

Université Ferhat Abbas, Sétif 1
Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie
Département des Etudes de Base

TD de BIOPHYSIQUE

Exercices corrigés

Par :

Saddek Bouharati



2014

Sommaire

Phénomènes de surfaces

Tension superficielle.....	1
Phénomènes capillaires.....	4

Conductivité électrique des solutions

Solutions ioniques	6
Potentiel d'oxydoréduction	8

Interfaces biologiques

Diffusion en phase liquide.....	12
Osmose et pression osmotique.....	17
Membranes biologiques.....	19

Hydrodynamique

Viscosité.....	23
Sédimentation	26

Introduction

Les exercices proposés ne sont qu'à titre d'exemples. Nous avons essayé de traiter des applications des cours théoriques enseignés d'une façon brève et simple. Les corrigés types proposés présentent un modèle pouvant constituer un support pédagogique aux étudiants. Les étudiants de la filière peuvent enrichir leurs connaissances par d'autres applications relatives aux sujets traités dans leur programme de formation.

Les unités de calcul utilisé sont souvent dans le système MKS, les mêmes solutions peuvent être effectuées dans le système CGS.

Toutefois, nous nous excusons d'éventuelles erreurs de frappes ou d'inattention qui auraient pu être introduites involontairement.

Tension superficielle

EXO. I:

Comparer l'énergie de tension superficielle d'une gouttelette d'un liquide de $10\mu\text{m}$ de diamètre avec l'énergie développée par celle-ci lorsqu'elle effectue une chute libre d'une hauteur de 10 m.

Même question pour un rayon de 5 mm.

Discuter les résultats.

$$\sigma = 72 \text{ mJ.m}^{-2}, \quad \rho = 1 \text{ g.cm}^{-3}, \quad g = 10 \text{ ms}^{-2}.$$

Corrigé

*** Pour la première gouttelette de $10 \mu\text{m}$ de diamètre**

$$r_1 = 5 \mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$r_2 = 5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\rho = 1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$\sigma = 72 \text{ mJ.m}^{-2} = 72 \cdot 10^{-3} \text{ J.m}^{-2}$$

L'énergie de tension superficielle de la première gouttelette est :

$$W_1 = \sigma S$$

La surface est celle de la sphère : $S = 4\pi r_1^2$

$$W_1 = 4\sigma\pi r_1^2 = 4 \cdot 72 \cdot 10^{-3} \cdot 3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-6})^2 = 2,26 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

Son énergie mécanique de chute libre est :

$$W_2 = P \cdot h = m \cdot g \cdot h = \rho \cdot V \cdot g \cdot h$$

Le volume est celui de la sphère : $V = \frac{4}{3} \cdot \pi r_1^3$

$$W_2 = \rho \cdot V \cdot g \cdot h = \frac{4}{3} \cdot \rho \cdot \pi r_1^3 \cdot g \cdot h = \frac{4}{3} \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-6})^3 \cdot 10 \cdot 1 = 5,23 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

*** Pour la deuxième gouttelette de 10 mm de diamètre**

On refait les mêmes calculs de W_1 et W_2 .

$$W_1 = 4\sigma\pi r_2^2 = 4 \cdot 72 \cdot 10^{-3} \cdot 3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2 = 2,26 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

$$W_2 = \rho \cdot V \cdot g \cdot h = \frac{4}{3} \cdot \rho \cdot \pi r_2^3 \cdot g \cdot h = \frac{4}{3} \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 10 \cdot 1 = 5,23 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Discussion :

En comparant les valeurs d'énergie de tension superficielle et celle mécanique dans le premier et le deuxième cas on constate :

- 1- au niveau du premier cas, les valeurs des énergies de tension superficielle et celle mécanique sont comparables (au même niveau).
- 2- au niveau du deuxième cas, la différence entre les deux valeurs des énergies est importante.
- 3- Suite à cela, l'énergie de tension superficielle est négligeable devant les grandes valeurs d'énergie mécanique. Par contre, à l'échelle moléculaire les valeurs d'énergie mécanique sont petites et donc l'énergie de tension superficielle devient non négligeable.

EXO. II:

Sur une surface de 2 cm^2 d'eau, on rajoute 1 cm^3 d'huile. Par l'agitation, on obtient une dispersion d'huile en petites gouttelettes de $0,1 \mu\text{m}$ de diamètre. Calculer l'énergie développée pour avoir cette dispersion. $\sigma = 50 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.

Corrigé

$$s = 2 \text{ cm}^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$
$$r = d/2 = 0,1 \cdot 10^{-6}/2 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$
$$V = 1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$$

- A l'état initial, l'énergie de tension superficielle est :

$$W_1 = \sigma \cdot s$$

La surface (s) est celle de l'eau, car l'huile s'étale sur toute la surface de l'eau.

$$W_1 = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 100 \cdot 10^{-7} = 10^{-5} \text{ J.}$$

- Après agitation, l'huile se disperse en petites gouttelettes et chaque gouttelette possède une surface qui est celle de la sphère. La surface totale sera celle de toutes les gouttelettes

$S = s \cdot n$ où (n) est le nombre des gouttelettes formées

$$n = V / v ;$$

V : Volume total de l'huile

v : Volume de chaque gouttelette (volume de la sphère)

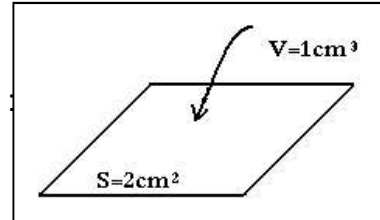
$$v = 4/3 \cdot \pi r^3$$

$$W_2 = \sigma \cdot S = \sigma \cdot s \cdot n = (3 \cdot \sigma \cdot 4\pi r^2 \cdot V) / 4\pi r^3 \Rightarrow W_2 = (3 \cdot \sigma \cdot V) / r \Rightarrow W_2 = (3 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}) / 5 \cdot 10^{-8}$$

$$\Rightarrow W_2 = 3 \text{ J.}$$

L'énergie développée pour avoir cette dispersion sera l'énergie finale moins celle initiale :

$$W = W_2 - W_1 = 3 - 10^{-5} \approx 3 \text{ J.}$$



EXO. III:

La densité de l'acide ($\text{C}_{17} \text{H}_{35} \text{COOH}$) est de 0,85. Calculer la longueur de cette molécule, sachant que sa surface critique lorsqu'elle forme un film mono moléculaire sur la surface de l'eau est de 20 \AA^2 . $U_{\text{MA}} = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.
 C^{12} , O^{16} , H^1 .

Corrigé

$$S = 20 \text{ \AA}^2 = 20 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$$

On commence par calculer la masse volumique de l'acide à partir de la densité :

$$d_a = \rho_a / \rho_e \text{ (masse volumique de l'acide sur celle de l'eau)}$$

$$\rho_a = d_a \cdot \rho_e$$

La masse volumique de l'eau est de $1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ Kg/m}^3$

$$\rho_a = 0,85 \cdot 10^3$$

$\rho_a = m / V$ (la masse volumique est égale au rapport de la masse au volume)

$$\Rightarrow V = m / \rho_a$$

La masse d'une molécule d'acide est de :

$$(18 \cdot 12 + 36 \cdot 1 + 16 \cdot 2) \cdot 1,6 \cdot 10^{-27} = 454,4 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$$

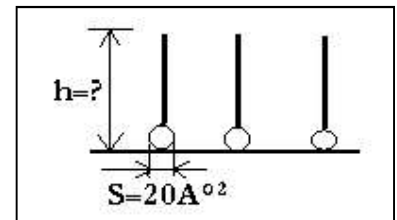
Le volume est celui d'un cylindre (la molécule est supposée cylindrique)

$$V = S \cdot h \text{ (h : hauteur de la molécule qui représente sa longueur)}$$

$$\Rightarrow S \cdot h = m / \rho_a \Rightarrow h = m / (\rho_a \cdot S)$$

$$\Rightarrow h = 454,4 \cdot 10^{-27} / (0,85 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-20})$$

$$\text{La longueur de la molécule} \Rightarrow h = 26,72 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 26,72 \text{ \AA}$$



EXO.IV:

Une bulle savonneuse de rayon « R » et de pression extérieure « Pe » égale à la moitié de sa pression intérieure « Pi ».
Calculer son rayon et sa pression intérieure lorsque sa pression extérieure s'annule.

Corrigé

L'application de la relation de Laplace sur une surface sphérique :

$$\Delta P = 2 \sigma / r \Rightarrow P_i - P_e = 2 \sigma / r$$

Cette relation démontre que lorsque nous sommes en présence d'une interface liquide-Gaz de forme sphérique la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la sphère est de : $2 \sigma / r$

C'est valable dans le cas d'une gouttelette.

Dans notre cas, nous avons une bulle gazeuse. c.à.d. nous avons une double interface.

Gas-Liquide de l'intérieur et Liquide-Gaz de l'extérieur (double interface).

La relation de Laplace devient : $\Delta P = 2(2 \sigma / r)$

On applique cette relation sur chaque cas :

$$P_{i1} - P_{e1} = 2(2 \sigma / R_1) \Rightarrow P_{i1} - \frac{1}{2} P_{i1} = 2(2 \sigma / R_1) \Rightarrow \frac{1}{2} P_{i1} = 4 \sigma / R_1 \Rightarrow P_{i1} = 8 \sigma / R_1 \dots (1)$$

$$P_{i2} - P_{e2} = 2(2 \sigma / R_2) \Rightarrow P_{i2} - 0 = 2(2 \sigma / R_2) \Rightarrow P_{i2} = 4 \sigma / R_2 \dots (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{P_{i1}}{P_{i2}} = \frac{8 \sigma / R_1}{4 \sigma / R_2} = \frac{2 R_2}{R_1} \dots (3)$$

A température constante, la loi de Boyle Mariotte est applicable :

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow P_1 / P_2 = V_2 / V_1 = (4/3 \cdot \pi \cdot R_2^3) / (4/3 \cdot \pi \cdot R_1^3) \Rightarrow P_1 / P_2 = R_2^3 / R_1^3 \dots (4)$$

Par comparaison entre (3) et (4) on peut écrire :

$$2 R_2 / R_1 = R_2^3 / R_1^3 \Rightarrow R_2^2 / R_1^2 = 2 \Rightarrow R_2 = R_1 \sqrt{2}$$

Calcul de la pression intérieure :

$$\text{de l'équation (3)} \Rightarrow P_{i1} / P_{i2} = 2 R_2 / R_1 \Rightarrow \frac{P_{i1}}{P_{i2}} = \frac{2 R_1 \sqrt{2}}{R_1} \Rightarrow \frac{P_{i1}}{P_{i2}} = 2 \sqrt{2} \Rightarrow P_{i2} = \frac{P_{i1}}{2 \sqrt{2}}$$

Le rayon augmente et la pression diminue

EXO. V:

Déterminer le cas de mouillement et de non mouillement de:

1) Une goutte de paraffine sur une surface d'eau propre.

