UNIVERSITE MOHAMMED V
FACULTE DES SCIENCES
RABAT – AGDAL

Année universitaire 2013 / 2014
SMP4 - Module 16 - Physique 7

TD de Thermodynamique II
Série n° 3

$\boxed{dU = \delta Q = dH}$

Exercice 1 : Critère d'évolution pour un système isolé

Deux solides Σ_1 et Σ_2 supposés incompressibles, initialement aux températures respectives T_{1i} et T_{2i}, sont mis en contact thermique. L'ensemble étant isolé du milieu extérieur.

1) En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système constitué des deux solides, montrer que l'on ne peut pas prévoir le sens des échanges thermiques. Conclure.
2) Chaque solide a une masse **m** et une chaleur massique **c**, supposées constantes. En exprimant la variation de l'enthalpie ΔH du système, déterminer la relation liant les températures T_1 et T_2 des solides à un instant quelconque de l'évolution. Peut-on prévoir le sens d'évolution de T_1 indépendamment de T_2 ? Conclure.
3) Qu'observe-t-on expérimentalement pour une telle expérience ? Utiliser la question 2/ pour donner la valeur de la température d'équilibre T_f.
4) On s'intéresse à la fonction $f(T_1,T_2) = T_1T_2$. Montrer, en tenant compte de la relation précédente, que cette fonction est maximale pour $T_1 = T_2$. Que peut-on dire alors de la fonction f au cours de l'expérience ?
5) Comment doit-t-on modifier $f(T_1,T_2)$ pour obtenir l'entropie du système constitué des deux solides ? Généraliser au cas de deux solides de masses m_1 et m_2 et de chaleurs massiques c_1 et c_2.

Exercice 2 : Calcul des variations d'entropie

Deux systèmes monophases notés Σ_1 et Σ_2, initialement au repos à températures T_1 et T_2, de capacités calorifiques à pression constante C_{p1} et C_{p2}, sont mis en contact thermique, la pression restant constante au cours de l'évolution. L'ensemble $(\Sigma_1 + \Sigma_2)$ étant isolé du milieu extérieur. Au bout d'un temps suffisamment long, il s'établit un état d'équilibre où les deux systèmes ont la même température T_f (principe 0).

1) La transformation est-elle réversible ?
2) Calculer les quantités de chaleur Q_1 et Q_2 échangées par chacun des systèmes ainsi que la température finale T_f.
3) Calculer les variations d'entropie ΔS_1 et ΔS_2 de chacun des deux systèmes ainsi que ΔS_{1+2} de l'ensemble des deux systèmes.

4.a) On se place dans le cas $T_1 > T_2$, quels sont les signes de ΔS_1, ΔS_2 et ΔS_{1+2} ?
4.b) On se place dans le cas $T_1 < T_2$, quels sont les signes de ΔS_1, ΔS_2 et ΔS_{1+2} ?
4.c) On fera l'étude mathématique de ΔS_{1+2} pour $C_{p1} = C_{p2} = C_p$.

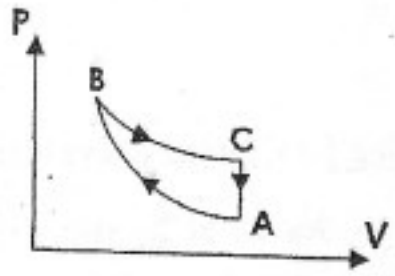
??? ✓ 5) On étudie le cas où le système Σ_2 constitue une source de chaleur ayant une capacité calorifique " infinie " (atmosphère, eau d'une rivière ou d'un lac, ...). Que deviennent les résultats des questions précédentes ? On étudiera mathématiquement ΔS_{1+2} en fonction de $x = T_1/T_2$.

exosup.com page facebook

6) Reprendre le texte, les raisonnements et les résultats si les transformations pour chacun des systèmes sont isochores.

Exercice 3 : Transformation cyclique d'un gaz parfait.

Une masse constante de gaz parfait parcourt le cycle représenté ci-contre. Le rapport des capacités thermiques à pression et à volume constants de cette masse est $\gamma = 1{,}4$.

