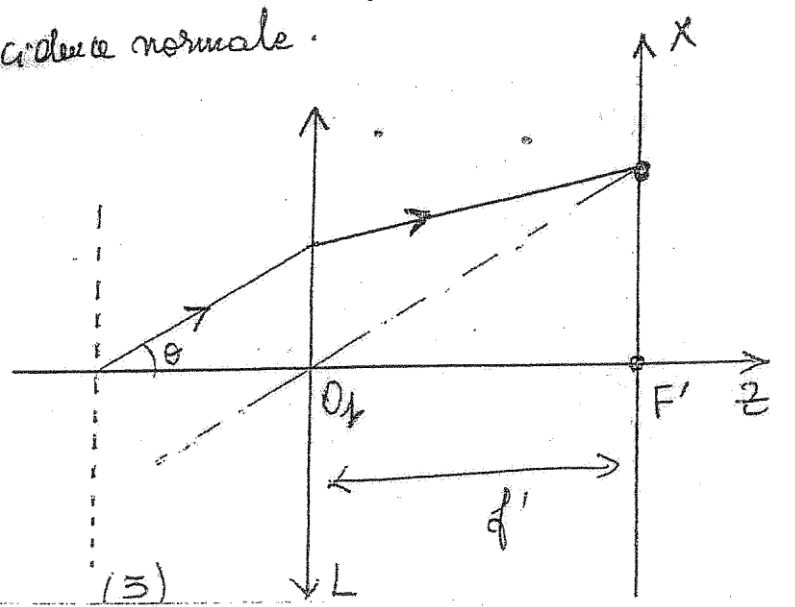
Le 2^{ème} terme est dû à l'interférence de 2 fentes distantes de d .
 Les max ont pour absisses : $0, \pm \frac{\lambda}{d}, \pm \frac{2\lambda}{d}, \pm \frac{3\lambda}{d}, \dots$

$I'(\theta)$ est une fonction d'interférence modérée par une enveloppe de diffraction

L'interfrange i est donnée par : $i = \gamma_{k+1} - \gamma_k \Rightarrow i = \frac{\lambda}{d} \cdot f'$

3) On éclaire un réseau plan constitué de N fentes identiques de largeur l et de pas a , en incidence normale.

voici le schéma de travail suivant :



• L'intensité diffractée par N fentes du réseau s'écrit, d'après l'exercice de

cette série, $I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$, où I_0 : intensité dans la direction $\theta = 0$
 et $u = \frac{\pi \cdot d}{\lambda} \theta$ ou encore $u = \frac{\pi \cdot a}{\lambda} \frac{x}{f}$.

Les fentes du réseau de diffraction peuvent être considérées (car $\theta \approx \frac{x}{f}$)
 comme des sources virtuelles cohérentes... (si leurs largeur est très petite)

Ces sources ont même amplitude A_0 et sont φ de déphasage entre 2 fentes consécutives.
 $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$

Consécutives: $A_0 = A_1 = A_2 = \dots = A_k = a_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)$

L'amplitude résultante A s'écrit $A_N = A_0 + A_0 e^{i\varphi} + A_0 e^{2i\varphi} + \dots + A_0 e^{i(N-1)\varphi}$

$$A_N = \sum_{k=0}^{N-1} A_k e^{i k \varphi} = A_0 \frac{1 - (e^{i\varphi})^N}{1 - e^{i\varphi}} \quad \text{avec } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \theta$$

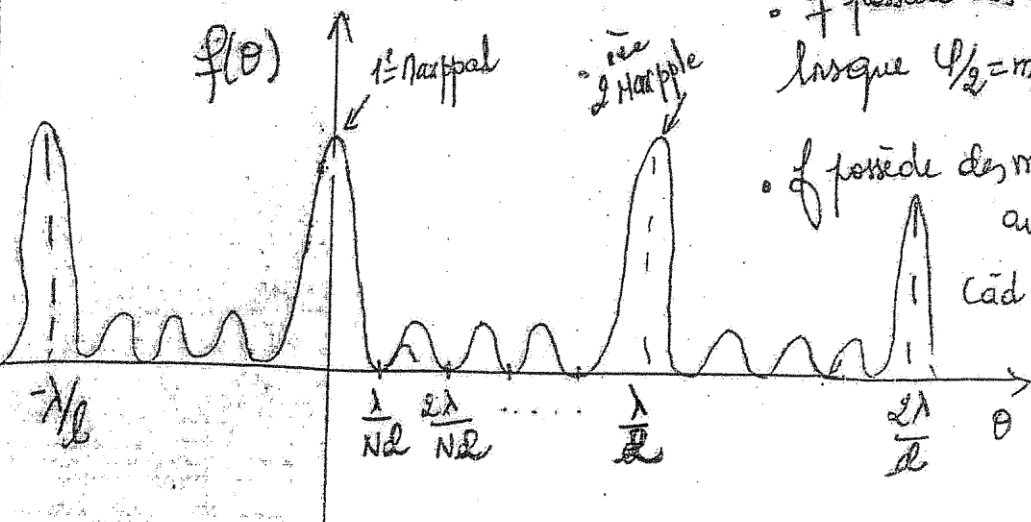
D'après l'Eq 5 ci-dessus, on obtient $I_N = N^2 \cdot A_0^2 \cdot \left(\frac{\sin N\varphi/2}{N \sin \varphi/2} \right)^2$