2) Une goutte d'acide oléique sur une surface similaire.

$$\sigma_E = 72 \text{ mJ.m}^{-2}; \sigma_{E/P} = 55 \text{ mJ.m}^{-2}; \sigma_{E/OI} = 15 \text{ mJ.m}^{-2}; \sigma_P = 25 \text{ mJ.m}^{-2}; \sigma_O = 28 \text{ mJ.m}^{-2}$$

Corrigé

Pour pouvoir décider des cas de mouillement et de non mouillement, on doit comparer les énergies d'adhésion et de cohésion :

1- Cas de la paraffine et l'eau :

$$W_{\text{add}}/S = \sigma_P + \sigma_E - \sigma_{E/P} \Rightarrow W_{\text{add}}/S = 25 + 72 - 55 = \text{ mJ.m}^{-2}$$

$$W_c = 2 \cdot \sigma_P = 2 \cdot 25 = 50 \text{ mJ.m}^{-2} \quad W_c > W_{\text{add}} \Rightarrow \text{Cas de non de mouillement}$$

2- Cas de l'acide et de l'eau :

$$W_{\text{add}}/S = \sigma_O + \sigma_E - \sigma_{E/OI} \Rightarrow W_{\text{add}}/S = 28 + 72 - 15 = \text{ mJ.m}^{-2}$$

$$W_c = 2 \cdot \sigma_P = 2 \cdot 28 = 56 \text{ mJ.m}^{-2} \quad W_{\text{add}} > W_c \Rightarrow \text{Cas de mouillement}$$

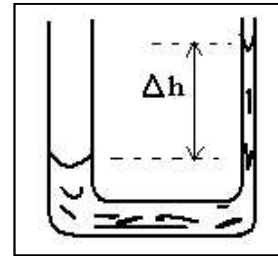
Phénomènes capillaires

EXO. I:

Un tube capillaire sous forme de « U », le rayon de ses deux branches « r_1 » et « r_2 ». On remplit ce tube par un liquide de densité « ρ », de tension superficielle « σ » et d'un angle de raccordement avec le solide « θ ».

Calculer la différence de remontée capillaire entre ses deux branches.

AN: $R_2 = 2R_1 = 2\text{mm}$, $\theta = 0$,
 $\rho = 1\text{g.cm}^{-3}$, $\sigma = 73.10^{-3}\text{ N/m}$.



Corrigé

$$R_2 = 2R_1 = 2\text{mm} = 2.10^{-3}\text{m} \Rightarrow R_1 = 1\text{mm} = 10^{-3}\text{m}$$

$$\rho = 1\text{g.cm}^{-3} = 10^3\text{ Kg/m}^3$$

La remontée capillaire est :

$$h = (2\sigma / \rho.g.R) \text{Cos}\alpha$$

La différence de remontée est :

$$\Delta h = h_1 - h_2 \Rightarrow (2\sigma / \rho.g.R_1) \text{Cos}\alpha - (2\sigma / \rho.g.R_2) \text{Cos}\alpha$$

$$\Delta h = 2\sigma / \rho.g (1/R_1 - 1/R_2) \text{Cos}\alpha$$

Application numérique:

$$\Delta h = 2\sigma / \rho.g (1/R_1 - 1/R_2) \text{Cos}\alpha \Rightarrow 2\sigma / \rho.g (1/R_1 - 1/2R_1) \text{Cos}\alpha$$

$$\Rightarrow 2\sigma / \rho.g.R_1 (1 - 1/2) \text{Cos}\alpha$$

$$\Rightarrow \Delta h = 2\sigma / \rho.g.R_1 (1/2) \text{Cos}\alpha = \sigma . \text{Cos}\alpha / \rho.g.R_1$$

$$\Rightarrow \Delta h = (73.10^{-3}.1) / (10^3.10.10^{-3}) = 7,3.10^{-3}\text{ m} = 7,3\text{ mm}.$$

EXO. II:

Calculer la remontée de l'eau et la descente du mercure dans un tube capillaire de rayon intérieur 0,4 mm.

La densité du mercure (13,6), son angle de raccordement (135°) et sa tension superficielle 490dyn.cm^{-1} .

La densité de l'eau (1), son angle de raccordement (0°), sa tension superficielle $73.10^{-3}\text{ N.m}^{-1}$

Corrigé

$$R = 0.4\text{ mm} = 4.10^{-4}\text{m}$$

La remontée de l'eau :

$$h = (2\sigma / \rho.g.R) \text{Cos}\alpha \Rightarrow h = (2.73.10^{-3}) / (10^3.10. 4.10^{-4}).1 = 3,65.10^{-3}\text{ m} = 36,5\text{ mm}$$

La décente du mercure :

$$h = (2\sigma / \rho.g.R) \text{Cos}\alpha \Rightarrow h = (2.490) / (13,6.10^3. 4.10^{-2}). (-0,7) = 1,26\text{ cm}$$

Le but de cet exercice simple d'apparence est pour se familiariser avec le système de calcul en CGS, le cas de la décente du mercure pour attirer l'attention des étudiants que par exemple la valeur de

$g = 10\text{ m/s}^2 = 10^3\text{ cm/s}^2$; chose qui est toujours omise.

EXO. III:

Dans une remontée capillaire, de l'eau remonte à 4cm à l'intérieur du tube. Calculer le rayon intérieur du tube dans le cas de l'eau pure et du verre propre si la tension superficielle de l'eau est de 73 dyn.cm^{-1} .

Corrigé

Calcul du rayon

Dans le cas de l'eau pure, l'angle de raccordement est considéré nul (cas de mouillement total)

$$h = (2\sigma / \rho.g.R) \cos\alpha$$

$$\Rightarrow R = (2\sigma / \rho.g.h) \cos\alpha = (2.73) / (1.10^{+3}. 4).1 \Rightarrow R = 36,5.10^{-3} \text{ cm}$$

EXO. IV:

Le tableau ci-contre montre la diminution de la masse volumique d'un liquide en fonction de la température dans un tube capillaire de 0,014 cm de rayon.

Tracer la courbe de variation de la tension superficielle en fonction de la température.

T°C	$\rho \text{ [g.cm}^{-3}\text{]}$
85	0,77
105	0,75
145	0,71

Corrigé

A partir de la relation de Jurin, on cherche la relation entre la masse volumique et la tension superficielle :

$$h = (2\sigma / \rho.g.R) \cos\alpha \Rightarrow \rho = (2\sigma / h.g.R) \cos\alpha$$

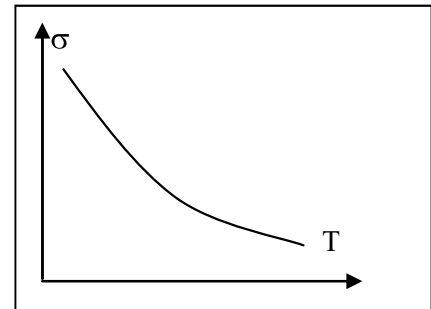
$$\Rightarrow \rho = (2\sigma / h.g.R) \cos\alpha \Rightarrow \rho = [(2 / h.g.R) \cos\alpha] \sigma$$

$$\Rightarrow \rho = A. \sigma$$

$$\rho_1 = A. \sigma_1 \equiv T_1$$

$$\rho_2 = A. \sigma_2 \equiv T_2$$

$$\rho_3 = A. \sigma_3 \equiv T_3$$



On remarque que lorsque la température augmente la tension superficielle diminue. Cela s'explique par l'augmentation de l'agitation moléculaire et donc et donc la diminution des forces d'interactions moléculaires qui sont à l'origine de la tension superficielle.

EXO. VI:

Expliquer en bref les raisons de la remontée de l'eau et de la descente du mercure dans un tube capillaire plongé verticalement sur le liquide.

Corrigé

En Bref

Dans le cas de l'eau, les forces d'adhésion entre l'eau et le verre sont supérieures aux forces de cohésion de l'eau, ce qui produit un cas de mouillement et l'apparition d'une courbure au contact du liquide au solide. Cette courbure occupe toute la surface de l'eau dans le cas des tubes capillaires et donne la forme concave. Cette forme est une partie d'une sphère dans le cas des tubes cylindriques et donc l'apparition d'une interface liquide-Gaz de forme sphérique ce qui engendre une pression capillaire de Laplace qui produit la remontée.

Dans le cas du mercure c'est l'inverse.

Voir les cours de biophysique.

Solutions ioniques

EXO. I:

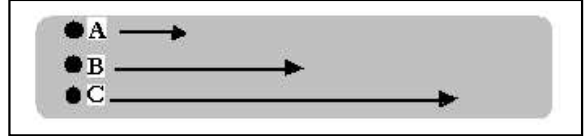
Dans des conditions données de PH et de forces ioniques la mobilité électroforétique des trois corps (A, B, C) est de $\mu_A = 2.10^{-9} \text{ m.s}^{-1}$, $\mu_B = 4.10^{-9} \text{ m.s}^{-1}$, $\mu_C = 6.10^{-9} \text{ m.s}^{-1}$.

Le champ électrique appliqué « E » est de $1,5 \text{ KV.m}^{-1}$ pendant 20 min.

Calculer la distance séparant chaque corps de l'autre.

Corrigé

Pour calculer la différence entre les corps,
On commence par calculer les distances parcourues par chaque corps et cela à partir des mobilités de chaque corps.



$$\mu = v / E \Rightarrow v = \mu \cdot E$$

La nature du mouvement étant uniforme dans un milieu visqueux

$$\Rightarrow v = x/t \Rightarrow x/t = \mu \cdot E \Rightarrow x = \mu \cdot E \cdot t$$

$$\Rightarrow x_A = \mu_A \cdot E \cdot t$$

$$\Rightarrow x_B = \mu_B \cdot E \cdot t$$

$$\Rightarrow x_C = \mu_C \cdot E \cdot t$$

$$x_{BA} = x_B - x_A = \mu_B \cdot E \cdot t - \mu_A \cdot E \cdot t = Et (\mu_B - \mu_A) \Rightarrow x_{BA} = 1,5 \cdot 10^3 \cdot 1200 (4 \cdot 10^{-9} - 2 \cdot 10^{-9})$$

$$\Rightarrow x_{BA} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3,6 \text{ mm}$$

$$x_{CB} = x_C - x_B = \mu_C \cdot E \cdot t - \mu_B \cdot E \cdot t = Et (\mu_C - \mu_B) \Rightarrow x_{CB} = 1,5 \cdot 10^3 \cdot 1200 (6 \cdot 10^{-9} - 4 \cdot 10^{-9})$$

$$\Rightarrow x_{CB} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3,6 \text{ mm}$$

$$x_{CA} = x_{BA} + x_{CB} \Rightarrow 3,6 + 3,6 = 7,2 \text{ mm}$$

EXO. II:

Calculer le temps nécessaire pour séparer deux corps « A et B » de 5 mm et « B et C » de 4 mm. $\mu_A = 5.10^{-9} \text{ m.s}^{-1}$, $\mu_B = 8.10^{-9} \text{ m.s}^{-1}$, $\mu_C = 10^{-8} \text{ m.s}^{-1}$.