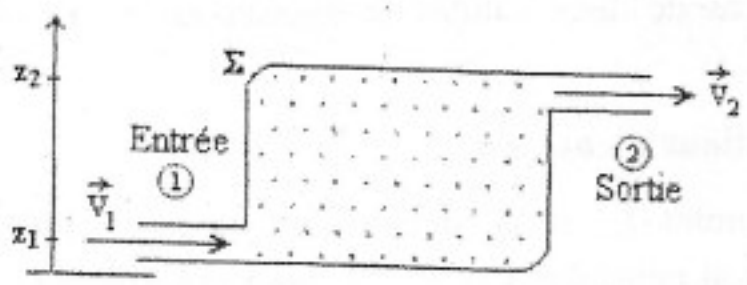


Le gaz initialement dans l'état **A** caractérisé par une pression $P_A = 1$ **bar**, une température $T_A = 144{,}4$ **K** et un volume $V_A = 414$ **cm³**, subit une évolution isentropique qui l'amène à la température $T_B = 278{,}8$ **K**.

1) Calculer la pression P_B et le volume V_B dans l'état **B**.
2) Le gaz est mis en contact avec une source de chaleur à la température T_B et subit une détente isotherme réversible qui ramène son volume à sa valeur initiale V_A. Calculer la pression P_C à l'état **C**.
3) Calculer la variation d'entropie ΔS_{BC} au cours de la transformation $B \rightarrow C$.
4) Le gaz dans l'état **C** est alors mis en contact avec une source de chaleur à la température T_A tandis que son volume est maintenu constant. Calculer la variation d'entropie ΔS_{CA} et l'entropie crée S_C au cours de la transformation $C \rightarrow A$.

Exercice 4 : Écoulement d'un fluide.

Dans un volume de contrôle Σ, un fluide pénètre en **1** à la vitesse V_1 et à l'altitude z_1 et ressort en **2** à la vitesse v_2 et à l'altitude z_2 (voir figure).



Entre les instants **t** et **t + dt**, une masse dm_1 de fluide entre dans le volume de contrôle Σ et une masse dm_2 en ressort.

Le système, délimité par la frontière Σ, reçoit de l'extérieur une énergie chaleur δQ_e et une énergie travail δW_e autre que le travail des forces de pressions.

1) Déterminer la variation d'énergie interne totale entre les instants **t** et **t + dt**.

2) En déduire qu'en régime permanent, et si le système ne reçoit de l'extérieur ni chaleur ni travail, on a :

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = h_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

3) Déduire la vitesse **v** d'écoulement d'un gaz parfait à la sortie d'un mince tube horizontal, si la vitesse du gaz à l'entrée de Σ est négligeable, et ses températures sont $T_1 = 300$ **K** à l'entrée et $T_2 = 295$ **K** à la sortie.

Données : La masse molaire du gaz : $M = 28$ **g/mol** ; la constante universelle des gaz parfaits : $R = 8{,}314$ **J.K⁻¹.mol⁻¹** ; le rapport des chaleurs spécifiques : $\gamma = c_p/c_v = 7/5$.

exosup.com page facebook

Corrigé exercice 1 :

1) Si on suppose que les solides sont incompressibles, il n'y aura pas d'échanges énergétiques entre les solides autres que les transferts thermiques Q_1 et Q_2. L'ensemble étant isolé, $\Delta U_{total} = 0$, soit $Q_1 + Q_2 = 0$. Si le solide 1 s'échauffe, le solide 2 se refroidit (et vice versa) ; cependant rien dans l'application du premier principe ne permet d'interdire au solide chaud de s'échauffer au contact du solide froid.

2) On sait que si les solides sont incompressibles, $dH = dU = m.c.dt$, soit en intégrant entre T_{1i} et T_1 d'une part et entre T_{2i} et T_2 d'autre part en utilisant l'extensivité de H ou U :

$$\Delta U = \Delta H = m.c.\{(T_1 - T_{1i}) + (T_2 - T_{2i})\} = m.c.\{(T_1 + T_2)-(T_{1i} + T_{2i})\} = 0, \qquad (1)$$

soit :

$$T_1 + T_2 = T_{1i} + T_{2i}. \qquad (2)$$

$(T_1 + T_2)$ est donc un invariant de la transformation ; cependant aucune information qualitative supplémentaire n'apparaît sur le sens d'évolution des deux températures indépendamment l'une de l'autre : le premier principe est incapable de prévoir le sens des échanges thermiques.