ou encore $I_N = N^2 \cdot a_0^2 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\varphi/2}{N \sin \varphi/2} \right)^2 = I_N^0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin Nv}{N \sin v} \right)^2$

avec $u = \frac{\pi \cdot d}{\lambda} \theta$ et $v = \frac{\pi}{\lambda} d \theta$, où $\theta = \frac{x}{f}$



• Le graphe de: $\left(\frac{\sin N\varphi/2}{N \sin \varphi/2} \right)^2 = f(\theta)$



• $f(\theta)$ est périodique: période = $\frac{2\lambda}{d}$

• f possède des maxima principaux lorsque $\varphi/2 = m\pi$ c'est-à-dire $\theta = m \frac{\lambda}{d}$

• f possède des minima en $\frac{N\varphi}{2} = k\pi$ avec $k = 1, 2, \dots, N-1$

c'est-à-dire $\theta = k \frac{\lambda}{N \cdot d}$

• Il y a $(N-1)$ minima entre 2 max principaux
 • $N-2$ maxima secondaires

Donc seuls les maximums d'ordre 0, ±1, ±2 sont observés dans ce cas, c'est à dire 5 raies observables.

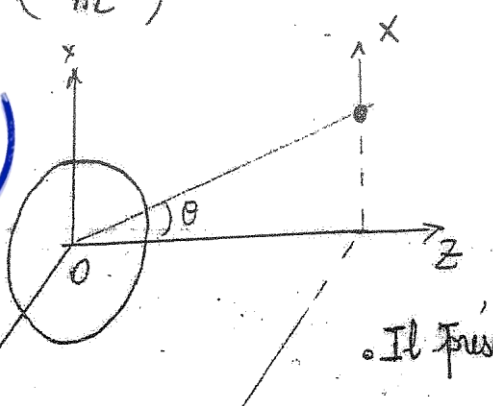
Rem: La relation (*) peut être déduite de l'Ex précédent en remplaçant θ par sa vraie valeur $\sin\theta$. On aura donc des max lorsque $\frac{\varphi}{2} = m\pi$
 c'est à dire $\frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta = m\pi$.

Ex 2: On considère ici un instrument optique (objectif) dont l'ouverture est circulaire. Sa distance focale est f' . Le nombre d'ouverture $n = f'/D$.

Ici on utilise des propriétés de la diffraction de la lumière par 1 trou circulaire. L'intensité diffractée dans 1 direction θ est donnée par:

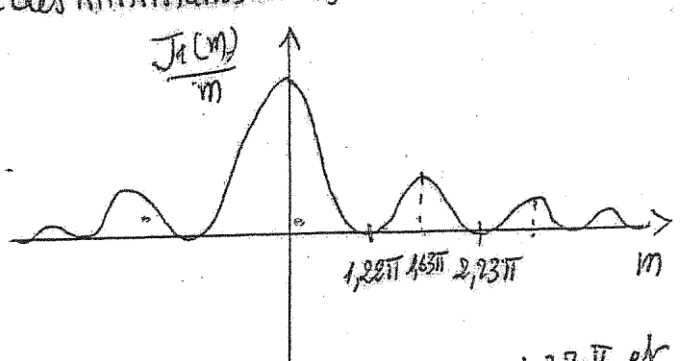
$$I = I_0 \left(\frac{J_1(m)}{m} \right)^2 \quad \text{ou} \quad m = \frac{\pi D}{\lambda} \sin\theta \approx \frac{\pi D}{\lambda} \theta$$

$J_1(m)$: fonction de Bessel d'ordre 1
(voir le cours)



Le graphe de $\frac{J_1(m)}{m}$ ressemble à celui de $\frac{\sin m}{m}$: allure d'une sinusoïde amortie.

Il présente des minimums et des maximums secondaires.