La DDP appliquée sur le tube de 50 cm est de 0,5 KV.

Corrigé

$$x_{BA} = 5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \text{et} \quad x_{CB} = 4 \text{ mm} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$V = 0,5 \text{ KV} = 5 \cdot 10^2 \text{ V}$$

$$L = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$$

On calcul le champ électrique produit par l'application de la différence de potentiel :

$$E = V / L \Rightarrow E = 500 / 0,5 = 10^3 \text{ KV/m}$$

Suivant le même modèle précédent ;

$$\mu = v / E \Rightarrow v = \mu \cdot E$$

Le temps mis pour sparer A et B :

$$x_{BA} = x_B - x_A = \mu_B \cdot E \cdot t - \mu_A \cdot E \cdot t = Et (\mu_B - \mu_A)$$

$$\Rightarrow t = x_{BA} / E(\mu_B - \mu_A) \Rightarrow t = 5 \cdot 10^{-3} / 10^3 (8 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-9}) = 1666 \text{ s} = 27,7 \text{ min}$$

Le temps mis pour sparer B et C :

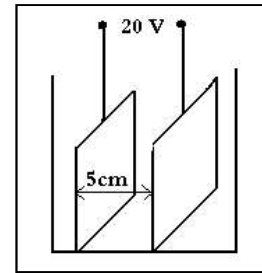
$$x_{CB} = x_C - x_B = \mu_C \cdot E \cdot t - \mu_B \cdot E \cdot t = Et (\mu_C - \mu_B)$$

$$\Rightarrow t = x_{CB} / E(\mu_C - \mu_B) \Rightarrow t = 4 \cdot 10^{-3} / 10^3 (10^{-8} - 8 \cdot 10^{-9}) = 2000 \text{ s} = 33,3 \text{ min}$$

EXO. III:

Deux lames parallèles de surfaces $S = 25 \text{ cm}^2$, distantes de 5 cm, plongées verticalement dans une solution (K^+). Une différence de potentiel de 20 V appliquée produit un courant électrique de 0,1 A. Calculer la concentration des ions (K^+) dans cette solution.

$$\mu_{\text{K}^+} = 7,6 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} .$$



Corrigé

$$L = 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$S = 25 \text{ cm}^2 = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$F = 96500 \text{ C (Faraday)}$$

A partir de la loi d'ohm, on calcul la résistivité et de là la conductivité

$$U = RI = \rho(L / S) I \Rightarrow \rho = US / L I$$

$$1/\rho = L I / US = \lambda = FC\mu \Rightarrow C = \lambda / F\mu \Rightarrow C = L I / USF\mu$$

$$C = (5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1) / (20 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 96500 \cdot 7,6 \cdot 10^{-8}) = 13,8 \text{ Kg/m}^3$$

EXO. IV:

La conductivité électrique d'une solution ionique est donnée par la relation suivante:

$\lambda = FC (\mu_+ + \mu_-)$. Où F: Constante de Faraday, C: Concentration, $\mu_+ + \mu_-$: Mobilité ionique des ions (+) et (-).

Déduire cette relation.

Corrigé

En Bref

Suivant la loi d'Ohm: $U = R \cdot I$

La résistance d'un conducteur électrique qui est dans ce cas le volume de la solution contenu entre les deux lames de surface (S) et d'épaisseur (L) est

$$R = \rho (L / S)$$

avec : ρ : résistivité du milieu

$$U = RI = \rho(L / S) I \Rightarrow \rho = US / L I$$

$$1/\rho = L I / US = \lambda \Rightarrow J / E \dots\dots\dots (1)$$

(J: densité du courant qui représente le rapport du courant à la surface)

La mobilité est définie par le rapport de la vitesse au champ : $\mu = v / E \Rightarrow v = \mu \cdot E$

La densité du courant (J) représente la charge électrique totale distribuée sur la surface et animées d'un vitesse (v):

$$J = n \cdot e \cdot z \cdot v \Rightarrow J = n \cdot e \cdot z \cdot \mu \cdot E$$

n: nombre d'ions dans la solution

e: charge unitaire

La solution peut contenir des charges positives et des charges négatives (n_+ et n_-) et leurs valences (z_+ et z_-). Pour une solution molaire, (1mole / l), la somme des charges positives ou négatives est (F.C)

où F: constante de Faraday

C: concentration.

$$\text{Alors } F \cdot C = n \cdot e \cdot z$$

$$\text{on peut écrire : } J = n_+ \cdot e \cdot z_+ \cdot \mu_+ \cdot E + n_- \cdot e \cdot z_- \cdot \mu_- \cdot E \Rightarrow J = F \cdot C \cdot (\mu_+ + \mu_-) \cdot E \dots\dots\dots (2)$$

de l'équation (1) et (2) on peut écrire : $\lambda = F \cdot C \cdot (\mu_+ + \mu_-)$

Voir les cours de biophysique

Potentiel d'oxydoréduction

EXO. I:

Calculer le potentiel de chacune des électrodes à 25 °C par rapport à celui de l'électrode normale.

- 1) Une lame de fer plongée dans une solution de sulfate ferreux à $5 \cdot 10^{-3}$ M / l.
- 2) Une lame d'argent plongée dans une solution de nitrate d'argent à 10^{-3} M / l.
- 3) Une lame de platine plongée dans une solution de sulfates ferreux à 0,1 M / l. et $2 \cdot 10^{-3}$ de sulfate ferrique.

Les potentiels normaux d'oxydoréduction à 25°C sont:

$$V_0^{Fe^{+2}/Fe} = -0,44V, \quad V_0^{Fe^{+3}/Fe^{+2}} = 0,77V, \quad V_0^{Ag^+/Ag} = 0,8V. \quad RT / F = 0,06 V$$

Corrigé

L'équation du potentiel d'électrode pour chaque cas

$RT / F = 0,06 V$; (chaque fois on divise par Z correspondant :

1- Dans le cas des ions de sulfate ferreux (Z = 2)

$$V_{Fe} = V_0^{Fe^{+2}/Fe} + \frac{RT}{ZF} \text{Log} \left[\frac{Fe^{+2}}{Fe} \right] \Rightarrow V = -0,44 + 0,03 \cdot \text{Log} 5 \cdot 10^{-3} = 1,13 V$$

2- Dans le cas de l'argent (Z = 1)

$$V_{Ag} = V_0^{Ag^+/Ag} + \frac{RT}{ZF} \text{Log} \left[\frac{Ag^+}{Ag} \right] \Rightarrow V = 0,8 + 0,06 \cdot \text{Log} 10^{-3} = 0,62 V$$

2- Dans le cas des ions des sels ferreux et ferriques (Z = 1)

$$V_{Fe^{+3}/Fe^{+2}} = V_0^{Fe^{+3}/Fe^{+2}} + \frac{RT}{ZF} \text{Log} \left[\frac{Fe^{+3}}{Fe^{+2}} \right] \Rightarrow V = 0,77 + 0,06 \cdot \text{Log} [2 \cdot 10^{-3} / 10^{-1}] = 0,66 V$$

EXO. II:

$$\text{Soit } V_0^{Co^{+3}/Co^{+2}} = 1,9V, \quad \text{et } V_0^{Fe^{+3}/Fe^{+2}} = 0,77V.$$

Ecrire l'équation pour chacune des électrodes.

Ecrire l'équation de la réaction lorsque ces deux corps sont mélangés dans les conditions normales.

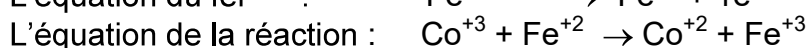
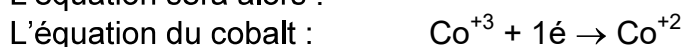
Ecrire l'expression de la force électromotrice.

Corrigé

Pour écrire l'équation de chacune des électrodes, il faut déterminer l'élément oxydant et l'élément réducteur.

Dans notre cas nous avons affaire au fer et au cobalt ; celui qui possède la plus grande valeur de V_0 est celui qui est capable d'arracher des électrons à l'autre élément.

L'équation sera alors :



La force électromotrice d'une pile électrochimique est représentée par la différence de potentiel de chaque électrode :

$$V_{Co} = V_0^{Co^{+3}/Co^{+2}} + \text{Log} \left[\frac{Co^{+3}}{Co^{+2}} \right]$$

$$V_{Fe} = V_0^{Fe^{+3}/Fe^{+2}} + \text{Log} \left[\frac{Fe^{+3}}{Fe^{+2}} \right]$$

$$E = V_{Co} - V_{Fe} \Rightarrow \left[V_0^{Co^{+3}/Co^{+2}} + \text{Log} \left[\frac{Co^{+3}}{Co^{+2}} \right] \right] - \left[V_0^{Fe^{+3}/Fe^{+2}} + \text{Log} \left[\frac{Fe^{+3}}{Fe^{+2}} \right] \right]$$

$$E = V_0^{Co^{+3}/Co^{+2}} - V_0^{Fe^{+3}/Fe^{+2}} + \left[\text{Log} \left[\frac{Co^{+3}}{Co^{+2}} \right] - \left[\frac{Fe^{+3}}{Fe^{+2}} \right] \right]$$

$$= V_0^{Co^{+3}/Co^{+2}} - V_0^{Fe^{+3}/Fe^{+2}} + \text{Log} \left[\frac{Co^{+3}}{Co^{+2}} \right] \left[\frac{Fe^{+2}}{Fe^{+3}} \right]$$

EXO. III:

Soit une pile électrochimique de Zn / [Zn (NO₃)] et [Ag NO₃] / Ag.

Ecrire l'équation de réaction de ces deux corps.

Calculer la force électromotrice de cette pile si les deux solutions sont à 0,1 M / l.

Calculer la concentration des ions [Ag⁺] et [Zn⁺⁺] lorsque la pile est épuisée.

$$V_0^{Zn^{+2}/Zn} = -0.76V$$

$$V_0^{Ag^+/Ag} = 0.8V$$

$$RT / F = 0,06 V$$

Corrigé

Pour écrire l'équation de réaction on commence par l'écriture des équations de chaque électrode :

L'équation de l'argent : $Ag^+ + 1e \rightarrow Ag$

L'équation du fer : $Zn \rightarrow Zn^{++} + 2e$

1* L'équation de la réaction : $2Ag^+ + Zn \rightarrow 2 Ag + Zn^{++}$

2* Calcul de la force électromotrice lorsque les deux corps sont à la même concentration

$$E = V_{Ag} - V_{Zn} \Rightarrow V_0^{Ag^+/Ag} + RT/ZF \text{Log} \left[\frac{[Ag^+]}{[Ag]} \right] - V_0^{Zn^{+2}/Zn} + RT/ZF \text{Log} \left[\frac{[Zn^{+2}]}{[Zn]} \right]$$

$$E = 0,8 + 0,03 \text{Log} (0,1)^2 - \left[-0,76 + 0,03 \text{Log} (0,1) \right]$$

(Pour prendre en considération l'équilibre de l'équation (Z = 2) on divise et on multiplie par 2 dans le cas de l'argent, Equation de Nernst).