3) Si on réalise l'expérience, on obtient au bout d'un certain temps, lié au type et à la qualité des échanges thermiques entre le deux corps, un équilibre thermique pour lequel les deux solides seront à la même température $T_1 = T_2 = T_f$.

D'après la relation (2) :

$$T_f = \frac{T_{1i} + T_{2i}}{2} \qquad (3)$$

4) D'après la relation (2), $T_1 + T_2 = cste \rightarrow dT_1 = - dT_2$,

$f(T_1,T_2) = T_1T_2 \rightarrow df = T_2dT_1 + T_1dT_2 = (T_2 - T_1)\, dT_1 = (T_1 - T_2)\, dT_2$.

df s'annule pour $T_1 = T_2 \rightarrow$ la fonction f est donc extrémale pour la valeur de la température d'équilibre.

or : $$T_f^{\,2} = \left(\frac{T_{1i} + T_{2i}}{2}\right)^2 = \frac{(T_{1i})^2 + 2T_{1i}T_{2i} + (T_{2i})^2}{4} = \frac{(T_{1i})^2 - 2T_{1i}T_{2i} + 4T_{1i}T_{2i} + (T_{2i})^2}{4}.$$

$$\rightarrow \quad T_f^{\,2} = T_{i1}T_{i2} + \left(\frac{T_{1i} - T_{2i}}{2}\right)^2 > T_{i1}T_{i2} \text{ puisque le terme } \left(\frac{T_{1i} - T_{2i}}{2}\right)^2 \text{ est toujours positif.}$$

La fonction f croît au cours de l'évolution du système.

Autrement dit, en imposant à la fonction f de croître au cours de l'évolution et d'être maximale à l'équilibre, on retrouve le résultat expérimental : le solide chaud chauffe le solide froid ; ils atteignent une température commune d'équilibre.

5) La fonction $f(T_1,T_2) = T_1T_2$ est bien une fonction d'état du système $\Sigma_1 + \Sigma_2$ puisque sa différentielle :

$$df = \frac{\partial f}{\partial T_1} dT_1 + \frac{\partial f}{\partial T_2} dT_2 = T_2dT_1 + T_1dT_2 \text{ est une différentielle totale exacte car :}$$

$$\frac{\partial}{\partial T_2}\left(\frac{\partial f}{\partial T_1}\right) = \frac{\partial}{\partial T_1}\left(\frac{\partial f}{\partial T_2}\right) = 1,$$

mais elle n'est pas extensive puisqu'elle est le produit de deux variables intensive T_1 et T_2.

En passant au logarithme et en multipliant le résultat par m, on a une fonction d'état :

$$g = m\,[\ln T_1 + \ln T_2]$$

qui est extensive et qui a le même sens d'évolution que f.

En multipliant cette quantité par c, on peut obtenir l'unité convenable de l'entropie S et écrire :

$$S(T_1,T_2) = m.c.[\ \ln T_1 + \ln T_2\ ]$$

En posant : $S_0 = S\,(T_0,T_0)) = mc\ln(T_0)^2$, on peut écrire :

exosup.com page facebook

$$S(T_1,T_2) = S_0 + mc.[\ln T_1 + \ln T_2] - mc\ln(T_0)^2$$

ou encore :

$$S(T_1,T_2) = S_0 + mc.\ln\left(\frac{T_1T_2}{T_0^{\,2}}\right) = S_0 + mc.\left[\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + \ln\left(\frac{T_2}{T_0}\right)\right],$$

c'est la fonction entropie constituée des deux solides $\Sigma_1 + \Sigma_2$.

Si les deux solides ont des masses et des chaleurs massiques différentes, on peut proposer la relation :

$$S(T_1,T_2) = S_0 + m_1c_1.\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + m_2c_2.\ln\left(\frac{T_2}{T_0}\right).$$

L'intérêt de cette étude réside dans la mise en évidence de l'insuffisance du premier principe et de la construction d'une fonction d'état pouvant servir de critère d'évolution pour un système isolé.