Minimums et max secondaires de $J_1(x)$

l'ordre	x_{minimum}	x_{max}
1	1,22π	1,63π
2	2,23π	2,67π
3	3,69π	3,69π

La tache centrale est limitée par $m = -1,22\pi$ et $m = 1,22\pi$
 ou tache d'Airy

Donc le diamètre de la tache ΔX de la tache d'Airy vaut: $\Delta X = 32,2 \mu m$

$$\theta = \frac{\lambda}{f'} \cdot 1,22 \Rightarrow X = f' \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot 1,22$$

$$\theta = \frac{X}{f'} \Rightarrow X = m \cdot \lambda \cdot 1,22$$

(6) $\Delta X = 2X$

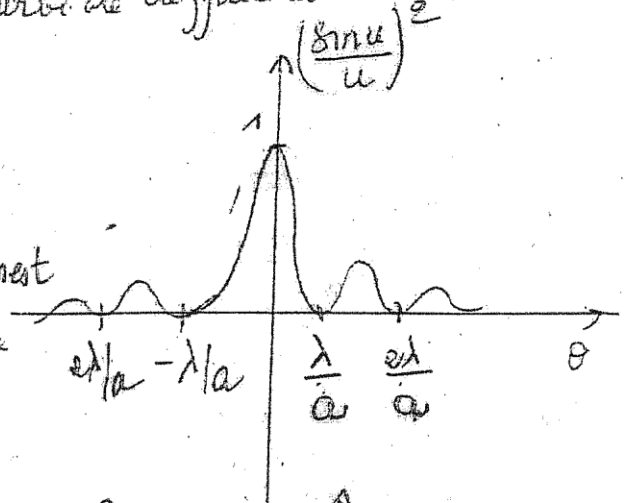
La fonction $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ ou module $f(\theta)$. On obtient donc une figure d'interférence de N sources cohérentes modulée par 1 courbe de diffraction

la fonction $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ est représentée ainsi

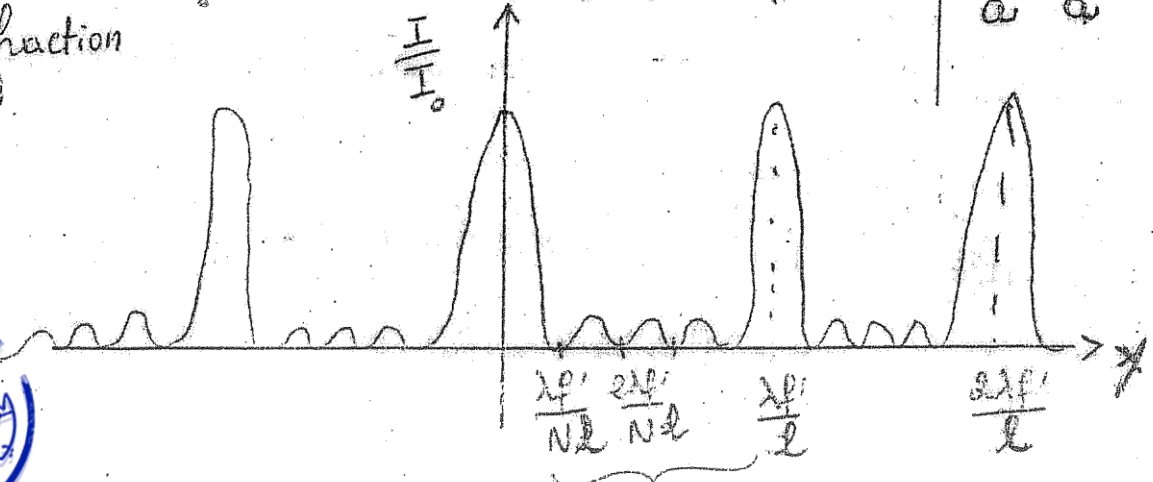
Lorsque θ est très petite : fentes infiniment fines

$$a \sin \theta \ll \lambda \Rightarrow \frac{\lambda}{a} \gg 1 \Rightarrow \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1 \text{ : la fonction}$$

est uniforme et donc ne module plus la figure de diffraction



$$\frac{I}{I_0}$$



$N-1$ minima



Ex. 3 : On considère un réseau de diffraction comportant 6000 traits/cm éclairé en incidence normale par $\lambda = 6328 \text{ \AA}$.

Le pas a du réseau est donné par $a = \frac{1}{6000} \text{ cm} = 1667 \text{ nm}$.

On peut utiliser la relation du réseau : $a(\sin \theta - \sin \theta_0) = m\lambda$ relation donnant les directions des maximums principaux (voir le cours)

θ_0 : direction de l'onde incidente

θ : direction de l'onde diffractée

$$\text{ici } \theta_0 = 0 \Rightarrow a \sin \theta_m = m\lambda \quad (*) \quad m : \text{ordre du maximum principal}$$

Le maximum principal d'ordre 1 correspond à $m=1$ car $\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \theta_1 = 22,3^\circ$

" " d'ordre 2 " $m=2 \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{2\lambda}{a} \Rightarrow \theta_2 = 49,4^\circ$

" " d'ordre 3 $m=3 \Rightarrow \sin \theta_3 = \frac{3\lambda}{a} = 1,44 \Rightarrow$ cette solution est physiquement impossible

(5)