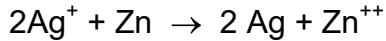
$$E = 1,56 V$$

3* Pour calculer les concentrations ioniques de chaque élément, (à l'instant de l'épuisement de la pile :

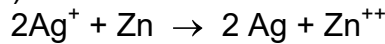
$$E = 0 \Rightarrow 0 = V_{Ag} - V_{Zn} \Rightarrow V_0^{Ag^+/Ag} + RT/ZF \log \frac{[Ag^+]}{[Ag]} = V_0^{Zn^{2+}/Zn} + RT/ZF \log \frac{[Zn^{2+}]}{[Zn]}$$

$$0,8 + 0,03 \log \frac{[Ag^+]}{[Ag]} = -0,76 + 0,03 \log \frac{[Zn^{2+}]}{[Zn]} \Rightarrow 10^{52} = \frac{[Zn^{2+}/Zn]}{[Ag^+/Ag]} \dots \dots \dots (1)$$

Pour résoudre cette équation, on revient à l'équation de la réaction :



Selon équation, on constate qu'au cours du fonctionnement de la pile, les ions (Ag⁺) diminuent et les ions (Zn²⁺) augmentent mais pas avec les mêmes proportions. (un ion Zn²⁺ avec deux ions Ag⁺)



à t=0 : les concentrations : 0,1 0,1

à t=t : les concentrations : 0,1 - 2X 0,1 + X

Donc les rapports des concentrations des ions (Zn²⁺) et (Ag⁺) à toute instant (t) est:

$$\frac{Zn^{2+}/Zn}{Ag^+/Ag} = \frac{0,1 + x}{0,1 - 2x} \dots \dots \dots (2)$$

En comparant (1) et (2), on peut calculer la valeur de (X) exactement à l'instant de l'épuisement de la pile car (10⁻⁵²) est calculée à partir de E = 0 et on peut écrire:

$$\frac{0,1 + x}{0,1 - 2x} = 10^{52} \Rightarrow x \approx 0,05$$

Donc : la concentration des ions (Ag⁺) sera : 0,1 - 2X ≈ 0 ⇒ Transformation totale des ions (Ag⁺) en (Ag) à l'état atomique.

La concentration des ions (Zn²⁺) : 0,1 + X ≈ 0,15 Mol/l

EXO. IV:

Calculer le potentiel que prend une électrode inattaquable de platine plongée dans une solution de sels ferreux et ferrique à concentrations égales, sachant que le potentiel normal du couples [Fe⁺³] / [Fe⁺²] est égale à 0,77 V.

* Calculer ce potentiel lorsque [Fe⁺³] = 2[Fe⁺²]

* Que se passerait-il si on portait artificiellement le potentiel d'électrode à 0,8 V et à 0,75 V.

$$RT / F = 0,06 V \qquad V_0^{Fe^{3+}/Fe^{2+}} = 0,77V$$

Corrigé

1- A concentrations égales : [Fe⁺³] = [Fe⁺²]

$$V_{Fe} = V_0^{Fe^{2+}/Fe} + \frac{RT}{ZF} \log \frac{[Fe^{+2}]}{[Fe^{+2}]} \Rightarrow V = 0,77 + 0,06 \log 1 \Rightarrow V = V_0 = 0,77 V$$

2- Le potentiel lorsque les concentrations : [Fe⁺³] = 2 [Fe⁺²]

$$V_{Fe} = V_0^{Fe^{2+}/Fe} + \frac{RT}{ZF} \log \frac{[2Fe^{+2}]}{[Fe^{+2}]} \Rightarrow V = 0,77 + 0,06 \log 2 \Rightarrow V = 0,788 V$$

3- Lorsqu'on fixe le potentiel : V = 0,80 V ⇒ V > V₀.

$$0,8 = 0,77 + 0,06 \text{Log} \frac{[Fe^{+3}]}{[Fe^{+2}]} \Rightarrow \sqrt{10} = \frac{[Fe^{+3}]}{[Fe^{+2}]} \Rightarrow [Fe^{+3}] > [Fe^{+2}]$$

4- Lorsqu'on fixe le potentiel : $V = 0,75 \text{ V} \Rightarrow V < V_0$

$$0,75 = 0,77 + 0,06 \text{Log} \frac{[Fe^{+3}]}{[Fe^{+2}]} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = \frac{[Fe^{+3}]}{[Fe^{+2}]} \Rightarrow [Fe^{+3}] < [Fe^{+2}]$$

EXO. V:

Calculer le rapport des concentrations des ions suivants dans une pile électrochimique $[Co^{+3} / Co^{+2}]$; $[Fe^{+3} / Fe^{+2}]$ lorsque la force électromotrice chute de 0,22 V.

Les concentrations initiales sont: $[Co^{+3} / Co^{+2}] = 10$ et $[Fe^{+3} / Fe^{+2}] = 1 / 10$.

$$V_0^{Co^{+3}/Co^{+2}} = 1,9V, \text{ et } V_0^{Fe^{+3}/Fe^{+2}} = 0,77V. \quad RT / F = 0,06 V.$$

Corrigé

Pour calculer le rapport des concentrations lorsque la force électromotrice chute d'une valeur donnée, il faut commencer par calculer la F.E.M à l'état initial :

$$E = V_{Co} - V_{Fe} \Rightarrow V_0^{Co^{+3}/Co^{+2}} + RT/ZF \text{Log} \frac{[Co^{+3}]}{[Co^{+2}]} - \left(V_0^{Fe^{+3}/Fe^{+2}} + RT/ZF \text{Log} \frac{[Fe^{+3}]}{[Fe^{+2}]} \right)$$

$$E = 1,9 + 0,06 \text{Log} 10 - \left(0,77 + 0,06 \text{Log} 10^{-1} \right) \Rightarrow E = 1,25 \text{ V}$$

Lorsque la F.E.M chute de 0,22V ;

$$E' = 1,25 - 0,22 \Rightarrow E' = 1,03 \text{ V}$$

Le rapport des concentrations :

$$1,03 = V_0^{Co^{+3}/Co^{+2}} + RT/ZF \text{Log} \frac{[Co^{+3}]}{[Co^{+2}]} - \left(V_0^{Fe^{+3}/Fe^{+2}} + RT/ZF \text{Log} \frac{[Fe^{+3}]}{[Fe^{+2}]} \right)$$

$$1,03 = 1,9 + 0,06 \text{Log} \frac{[Co^{+3}]}{[Co^{+2}]} - \left(0,77 + 0,06 \text{Log} \frac{[Fe^{+3}]}{[Fe^{+2}]} \right)$$

$$10^{+1,66} = \frac{[Fe^{+3}]}{[Fe^{+2}]} \frac{[Co^{+2}]}{[Co^{+3}]}$$

Diffusion dans la phase liquide

EXO I:

Démontrer que le coefficient de diffusion d'une molécule sphérique est inversement proportionnel à la racine cubique de sa masse moléculaire.

Corrigé

Nous savons que le coefficient de diffusion est directement proportionnel au coefficient de Boltzmann ; à la température absolue et inversement proportionnel au coefficient de frottement selon la relation suivante :

$$D = \frac{KT}{f} = \frac{KT}{6\pi\eta r} \dots\dots\dots(1)$$

D'autre part, la masse volumique détermine le rapport de la masse au volume :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Les molécules sont supposées sphériques; alors : $V = 4/3 \pi r^3$

$$\Rightarrow \rho = \frac{3m}{4\pi r^3} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} \dots\dots(2)$$

En remplaçant (2) en (1) on obtient :

$$D = \frac{KT}{f} = \frac{KT}{6\pi\eta r} = \frac{KT}{6\pi\eta \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}} \Rightarrow D = \frac{KT}{6\pi\eta \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi\rho}} \sqrt[3]{m}} ; \text{ Soit } \frac{KT}{6\pi\eta \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi\rho}}} = A \Rightarrow D = \frac{A}{\sqrt[3]{m}}$$

EXO II:

Un système à deux compartiments séparés par une membrane. On désire épurer le compartiment (A) de volume (V_A) dans le compartiment (B) de volume (V_B). Le même liquide plasmatique est contenu dans les deux compartiments, sauf que dans (B) sa concentration en urée est nulle.

*Démontrer que $[C_A V_A + C_B V_B = C^{te}]$.

*Calculer la concentration d'équilibre (C_e) en fonction de (M, V_A, V_B).

*Calculer le volume (V_B) Si ($V_A = 40$ l), la concentration initiale en (A) $C_{0A} = 3$ g / l et on désire obtenir une concentration finale d'équilibre $C_e = 0,3$ g / l.

Corrigé

Par définition de la concentration : $C = m / V \Rightarrow C_A = m_A / V_A$ et $C_B = m_B / V_B$

En remplaçant dans l'équation $[C_A V_A + C_B V_B]$ on obtient :

$$(m_A / V_A) V_A + (m_B / V_B) V_B = m_A + m_B = M \text{ (masse totale du système qui constante)}$$

$$C_A V_A + C_B V_B = M \dots\dots\dots(1)$$

* A l'équilibre, $C_A = C_B = C_e$

$$\text{En remplaçant dans l'équation (1), on obtient : } C_e V_A + C_e V_B = M \Rightarrow C_e(V_A + V_B) = M$$

$$\Rightarrow C_e = M / (V_A + V_B)$$

*Application numérique (Calcul de V_B):

$$\text{De l'équation précédente : } C_e V_A + C_e V_B = M \Rightarrow C_e V_B = M - C_e V_A \Rightarrow V_B = (M - C_e V_A) / C_e$$

$$V_B = (M - C_e V_A) / C_e \Rightarrow V_B = V_A [C_{0A} / C_e - 1] \Rightarrow V_B = 40 (3/0,3 - 1) = 360 \text{ l}$$

Remarque :

On constate que dans un système à deux compartiments où la concentration diminue d'un compartiment pour augmenter dans l'autre, cela nécessite de grandes valeurs de volume pour réduire la concentration. Du point de vue pratique, ce système est inapplicable. Généralement, le système de diffusion suit la méthode de l'exercice suivant.

EXO. III:

On considère un système de deux compartiments séparés par une membrane et on désire épurer le compartiment (I) de volume (V) et de concentration initiale (C₀) dans le compartiment (II).

On suppose que la diffusion de (I) vers (II) ne modifie pas la concentration en (II) toujours nulle où circule un liquide de dialyse.

La surface de diffusion (S), le coefficient de diffusion (D) et l'épaisseur de la membrane (e).

- 1) Exprimer la loi de Fick appliquée à ce cas particulier.
- 2) D'après la définition du flux massique, écrire la relation entre le flux, le temps et la concentration.
- 3) Montrer que la concentration du compartiment (I) varie selon la relation suivante:

$$C = C_0 e^{-Kt}, \text{ où } K = \frac{DS}{Ve}.$$

- 4) Quelle unité peut-on donner à (K).
- 5) Appliquer les résultats précédents à un système de rein artificiel pour lequel:
 $S = 15.10^3 \text{ cm}^2$, $e = 75 \text{ }\mu\text{m}$, $D = 10^{-5} \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$, et le volume à épurer $V = 40 \text{ dm}^3$.
 Combien de temps faudra-t-il pour réduire l'urémie de (6 g / l) à (0,3 g / l).