Exercice 2 :

1) Il n'y a pas équilibre thermique entre les deux systèmes : la transformation est donc irréversible.

2) Chaque système subit une **transformation isobare** : leur variation d'enthalpie respective est égale à la quantité de chaleur que chacun échange avec son environnement (le corps voisin). La température d'équilibre finale T_f est la même pour les 2 corps.

$$Q_1 = \Delta H_1 = c_{p1}(T_f - T_1) \qquad \text{et} \qquad Q_2 = \Delta H_2 = c_{p2}(T_f - T_2)$$

En effet : pour un système fermé, l'expression du 1er principe s'écrit :

$$du = \delta q + \delta w = \delta q - PdV \qquad \text{ou} \qquad \delta q = du + PdV = d(u + PV) = dh \quad (P = cte)$$

Le système, ensemble des deux corps, subit une transformation adiabate : $Q_1 + Q_2 = 0 = \Delta H_1 + \Delta H_2$.

Soit :

$$T_f = \frac{c_{p1}\,T_1 + c_{p2}\,T_2}{c_{p1} + c_{p2}}$$

3) Le système des deux corps étant isolé du milieu extérieur, l'entropie est une fonction extensive, donc additive : $dS = dS_1 + dS_2$ (dissipation négligeable dans les deux corps).

Pour le système Σ_1 : $dS_1 = \dfrac{\delta Q_1}{T} = \dfrac{c_{p_1}dT}{T}$, $\quad \Delta S_1 = c_{p_1}\ln\dfrac{T_f}{T_1}$

Il en est de même pour le système Σ_2, et $\quad \Delta S_2 = c_{p_2}\ln\dfrac{T_f}{T_2}$.

La variation d'entropie du système des deux corps est donc : $\Delta S_{12} = \Delta S_1 + \Delta S_2$:

$$\Delta S_{12} = c_{p_1}\ln\frac{T_f}{T_1} + c_{p_2}\ln\frac{T_f}{T_2}$$

4) a) $T_1 > T_2 \Rightarrow T_2 < T_f < T_1 \Rightarrow \Delta S_1 \le 0$ et $\Delta S_2 \ge 0$

b) $T_1 < T_2 \Rightarrow T_2 > T_f > T_1 \Rightarrow \Delta S_1 \ge 0$ et $\Delta S_2 \le 0$

Pour ce qui concerne le signe de ΔS_{1+2}, le mieux est de reprendre le second principe de la thermodynamique : $\quad \Delta S_{1+2} = S^e + S^i = S^i \qquad (S^e = 0$ car le système est isolé)

exosup.com page facebook

$\Delta S_{1+2} = S^i > 0$ ($\forall T_1$ et T_2). Pour l'ensemble des deux systèmes, la transformation est adiabate et irréversible.

c) Avec : $c_{p1} = c_{p2} = c_p$ on a :

$$\Delta S_1 = c_p \ln\frac{T_f}{T_1} \text{ et } \Delta S_2 = c_p \ln\frac{T_f}{T_2} \quad \text{et} \quad T_f = \frac{c_P T_1 + c_P T_2}{2 c_p} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{1+2} = c_p \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\cdot\frac{T_f}{T_2}\right) = c_p \ln\left(\frac{[T_1+T_2]^2}{4T_1T_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{1+2} \geq 0 \text{ si } [T_1+T_2]^2 \geq 4T_1T_2 \text{ ;}$$

Or : $[T_1+T_2]^2 = T_1^2 + 2T_1T_2 + T_2^2 = (T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2) + 4T_1T_2 = [T_1 - T_2]^2 + 4T_1T_2$

$[T_1 - T_2]^2 \geq 0 \,(\forall T_1 \text{ et } T_2) \quad \Rightarrow \quad [T_1+T_2]^2 \geq 4T_1T_2 \;(\forall T_1 \text{ et } T_2)$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{1+2} = S^i \geq 0.$$