Corrigé

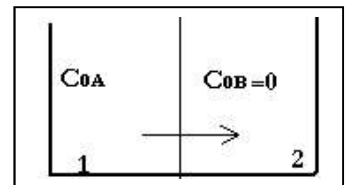
1. La loi de Fick : $\frac{dm}{dt} = -DS \frac{dc}{dx}$

Dans notre cas :

* La diffusion de (1) vers (2) ne modifie pas la concentration en (2)

$\Rightarrow C_B = 0 \Rightarrow dc = C_2 - C_1 = -C_1$ (lorsque on parle de concentration dans ce cas, il s'agit toujours du compartiment (1)). $\Rightarrow dc = -C$

* La distance entre les deux compartiments est représentée par l'épaisseur de la membrane (dx) $\Rightarrow dx = e$



La loi prend la forme : $\frac{dm}{dt} = DS \frac{C}{e} \dots\dots\dots(1).$

2. D'après la définition du flux massique ($\Phi = \frac{dm}{Sdt}$), on doit écrire une relation entre ce flux et la concentration et le temps :

Par définition de la concentration : $C = m / V \Rightarrow m = CV$: dans le cas de la diffusion on assiste à une variation décroissante de masse et donc de concentration

$\Rightarrow dm = -V.dC$

Si on divise les deux termes de l'équation par (S.dt) :

$$\frac{dm}{Sdt} = -\frac{VdC}{Sdt} \dots\dots\dots(2)$$

3. Pour arriver à la fonction de décroissance de la concentration du compartiment (1), on compare les équations (1) et (2) :

$$\Rightarrow DS \frac{C}{e} = -\frac{VdC}{dt} \Rightarrow \frac{dC}{C} = -\frac{DS}{Ve} dt \Rightarrow \frac{dC}{C} = -Kdt \Rightarrow \log C = -Kt + B ;$$

Pour calculer la constante d'intégration (B), nous avons les conditions : à $t=0 \Rightarrow C=C_0$, Alors :

$$\log C_0 = -0 + B \Rightarrow \log C = -Kt + \log C_0 \Rightarrow \log C/C_0 = -Kt \Rightarrow C = C_0 e^{-Kt}$$

4. Quel unité peut-on donner à K ? Comme est $K = \frac{DS}{Ve}$, il suffit de remplacer les unités de chaque paramètre et l'unité est déterminée le plus simplement du monde, mais le but n'est pas là, le but de tester l'esprit de raisonnement pour dire que (Kt) est un exposant, et l'exposant par définition ne possède pas d'unité. Le temps (t) possède la seconde comme unité, alors (k) doit obligatoirement posséder l'unité inverse (s^{-1}).

5. Application numérique :

$$\text{des équations précédentes nous avons : } \log C/C_0 = -Kt \Rightarrow \log \frac{dC}{C} = -\frac{DS}{Ve} t$$

$$\Rightarrow t = -\frac{Ve}{DS} \log \frac{C}{C_0} \Rightarrow t = -\frac{40 \cdot 10^{+3} \cdot 75 \cdot 10^{-4}}{10^{-5} \cdot 15 \cdot 10^{+3}} \log \frac{0,3}{6} \Rightarrow t = 5980 \text{ s} \approx 1,66 \text{ h} \approx 1 \text{ h } 36 \text{ min.}$$

EXO. IV:

On désire épurer une solution de volume (10 l) et de concentration (3 g / l) à travers une membrane dans un système à deux compartiments et on suppose que la diffusion de (1) vers (2) ne modifie pas la concentration en (2).

L'épaisseur de la membrane (10^{-2} cm), la surface (10^{-4} cm²), le temps de diffusion (1h) pour réduire la concentration à 0,5 g / l.

Déterminer le diamètre minimal des pores de la membrane pour qu'il y est diffusion.

$$T = 273^\circ\text{K}, \eta = 10 \text{ cpo.}, R = 8,31 \cdot 10^7 \text{ erg.mole}^{-1}, K = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg.}^\circ\text{.mole}^{-1}.$$

Corrigé

Lorsque la diffusion du compartiment (1) vers le compartiment (2) ne modifie pas la concentration du deuxième compartiment, la diminution de la concentration du premier compartiment suit la relation exponentielle démontrée précédemment : $C = C_0 e^{-Kt}$

$$\Rightarrow \log \frac{dC}{C} = -\frac{DS}{Ve} t \Rightarrow D = \frac{Ve}{tS} \log \frac{C}{C_0} \Rightarrow D = \frac{10 \cdot 10^{+3} \cdot 10^{-2}}{3600 \cdot 10^{+4}} \log \frac{0,5}{3} = 498 \text{ cm}^2/\text{s}$$

D'autre part, nous savons que le coefficient de diffusion est défini par : (L'exercice 1)

$$D = \frac{KT}{f} = \frac{KT}{6\pi\eta r} \Rightarrow r = \frac{KT}{6\pi\eta D} \Rightarrow r = \frac{1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 273}{6 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 498} \Rightarrow r = 4 \cdot 10^{-17} \text{ cm}$$

La valeur de (r) représente le diamètre moléculaire, alors pour que la diffusion puisse avoir lieu, il faut que le diamètre des pores de la membrane doivent être supérieur au diamètres moléculaires.

EXO. V:

a) Le Coefficient de diffusion du lactose est de $(4,8 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1})$ et sa masse molaire est de 342 g.

Calculer le coefficient de diffusion de l'urée si sa masse molaire est de 60 g.

b) Pour épurer de l'urée dans un système à deux compartiments séparés par une membrane, il faut que le diamètre des molécules soit inférieur au diamètre des pores de la membrane. Calculer sa valeur minimale.

c) Cette membrane est utilisée dans la séparation de deux compartiments d'un dispositif de rein artificielle où le rein est considéré comme le compartiment (A). On désire épurer un volume de 10 dm^3 à une concentration de 6 g/l . pour la réduire à $0,3 \text{ g/l}$. (le même liquide plasmatique est contenu dans les deux compartiments sauf que dans le compartiment (B) sa concentration en urée est nulle qu'elle que soit la diffusion de (A vers B). La surface de diffusion $s = 10^3 \text{ cm}^2$ et l'épaisseur de la membrane $75 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

Après une demi-heure et suite à une panne technique le processus de diffusion s'arrête. Pour continuer la réduction de la concentration au seuil voulu, calculer le volume (V_B) du liquide plasmatique qu'il faudra réunir en (B).

$$\eta = 10^{-2} \text{ Poise ; } \quad T = 37^\circ$$

Corrigé

a) Pour calculer le coefficient de diffusion de l'urée, nous savons que le coefficient de diffusion est inversement proportionnel à la racine cubique de la masse molaire (exo.1).

$D = \frac{A}{\sqrt[3]{m}}$ Cette relation est appliquée sur chaque cas séparément :

$$D_L = \frac{A}{\sqrt[3]{m_L}} \text{ et } D_U = \frac{A}{\sqrt[3]{m_U}} \Rightarrow \frac{D_U}{D_L} = \frac{A}{\sqrt[3]{m_U}} \cdot \frac{\sqrt[3]{m_L}}{A} \Rightarrow \frac{D_U}{D_L} = \frac{\sqrt[3]{m_L}}{\sqrt[3]{m_U}} \Rightarrow$$

$$D_U = D_L \frac{\sqrt[3]{m_L}}{\sqrt[3]{m_U}} \Rightarrow 4,8 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt[3]{342}}{\sqrt[3]{60}} = 8,55 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Pour calculer le diamètre minimal des pores de la membrane, on calcule le diamètre des molécules en question (voir exercice 4):

$$D = \frac{KT}{f} = \frac{KT}{6\pi\eta r} \Rightarrow r = \frac{KT}{6\pi\eta D} \Rightarrow r = \frac{1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 310}{6,314 \cdot 10^{-2} \cdot 8,55 \cdot 10^{-6}} = 2,65 \cdot 10^{-8} \text{ Cm}$$

c) Lorsque la diffusion du compartiment (1) vers le compartiment (2) ne modifie pas la concentration en (2), la diminution de la concentration du compartiment (1) suit la relation exponentielle $C = C_0 e^{-Kt}$ (voir exercice 3). Après une demi heure, on calcule la concentration restante dans le compartiment (1) :

$$C = C_0 e^{-\frac{DS}{Ve}t} \Rightarrow C = 6 e^{-\frac{8,55 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3}{10 \cdot 75 \cdot 10^{-2}} \cdot 1800} = 4,88 \text{ g/l}$$

A partir de ce moment, et suite à la panne du dispositif de renouvellement du liquide du deuxième compartiment, la diffusion de (1) vers (2) fait augmenter la concentration en (2).

(Voir exercice 2).

Pour réduire la concentration du compartiment (1) à 0,3 g/l, il faut atteindre l'équilibre à cette concentration.

$$C_e V_A + C_e V_B = M \Rightarrow C_e V_B = M - C_e V_A \Rightarrow V_B = (M - C_e V_A) / C_e$$
$$V_B = (M - C_e V_A) / C_e \Rightarrow V_B = V_A [C_{0A} / C_e - 1] \Rightarrow V_B = 10 (6/0,3 - 1) = 190 \text{ l}$$

Osmose et pression osmotique

EXO. I:

Un sujet de 60 kg possède les caractéristiques suivantes:
50 % de sa masse représente la masse du liquide intracellulaire.
20 % de sa masse représente la masse du liquide extracellulaire.
L'osmolarité est estimée à 280 mOs / l. Es que ce taux est normal ? (le taux normal est compris entre 300 et 310 mOs / l.).

a) Calculer le nombre de milli osmole dans chaque compartiment.

b) On a administré à ce sujet 36,27 g de NaCl dans (02 l) d'eau. Dans quel sens sera le flux de l'eau par rapport à la membrane cellulaire.

Calculer l'osmolarité d'équilibre du plasma. $\text{Cl}^{35,5}$, Na^{23} .

Corrigé

A première vue, cette valeur est en dessous du seuil du normal.

On considère par approximation que (1Kg = 1l)

La masse du liquide intracellulaire: $50.60 / 100 = 30 \text{ Kg} = 30 \text{ l}$.

La masse du liquide extracellulaire: $20.60 / 100 = 12 \text{ Kg} = 12 \text{ l}$.

Le nombre de milli-Osmole dans le compartiment intracellulaire : $280.30 = 8400$ milli-Os

Le nombre de milli-Osmole dans le compartiment Extracellulaire : $280.12 = 3360$ milli-Os

Le nombre de milli-Osmole rajouté contenu dan 36,27 g de NaCl :

$36,27 / 58,5 = 0,62 \text{ mole} = 0,62 \cdot 2 = 1,24 \text{ Osmole} = 1240$ milli-Osmole

Le nouveau nombre de milli-Osmole dans le compartiment extra-dellulaire :

$3360 + 1240 = 4600$ milli-Os (car la valeur ajoutée est au niveau du compartiment extracellulaire dans un premier temps).

Le nouveau volume dans le compartiment extra-Cel.

$12 + 2 = 14 \text{ l}$

La nouvelle osmolarité dans le compartiment extra-Cel.

$4600 / 14 = 328,57 \text{ mOS / l}$

Cette valeur à comparer avec celle intra-Cel. qui reste toujours 280 mOs/l, on constate que la concentration extra-Cel. est supérieure à celle intra-Cel.

Le flux de diffusion de l'eau s'effectue donc du milieu intra. Vers milieu extra. (Sur le plan sensation cela se traduit par la soif). Cette diffusion continue jusqu'à l'équilibre.

L'osmolarité d'équilibre :

Nombre Total / Volume Total : $4600+8400 / 30+14 \Rightarrow 13000/44 = 295,45 \text{ mOS / l}$

On constate alors que cette valeur est toujours en dessous de la valeur normale, néanmoins elle se rapproche.

EXO. II:

La remontée de la sève dans les arbres est le résultat de la pression osmotique exercée par la différence de concentration du sucre entre la sève au niveau des racines et l'eau de la terre.

Si (1%) de la masse la sève est sous forme de sucre ($\text{C}_{12} \text{H}_{22} \text{O}_{11}$) et la température est de 27°C

* Calculer la concentration du sucre dans la sève exprimée en mole / litre.

* Calculer la pression osmotique.

* La hauteur maximale atteinte par la sève au niveau de ces arbres.

$\text{O}16, \text{H}1, \text{C}12, \text{R} = 8,31 \text{ J.}^\circ\text{K.mole}^{-1}$.

Corrigé

Pour calculer la concentration en mol/litre ; on considère un litre de la sève qui équivaut à 1Kg.

1Kg = 1000g \Rightarrow 1 % de cette masse de la sève est sous forme de sucre :

Masse du sucre dans un litre de la sève : $1000 / 100 = 10$ g

Masse molaire du sucre $(12.12 + 22.1 + 16.11) = 342$ g.

Alors la concentration : $10/342 = 0,029$ mol/litre

La pression osmotique : $\pi = RT C \Rightarrow \pi = 8,31. 300. 0,029.10^{+3} = 7,3.10^{+4}$ Pa.

La hauteur maximale atteinte par la sève au niveau des ces arbres :

La pression osmotique est équilibrée par la pression de la colonne du liquide dans les tiges qui est ($\rho.g.h$).

$$\Rightarrow \pi = \rho.g.h \Rightarrow h = \pi / \rho.g \Rightarrow h = 7,3.10^{+4} / 10^{+3}.10 = 7,3 \text{ m.}$$

Il est à noter que cette valeur est mesurée à partir des racines jusqu'au sommet de l'arbre.

EXO. III:

Supposons que la loi de la pression osmotique est applicable dans le cas d'un rein ayant sécrété pendant 12 h. (01 l.) d'urée et si

$$\Delta T = 2,24 \text{ }^\circ\text{C.}, \quad RT = 2600 \text{ J.}, \quad K_{cr} = 1,86 \text{ }^\circ\text{l / os}$$

a) Calculer la puissance moyenne correspondante.

b) Quelle masse faudra-il soulever à une hauteur de (01 m) pour développer le même travail.

c) Quelle est la pression osmotique si ce travail est développé en 02 s.

Corrigé

$$1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$12 \text{ h} = 43200 \text{ s}$$

Pour calculer la pression osmotique, on doit déterminer la concentration. Celle-ci est calculée à partir de la loi de Raoult : (avec K_{cr} : constante cryoscopique et ΔT : la différence de température de congélation entre la solution et son solvant)

$$\Delta T = K_{cr}.C \Rightarrow C = \Delta T / K_{cr}.$$

La pression osmotique :

$$\pi = RT C = RT(\Delta T / K_{cr}) \Rightarrow \pi = 2600.2,24/1,86 = 3131,18 \text{ Pa.}$$

Pour calculer la puissance développée, il faut commencer par calculer le travail.

$$W = \pi.V$$

$$\text{La puissance: } P = W / t \Rightarrow P = \pi.V / t \Rightarrow P = (3131,18.10^{-3}) / (12.3600) = 7,24.10^{-5} \text{ W}$$

La pression si ce travail est développé en (2s) :

$$P = \pi.V / t \Rightarrow \pi = P.t / V. \Rightarrow \pi = 7,24.10^{-5} / 10^{-3}.2 = 14,48.10^{-2} \text{ Pa}$$

Membranes biologiques

EXO. I:

Le potentiel d'une membrane cellulaire est de 90 mV. et la concentration des ions Na^+ dans le milieu extracellulaire est de 144 mMole / l.

Calculer la concentration intracellulaire lors de l'équilibre électrique.

La concentration de ces ions dans le milieu intracellulaire est de 12 mMole / l. dans les mêmes conditions, Calculer le potentiel de la membrane.

$$RT / ZF = 60 \text{ mV.}$$

Corrigé :

Lors de l'équilibre électrique, le potentiel de la membrane est donné par la relation :

$$V = \frac{RT}{ZF} \log \frac{C_e}{C_i} \Rightarrow 90 = 60 \log \frac{C_e}{C_i} \Rightarrow \frac{C_e}{C_i} \Rightarrow e^{1,5} \Rightarrow C_i = \frac{144}{4,48} \Rightarrow C_i = 32,14 \text{ mMole / l}$$

Calcul de (V)

$$V = \frac{RT}{ZF} \log \frac{C_e}{C_i} \Rightarrow V = 60 \log \frac{144}{12} \Rightarrow V = 150 \text{ mV}$$

EXO. II:

La concentration des ions K^+ dans le milieu intracellulaire est de 104 mMole / l. et de 14 mMole / l. dans le milieu extracellulaire.

La force appliquée sur un ion K^+ à l'intérieur de la membrane est de $3,2 \cdot 10^{-12}$ N.

Calculer l'épaisseur de la membrane cellulaire.

Après un temps (t), cette force devient $1,6 \cdot 10^{-12}$ N, dans les mêmes conditions.

Calculer la concentration extracellulaire.

Calculer le travail développé par ces ions s'ils diffusent avec une vitesse de $5 \cdot 10^{-8}$ ion.g.cm⁻².s⁻¹

Corrigé :

Lors de l'équilibre électrique, le potentiel de la membrane est donné par la relation :

$$V = \frac{RT}{ZF} \log \frac{C_e}{C_i} \Rightarrow V = 60 \log \frac{104}{14} \Rightarrow V = 120 \text{ mV}$$

A partir de la force électrique, on peut calculer le champ (E) ; car la charge est celle d'un ion (e) :

$$F = eE \Rightarrow E = \frac{F}{e} \Rightarrow E = \frac{3,2 \cdot 10^{-12}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \Rightarrow E = 2 \cdot 10^7 \text{ V / m}$$

L'épaisseur de la membrane :

$$V = El \Rightarrow l = \frac{V}{E} \Rightarrow l = \frac{120 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^7} \Rightarrow l = 60 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 60 \text{ \AA}$$

Le travail développé par ces ions :

Notons que la charge ionique qui diffuse est exprimée en (ion.g) cette charge doit être exprimée en Colomb :

$5 \cdot 10^{-8} \text{ ion.g.cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ (c'est donc la charge qui diffuse à travers une surface de 1 Cm^2 et pendant chaque seconde)

$$5 \cdot 10^{-8} \cdot 96500 = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ C. cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$W = Q \cdot V = 4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 120 \cdot 10^{-3} = 5,76 \cdot 10^{-4} \text{ J.cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

Remarque :

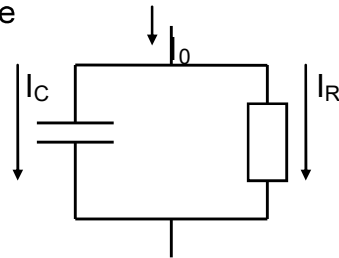
Si ce travail est à calculer pendant un temps (t) ou à travers un surface (S), il suffit alors de multiplier par le paramètre en question.

EXO. III:

Une membrane cellulaire en équilibre.

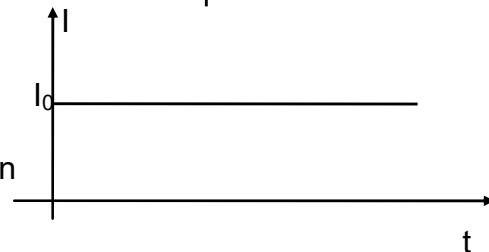
* Son schéma électrique équivalent représenté par le modèle de Hodgkin et Huxley est simplifié à un circuit composé d'une résistance et un condensateur en parallèle alimenté par une alternance rectangulaire de courant I_0 .

($t = 0 \Rightarrow I = 0$), ($t = \infty \Rightarrow I = I_0$)



* Déterminer et résoudre l'équation différentielle qui détermine la DDP au bord de ce circuit (le potentiel de la membrane). et représenter sa courbe de variation.

* Déduire l'équation du courant à travers la résistance et représenter sa courbe de variation



* Déduire l'équation du courant à travers le condensateur et représenter sa courbe de variation.

Corrigé :

A partir du schéma du circuit, on peut déduire l'équation des courants :

$I_0 = I_C + I_R$: (le courant total est divisée entre le condensateur et la résistance).