5) Nous prenons $c_{p1} = c_p$ et $c_{p2} \to \infty$

$$T_f = \frac{c_P T_1 + c_{P2} T_2}{c_p + c_{p2}} = \frac{c_P T_1}{c_p + c_{p2}} + \frac{c_{P2} T_2}{c_p + c_{p2}} \to T_2 \qquad (\text{lorsque } c_{p2} \to \infty)$$

$$Q_1 = c_{p1}(T_f - T_1) \to c_p (T_2 - T_1) \quad \Rightarrow \quad \Delta S_1 \to c_P \ln\frac{T_2}{T_1}$$

$$Q_2 = -Q_1 \to c_p (T_1 - T_2)$$

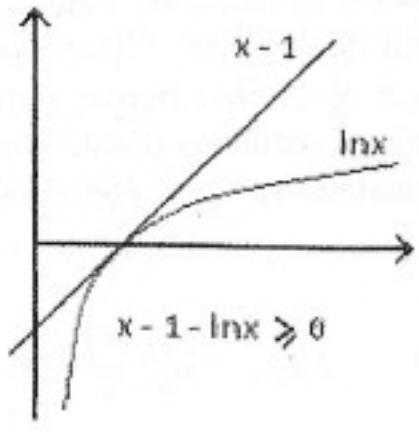
Le calcul de ΔS_2 peut être fait mathématiquement à partir de l'expression générale, par passage à la limite lorsque $c_{p2} \to \infty$.

Une démonstration plus " thermodynamique " consiste à dire que, puisque ni la température ni la pression ne changent pour le système 2, on peut envisager pour le calcul de la variation d'entropie une transformation isobare réversible, le système étant à température T_2 :

$$\Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q_2}{T_2} = \frac{Q_2}{T_2} = c_p \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

$$\Delta S_{12} = c_p\left(\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_1 - T_2}{T_2}\right) = c_p\left(\frac{T_1}{T_2} - 1 - \ln\frac{T_1}{T_2}\right)$$

En posant $x = \frac{T_1}{T_2}$ on a : $\Delta S_{12} = c_p (x - 1 - \ln x) \quad \to \quad (x - 1 - \ln x) > 0 \;\; \forall\left(x = \frac{T_1}{T_2}\right)$



exosup.com page facebook

6) Pour des transformations isochores, il convient de changer ΔH en ΔU et c_p en c_v. Les raisonnements tenus précédemment restent valables.

Corrigé exercice 3 :

1) La transformation AB est isentrope, elle est donc adiabate. L'équation d'une adiabate pour un gaz parfait est donnée par l'une des équations suivantes :

$$P.V^{\gamma} = cte \qquad (1)$$
$$T.V^{\gamma-1} = cte \qquad (2)$$
$$T^{\gamma}.P^{1-\gamma} = cte \ (3)$$

L'équation (3) permet d'écrire : $T_A{}^{\gamma}.P_A{}^{1-\gamma} = T_B{}^{\gamma}.P_B{}^{1-\gamma} = cte \quad \rightarrow \quad P_B = P_A.\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$

A.N. : $P_B = 10^5.\left(\frac{144,4}{278,8}\right)^{\frac{1,4}{1-1,4}} = 10 \text{ bar}$.

L'équation (1) permet d'écrire : $P_A.V_A{}^{\gamma} = P_B.V_B{}^{\gamma} = cte \quad \rightarrow \quad V_B = V_A.\left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

A.N. : $V_B = 414.10^{-6}.\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{1,4}} = 80 \text{ cm}^3$.

2) La transformation BC est une détente isotherme réversible : $T_C = T_B$

$\rightarrow \quad P_C V_C = nRT_C = nRT_B = P_B V_B \quad \rightarrow \quad P_C = P_B \frac{V_B}{V_A}$

A.N. : $P_C = 10.10^5.\left(\frac{80}{414}\right) = 1,93 \text{ bar}$.

3) La transformation BC est réversible : $\Delta S_{BC} = \frac{Q_{BC}}{T_B}$.