Cette équation est celle du courant, nous on cherche à déterminer un équation de différence de potentiel ; alors, on l'exprime ainsi :

$$I_0 = \frac{U}{R} + C \frac{dU}{dt}$$

Si on multiplie les deux termes de l'équation par (R) on passe à une équation de D.D.P :

$$RI_0 = U + RC \frac{dU}{dt}$$

On constate que c'est une équation différentielle du premier ordre et on doit la résoudre :

Première solution générale :

$$0 = U + RC \frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{U} = -\frac{1}{RC} dt \Rightarrow \log U = -dt/RC + A \Rightarrow U = Be^{-dt/RC} \dots\dots\dots(1)$$

Deuxième solution particulière :

$$A \quad t \rightarrow \infty \Rightarrow I \rightarrow I_0 \Rightarrow U = RI_0 \dots\dots\dots(2)$$

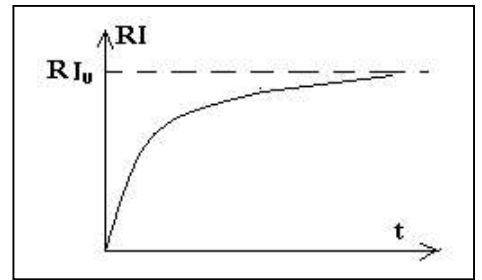
La solution de l'équation sera la somme de (1) et (2):

$$RI = Be^{-dt/RC} + RI_0$$

On calcule la constante d'intégration (B) :

$$\begin{aligned} \text{Lorsque } t = 0 &\Rightarrow I = 0 \\ \Rightarrow 0 &= B \cdot 1 + RI_0 \Rightarrow B = -RI_0 \end{aligned}$$

$$RI = RI_0 e^{-dt/RC} + RI_0 \Rightarrow RI = RI_0(1 - e^{-dt/RC})$$



L'équation du courant à travers la résistance:

Il suffit juste de diviser les deux termes de l'équation par (R) :

$$I = I_0(1 - e^{-dt/RC})$$

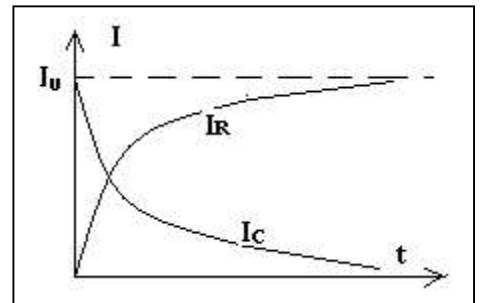
L'équation du courant à travers la capacité :

Le courant à travers le condensateur est défini par :

$$I_C = C \cdot dU/dt$$

On dérive donc l'équation de la D.D.P par rapport au temps.

$$I_C = C \cdot [RI_0 - RI_0 e^{-dt/RC}]' \Rightarrow I_C = I_0 e^{-dt/RC}$$

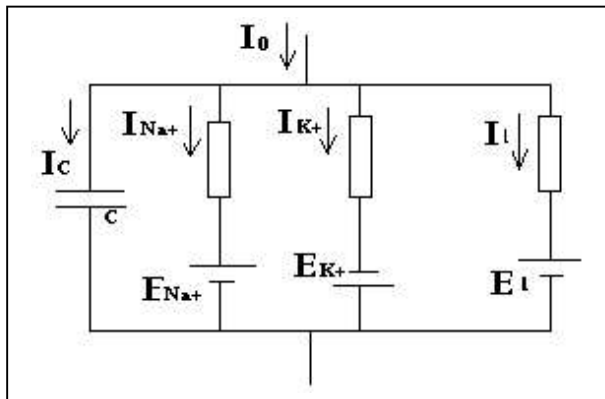


EXO. IV:

Représenter le schéma électrique équivalent d'une membrane cellulaire selon le modèle de Hodgkin & Huxley et définir le rôle de chaque branche. et déduire la relation du potentiel de la membrane cellulaire.

Corrigé :

SHAMA ELECTRIQUE EQUIVALENT D'UNE MEMBRANE CELLULAIRE: MODELE DE HODGKIN & HUXLEY:



I : Courant

I_0 : Courant électrique à travers le condensateur

C : Capacité du condensateur

I_K : Courant des ions K^+

I_{Na} : Courant des ions Na^+

I_l : Courant symbolisant les autres ions

R_K : Résistance des ions K^+

R_{Na} : Résistance des ions Na^+

R_l : Résistance des autres ions

E_K : Force électromotrice des ions K^+

E_{Na} : Force électromotrice des ions Na^+

E_l : Force électromotrice des autres ions

La membrane possède la propriété de s'opposer au passage de certains ions, cette caractéristique est représentée par une branche incluant un condensateur. Le courant à travers le condensateur $I_C = C \cdot dV / dt$

Par contre d'autres ions diffusent librement à travers elle, cette diffusion est sous l'effet de la différence de potentiel électrique représentée par une force électromotrice (E_l). Un transport ionique (mouvement de charge) n'est rien d'autre qu'un courant électrique représenté par (I_l). La propriété de commander ce passage ionique par la membrane est schématisée par une résistance variable. (Normalement le circuit n'obéit pas à la loi d'Ohm). Vu leur importance, les ions Na^+ et les ions K^+ sont représentés par des branches séparées.

$$E_K^+ = R_K^+ \cdot I_K^+ ; g_K^+ = 1 / R_K^+ \Rightarrow I_K^+ = g_K^+ \cdot E_K^+ \text{ où } g_K^+ : \text{Conductance électrique}$$

$$E_{Na}^+ = R_{Na}^+ \cdot I_{Na}^+ ; g_{Na}^+ = 1 / R_{Na}^+ \Rightarrow I_{Na}^+ = g_{Na}^+ \cdot E_{Na}^+ \text{ où } g_{Na}^+ : \text{Conductance électrique}$$

$$E_l^+ = R_l^+ \cdot I_l^+ ; g_l^+ = 1 / R_l^+ \Rightarrow I_l^+ = g_l^+ \cdot E_l^+ \text{ où } g_l^+ : \text{Conductance électrique}$$

$$\text{Le courant total } I = I_K^+ + I_{Na}^+ + I_l^+$$

En mesurant le potentiel de la membrane, cela nous permettra de déterminer les concentrations ioniques correspondantes et vice-versa.

Viscosité

EXO. I:

Une bille métallique de masse volumique $7,8 \text{ g.cm}^{-3}$ et de 4 mm de diamètre descend d'une hauteur de 1m à travers une huile de densité 1,12 sous l'effet de la pesanteur pendant 55s.

Calculer la viscosité de l'huile.

Corrigé :

La masse volumique de l'huile est calculée à partir de sa densité :

$$1,12 \Rightarrow \rho = 1,12 \cdot 10^{+3} \text{ Kg/m}^3$$

La viscosité du liquide est directement calculée suivant la méthode de mesure de Stocks :

Avec

ρ_b : Masse volumique de la bille

ρ_L : Masse volumique du liquide en question

v : Vitesse

$$\eta = \frac{2}{9} gr^2 \frac{(\rho_b - \rho_L)t}{v} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{2}{9} gr^2 \frac{(\rho_b - \rho_L)t}{x}$$

$$\eta = \frac{2}{9} gr^2 \frac{(\rho_b - \rho_L)t}{x} = \frac{2}{9} 10 \cdot (2 \cdot 10^{-3})^2 \frac{(7,8 \cdot 10^{+3} - 1,12 \cdot 10^{+3}) 55}{1} = 3,26 \text{ Pa.s}$$

EXO. II:

Une bille métallique de $7,5 \text{ g.cm}^{-3}$ de masse volumique descend à travers de l'eau dans un tube et met 2 s pour atteindre le fond. La bille met 9 s lorsque le tube est rempli de sang.

Calculer la viscosité du sang si sa densité est de 1,06 et la viscosité de l'eau 10^{-2} po.

Corrigé :

Il suffit d'écrire l'équation de mesure de la viscosité de Stocks pour l'eau et le sang et faire par la suite le rapport.

$$\eta_e = \frac{2}{9} gr^2 \frac{(\rho_b - \rho_e)t}{x} \quad ; \quad \eta_s = \frac{2}{9} gr^2 \frac{(\rho_b - \rho_s)t}{x}$$

$$\frac{\eta_s}{\eta_e} = \frac{\frac{2}{9} gr^2 \frac{(\rho_b - \rho_s)t_s}{x}}{\frac{2}{9} gr^2 \frac{(\rho_b - \rho_e)t_e}{x}} \Rightarrow \frac{\eta_s}{\eta_e} = \frac{(\rho_b - \rho_s)t_s}{(\rho_b - \rho_e)t_e} \Rightarrow \eta_s = \eta_e \frac{(\rho_b - \rho_s)t_s}{(\rho_b - \rho_e)t_e} \Rightarrow$$

$$\eta_s = 10^{-2} \frac{(7,5 - 1,06)9}{(7,5 - 1)2} = 4,45 \cdot 10^{-2} \text{ Po}$$

EXO. III:

Un liquide visqueux de viscosité « η » s'écoule à travers un tube cylindrique horizontal de rayon « R » et de longueur « L » sous l'effet d'une différence de pression « ΔP » appliquée aux extrémités.

1) Si la vitesse moyenne de l'écoulement est proportionnelle à la différence de pression, à la viscosité du liquide, au rayon du tube et à sa longueur, utiliser l'analyse dimensionnelle pour déduire la relation de Poiseuille.

2) Le rayon intérieur d'une artère sanguine est de 4 mm et le sang s'écoule à travers cette artère avec un débit de $1 \text{ cm}^3 / \text{s}$.

* Calculer la vitesse moyenne et maximale du sang dans cette artère.

* Calculer le nombre de Reynolds et déterminer la nature de l'écoulement du sang.

* Calculer la différence de pression appliquée entre deux points de cette artère distants de 1cm.

* Calculer la puissance développée par le cœur pour conserver ce flux.

$$\eta_{\text{sang}} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s.} \quad \rho_{\text{sang}} = 1,06 \text{ g.cm}^{-3}.$$

Corrigé :

(1) L'équation de la vitesse à partir des données de proportionnalités :

Concernant la viscosité (η) on suppose qu'on ne sait pas préalablement si la viscosité est directement proportionnelle ou inversement. Es qu'elle est proportionnelle au carré au cube ou à la racine carrée par exemple ? Donc dès le départ on lui affecte une puissance (α) et c'est la valeur de (α) qui déterminera la réponse. Même chose pour le rayon (R), on lui affecte une puissance (β). Il va falloir par la suite déterminer leurs valeurs.

$$\bar{V} \equiv \frac{\Delta P \cdot \eta^\alpha R^\beta}{L} \Rightarrow \bar{V} = K \cdot \frac{\Delta P \cdot \eta^\alpha R^\beta}{L}$$

- L'équation dimensionnelle est l'interprétation des paramètres physiques par leurs dimensions comme suite:

- M : Masse

- L : Longueur

- T : Temps

Ainsi :

$$L T^{-1} = (M L^{-1} T^{-2}) \cdot (M L^{-1} T^{-1})^\alpha \cdot (L^\beta) \cdot L^{-1} \Rightarrow L T^{-1} = M^\alpha L^{-\alpha} T^{-\alpha} \cdot L^\beta \cdot L^{-1}$$

$$\Rightarrow L T^{-1} = M^{1+\alpha} \cdot L^{-\alpha+\beta-2} \cdot T^{-\alpha-2} \quad \Rightarrow \text{Par comparaison des deux termes de}$$

l'équation :

1- Suivant (L) : $1 = -\alpha + \beta - 2$

2- Suivant (T) : $-1 = -\alpha - 2$

3- Suivant (M) : $0 = 1 + \alpha$

De l'équation (2 et 3) ; on peut déduire : $\alpha = -1$

En remplaçant dans l'équation (1) : $\Rightarrow \beta = 2$

On réécrit l'équation dimensionnelle de la façon finale en remplaçant les valeurs de (α) et (β)

$$\bar{V} = K \cdot \frac{\Delta P \cdot R^2}{L \eta}$$

Sachant que le Flux (Φ) est le produit de la vitesse par la surface :

$$\Phi = V \cdot S \Rightarrow \Phi = V \cdot \pi \cdot R^2$$

$$\Rightarrow \Phi = K \cdot \frac{\Delta P \cdot R^2}{L \eta} \cdot \pi \cdot R^2 \Rightarrow \Phi = K \cdot \frac{\pi \cdot \Delta P \cdot R^4}{L \eta}$$

Par comparaison avec l'équation de Poiseuille, la constante (K) sera égale à (1/8).