Elle est isotherme : $\Delta U_{BC} = Q_{BC} + W_{BC} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta S_{BC} = -\frac{W_{BC}}{T_B}$

Or : $W_{BC} = -\int_{V_B}^{V_C} PdV = -nRT_B \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = -nRT_B \int_{V_B}^{V_A} \frac{dV}{V} = -P_B V_B \ln\frac{V_A}{V_B}$

$\rightarrow \quad \Delta S_{BC} = \frac{P_B V_B}{T_B} \ln\frac{V_A}{V_B}$

A.N. : $\Delta S_{BC} = \frac{10.10^5.80.10^{-6}}{278,8} \ln \text{[illegible]} = +0,472 \text{ J.K}^{-1}$.

4) La transformation C → A est irréversible et isochore, mais l'état initial (P_C, V_C, T_C) et l'état final (P_A, V_A, T_A) du système sont parfaitement déterminés : l'entropie étant une fonction d'état, on peut alors imaginer une transformation C → A réversible fictive, partant du même état initial et arrivant au même état final, qui conduira à la même variation d'entropie pour le système. Ce raisonnement n'est pas possible pour la source de chaleur car son état final dépend de la nature réelle de la transformation.

On peut alors écrire :

$dS_{CA} = \frac{\delta Q}{T} = C_v \frac{dT}{T} \quad \rightarrow \quad \Delta S_{CA} = \int_{T_C}^{T_A} \frac{\delta Q}{T} = C_v \int_{T_C}^{T_A} \frac{dT}{T} = C_v \ln\frac{T_A}{T_C} = C_v \ln\frac{T_A}{T_B}$

$C_V = \frac{nR}{\gamma-1}$ et $P_A V_A = nRT_A \quad \rightarrow \quad C_V = \frac{1}{\gamma-1}\frac{P_A V_A}{T_A} \quad \rightarrow \quad \Delta S_{CA} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{P_A V_A}{T_A} \ln\frac{T_A}{T_B}$

exosup.com page facebook

A.N. : $\Delta S_{CA} = \frac{1}{1,4-1}\frac{10^5.414.10^{-6}}{144.4}\ln\frac{144,4}{278,8} = -0.472\ J.K^{-1}$

Par ailleurs, le second principe permet d'écrire : $\Delta S_{CA} = S_{CA}^{échange} + S_{CA}^{créée}$.

Or, au cours de la transformation C → A supposée réversible, le système reçoit de la source la quantité de chaleur :

$$Q_{CA} = C_V\,(T_A - T_C) = C_V\,(T_A - T_B) = \frac{1}{\gamma-1}\frac{P_A V_A}{T_A}(T_A - T_B) = -96,3\ J$$

$$\rightarrow \quad S_{CA}^{échange} = \frac{Q_{CA}}{T_{source}} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{P_A V_A}{T_A}\frac{(T_A - T_B)}{T_A}$$

A.N. : $S_{CA}^{échange} = \frac{1}{1,4-1}\frac{10^5.414.10^{-6}}{144,4}\frac{(144,4-278,8)}{144,4} = -0,668\ J.K^{-1}$.

$\rightarrow \quad S_{CA}^{créée} = \Delta S_{CA} - S_{CA}^{échange} = -0,472 + 0,668 = 0,196\ J.K^{-1} > 0$, c'est l'entropie créée en C.

On peut obtenir le même résultat en utilisant le fait qu'au cours du cycle ABCA, $\Delta S_{cycle} = 0$.
En effet, la variation d'entropie au cours de tout le cycle ABCA est :

$$\Delta S_{cycle} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = \Delta S_{BC} + S_{CA}^{échange} + S_{CA}^{créée} = 0$$

$$\rightarrow \quad S_{CA}^{créée} = -\Delta S_{BC} - S_{CA}^{échange} \qquad \rightarrow \quad S_{CA}^{créée} = -\frac{P_B V_B}{T_B}\ln\frac{V_A}{V_B} - \frac{1}{\gamma-1}\frac{P_A V_A}{T_A}\frac{(T_A - T_B)}{T_A}$$

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B} \qquad \rightarrow \quad S_{CA}^{créée} = \frac{P_A V_A}{T_A}\left[\ln\frac{V_B}{V_A} - \frac{1}{\gamma-1}\frac{(T_A - T_B)}{T_A}\right]$$

A.N.: $S_{CA}^{créée} = \frac{10^5.414.10^{-6}}{144,4}\left[\ln\frac{80}{414} - \frac{1}{1,4-1}\frac{(144,4-278,8)}{144,4}\right] = 0,196\ J.K^{-1} > 0$, c'est l'entropie.