(2) Le calcul de la vitesse est une simple application numérique :

$$\Phi = V \cdot S \Rightarrow V = \Phi/S \Rightarrow V = \Phi/\pi \cdot R^2 \Rightarrow V = 1/\pi \cdot 16 \cdot 10^{-2} \approx 2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

(la vitesse calculée est toujours la vitesse moyenne)

$$\text{La vitesse maximale ; } V_{\max} = 2 V_{\text{moy}} \Rightarrow V_{\max} = 4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) Le nombre de Reynolds :

$$R_N = \frac{2 \cdot \bar{V} \cdot \rho \cdot R}{\eta} \Rightarrow R_N = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1,06 \cdot 10^{+3} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{2,1 \cdot 10^{-3}} = 80,79$$

On constate que $R_N < 2000 \Rightarrow$ La nature de l'écoulement du sang dans les artères est un écoulement laminaire.

(4) La différence de pression est directement calculée à partir de la relation de Poiseuille :

$$\Phi = \frac{\pi \cdot \Delta P \cdot R^4}{8L\eta} \Rightarrow \Delta P = \frac{8 \cdot \Phi \cdot L \cdot \eta}{\pi \cdot R^4} \Rightarrow \Delta P = \frac{8 \cdot \Phi \cdot L \cdot \eta}{\pi \cdot R^4} \Rightarrow \Delta P = \frac{8 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2} \cdot 2,1 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (4 \cdot 10^{-3})^4} = 0,2 \text{ Pa}$$

(5) Par définition, la puissance est :

$$P = W / t \Rightarrow P = F \cdot X / t \Rightarrow P = \Delta P \cdot S \cdot v \Rightarrow P = \Delta P \cdot \Phi \\ P = \Delta P \cdot \Phi \Rightarrow 2 \cdot 10^{-7} \text{ W}$$

EXO. IV:

La différence de pression appliquée entre deux points distants de 2 cm d'une artère sanguine de diamètre 5 mm, est de 3 Pa.

Calculer le flux du sang à travers cette artère et la puissance développée par le coeur pour conserver ce flux.

$$\eta_{\text{sang}} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad \rho_{\text{sang}} = 1,06 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Corrigé :

Le flux du sang est :

$$\Phi = \frac{\pi \cdot \Delta P \cdot R^4}{8L\eta} \Rightarrow \Phi = \frac{3,14 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2,1 \cdot 10^{-3}} = 175,22 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 / \text{s} = 17,5 \text{ cm}^3 / \text{s}$$

La puissance :

$$P = \Delta P \cdot \Phi \Rightarrow P = 3 \cdot 175,22 \cdot 10^{-7} = 526,66 \text{ W}$$

EXO. V:

Déduire la relation de Poiseuille qui détermine le flux « Φ » à travers un tube cylindrique de longueur « l » et de rayon « R » d'un liquide de viscosité « η » et sous une différence de pression appliquée « ΔP ».

(Voir la démonstration intégrale au niveau des cours)

Sédimentation

EXO. I:

On procède à une opération de séparation de deux macromolécules (A et B) par sédimentation, dans les mêmes conditions (de température et même solvant). Après une heure, la distance parcourue par la molécule (A) est de 2 cm et la distance parcourue par la molécule (B) est de 6 cm. Calculer la constante de sédimentation de la molécule (B) si la constante de sédimentation de (A) est de 20 Sv.

Corrigé :

$$S = (dx/dt) / \omega^2 x \Rightarrow S = (dx/x) / \omega^2 dt$$

Pour la molécule (A):

$$S_A = \frac{\int_0^x \frac{dx}{x}}{\omega^2 \int_0^t dt} = \frac{\log x \Big|_0^2}{\omega^2 \cdot t \Big|_0^{1800}} = \frac{\log 2}{\omega^2 \cdot 1800}$$

Pour la molécule (B):

$$S_B = \frac{\int_0^x \frac{dx}{x}}{\omega^2 \int_0^t dt} = \frac{\log x \Big|_0^6}{\omega^2 \cdot t \Big|_0^{1800}} = \frac{\log 6}{\omega^2 \cdot 1800}$$

Le rapport entre (S_A) et (S_B) :

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{\log 2 / \omega^2 \cdot 1800}{\log 6 / \omega^2 \cdot 1800} \Rightarrow \frac{S_A}{S_B} = \frac{\log 2}{\log 6} \Rightarrow S_B = S_A \cdot \frac{\log 6}{\log 2} \Rightarrow S_B = 20 \cdot \frac{\log 6}{\log 2} = 51,69 \text{ Sv.}$$

EXO. III:

Dans un tube de centrifugeuse, on procède à une séparation de deux protéines (A et B) leurs constantes de sédimentation « S_A » et « S_B ».

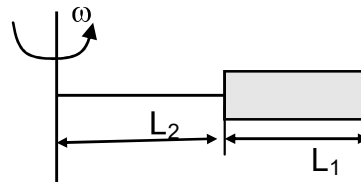
La longueur du tube « L_1 » et la distance entre sa première extrémité et l'axe de rotation est « L_2 », la vitesse de rotation « ω ».

* Ecrire l'expression de l'accélération moyenne (au milieu du tube)

* Ecrire l'expression de la vitesse pour les deux protéines.

* Pour deux molécules (A et B) situées à la première extrémité du tube à ($t=0$), Situer la position de la molécule (B) lorsque la molécule (A) soit totalement sédimentée.

A.N. : $L_1 = 3 \text{ cm}$, $L_2 = 6 \text{ cm}$, $S_A = 40 \text{ Sv.}$, $S_B = 20 \text{ Sv.}$,



Corrigé :

- L'expression de l'accélération moyenne :

$$\text{Au milieu du tube } (x = L_2 + \frac{1}{2} L_1) \Rightarrow \gamma = \omega^2 \cdot x \Rightarrow \gamma = \omega^2 \cdot (L_2 + \frac{1}{2} L_1)$$

- L'expression de la vitesse pour chaque protéine :

$$S = \frac{V}{\gamma}$$

$$\Rightarrow S_A = \frac{V_A}{\gamma} \quad \Rightarrow V_A = S_A \cdot \gamma$$

$$\Rightarrow S_B = \frac{V_B}{\gamma} \quad \Rightarrow V_B = S_B \cdot \gamma$$

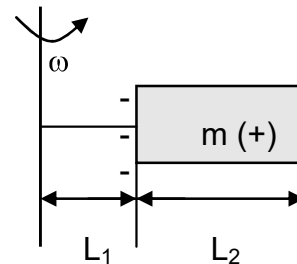
$$\Rightarrow \frac{X_A}{t} = S_A \cdot \gamma \quad \text{et} \quad \frac{X_B}{t} = S_B \cdot \gamma$$

Le rapport entre (X_B) et (X_A) :

$$\frac{X_B/t}{X_A/t} = \frac{S_B \cdot \gamma}{S_A \cdot \gamma} \Rightarrow \frac{X_B}{X_A} = \frac{S_B}{S_A} \Rightarrow X_B = X_A \cdot \frac{S_B}{S_A} \Rightarrow X_B = 9 \cdot \frac{20}{40} \Rightarrow X_B = 4,5 \text{ cm (à partir de l'axe de rotation ; c'est-à-dire 1,5 cm à partir de la première extrémité du tube).}$$

EXO. IV:

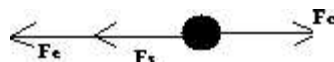
Etudier le mouvement des particules dissoutes dans un tube de centrifugeuse lorsque une DDP est appliquée (Fig.) et que ces particules sont chargées positivement.



:

Corrigé

Pour étudier le mouvement de cette molécule chargée et sur laquelle s'exerce une centrifugation, il faut prendre en considération la somme des forces qui agissent sur la masse.



1- Dans le sens positif des X, la force de centrifugation (F_c)

2- Dans le sens opposé, les forces de frottement (F_s) et celle électrique (F_e)

Alors :

$$F_c = m \cdot \omega^2 \cdot x$$

$$F_s = f \cdot v = f \cdot dx/dt \quad (f : \text{Coefficient de frottement de Stocks} = 6\pi r \eta)$$

$$F_e = Q \cdot E = Q \cdot V / L_2 \quad (V : \text{le potentiel électrique appliqué})$$

$$(L_2 : \text{longueur du tube})$$

A l'équilibre ;

$$F_c = F_e + F_s$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot x = f \cdot dx/dt + Q \cdot E$$

C'est une équation différentielle du premier ordre (linéaire)

$$f \cdot \frac{dx}{dt} - m\omega^2 x = QE \Rightarrow f \cdot \frac{dx}{dt} + m\omega^2 x = 0$$

$$f \frac{dx}{dt} = m\omega^2 x \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \frac{m\omega^2}{f} \int dt$$

$$\log x = \frac{m\omega^2}{f} t + \lambda \Rightarrow x_2 = C \ell^{\frac{m\omega^2}{f} t}$$

$$x = C(t) \ell^{\frac{m\omega^2}{f} t}$$

$$x' = C'(t) \ell^{\frac{m\omega^2}{f} t} + C(t) \frac{m\omega^2}{f} \ell^{\frac{m\omega^2}{f} t}$$

$$f'(x) - m\omega^2 x = QE.$$

$$fC'(t) \ell^{\frac{m\omega^2}{f} t} + C(t) m\omega^2 \ell^{\frac{m\omega^2}{f} t} - (m\omega^2 \cdot C(t) \ell^{\frac{m\omega^2}{f} t}) = QE$$

$$C'(t) = \frac{QE}{f} \ell^{-\frac{m\omega^2}{f} t}$$

$$C(t) = \frac{QE}{f} \int \ell^{-\frac{m\omega^2}{f} t} dt$$

$$C(t) = -\frac{QE}{m\omega^2} \int \ell^{-\frac{m\omega^2}{f} t} dt + \alpha$$

$$X = \left[-\frac{QE}{m\omega^2} \ell^{-\frac{m\omega^2}{f} t} + \alpha \right] \ell^{\frac{m\omega^2}{f} t}$$

$$X = -\frac{QE}{m\omega^2} + \alpha \ell^{\left(\frac{m\omega^2}{f}\right)t}$$

Pour calculer la constante d'intégration,

$$\text{à } t = 0 \Rightarrow x = L_1$$

$$L_1 = \frac{-QE}{m\omega^2} + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{L_1 + QE}{m\omega^2}$$

L'équation finale de la variation de (x) en fonction du temps :

$$X = \frac{-QE}{m\omega^2} + \frac{L_1 + QE}{m\omega^2} \ell^{\left(\frac{m\omega^2}{f}\right)t}$$

$$X = \frac{1}{m\omega^2} \left[\frac{QV}{L_2} + \left(L_1 + \frac{QV}{L_2} \right) \right] \ell^{\left(\frac{m\omega^2}{f}\right)t}$$