<u>Corrigé Exercice 4</u> :

1) L'application du premier principe de la thermodynamique (ou principe de conservation de l'énergie) au fluide (système ouvert) contenu dans le volume de contrôle Σ, s'écrit :

Energie $\mathbf{dE_1}$ qui pénètre dans Σ en (1)	+	Chaleur δQ_e et travail δW_e reçus du milieu extérieur	=	Energie $\mathbf{dE_2}$ qui quitte Σ en (2)	+	Energie $\mathbf{dE}$ accumulée à l'intérieur de Σ

L'énergie accumulée à l'intérieur de Σ entre les instants t et t + dt est donc donnée par la relation-bilan :

$$dE = dE_1 - dE_2 + \delta W_e + \delta Q_e \qquad (1)$$

avec :

$$dE_1 = \underbrace{u_1 dm_1}_{\text{énergie interne}} + \underbrace{\frac{1}{2}dm_1 v_1^2}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{g\,z_1 dm_1}_{\text{énergie potentielle}} + \underbrace{p_1 v_1 dm_1}_{\text{travail des forces de pression}} \qquad (2)$$

De même :

$$dE_2 = u_2 dm_2 + \frac{1}{2}dm_2 v_2^2 + g\,z_2 dm_2 + p_2 v_2 dm_2 \qquad (3)$$

La relation (1) s'écrit donc, compte tenu de (2) et (3), et en introduisant les enthalpies massiques $h_1 = u_1 + p_1 v_1$ et $h_2 = u_2 + p_2 v_2$:

$$dE = \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} + g\,z_1\right)dm_1 - \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} + g\,z_2\right)dm_2 + \delta W_e + \delta Q_e \qquad (4)$$

exosup.com page facebook

2) En régime permanent :

- le débit massique du fluide est constant $\rightarrow dm_1 = dm_2 = dm$;
- il ne peut donc y avoir d'accumulation d'énergie $\rightarrow dE = 0$;
- le fluide ne reçoit de l'extérieur ni chaleur ni travail $\rightarrow \delta W_e = 0$ et $\delta Q_e = 0$.

La relation (4) se simplifie alors :

$$0 = \left[\left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} + g\,z_1\right) - \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} + g\,z_2\right)\right] dm$$

soit :

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} + g\,z_1 = h_2 + \frac{v_2^2}{2} + g\,z_2 \qquad (5)$$

Au cours de cet écoulement permanent, il y a donc conservation de la quantité :

$$h + \frac{v^2}{2} + g\,z = cte.$$

3) Puisque la tuyère est horizontale ($z_1 = z_2$), et puisque $v_1 \approx 0$, la relation (5) s'écrit :

$$h_1 = h_2 + \frac{v^2}{2}$$

Donc la vitesse d'éjection du gaz est : $v = \sqrt{2\,(h_1 - h_2)}$.

Si T_∞ est la température moyenne du milieu extérieur et h_∞ son enthalpie massique moyenne, on a :

à l'entrée 1 : $dh_1 = h_1 - h_\infty = c_p\,(T_1 - T_\infty)$

et à la sortie 2 : $dh_2 = h_\infty - h_2 = c_p\,(T_\infty - T_2)$

d'où : $dh = dh_1 + dh_2 = h_1 - h_2 = c_p\,(T_1 - T_2)$.

La chaleur massique à pression constante $c_p = \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{R}{M}$: $\rightarrow$ $h_1 - h_2 = \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{R}{M}(T_1 - T_2)$

Donc : $v = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{M}(T_1 - T_2)}$ A.N. : $v = \sqrt{\frac{2.\frac{7}{5}}{\frac{7}{5}-1}\frac{8{,}314}{28.10^{-3}}(300 - 295)} = 102\ m/s$.

exosup.com page facebook