



Correction des
Travaux Dirigés de Thermodynamique II*
Proposés par : H. Chaib
Filière : SMP, Semestre : 3, Année : 2018/2019, Série : 01

Exercice 1

1. Selon l'équation d'état des gaz parfaits, on peut écrire :

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} \quad \text{avec} \quad n = \frac{m}{M} \quad (1)$$

et on a :

$$h_1 = \frac{V_1}{S^*} \quad (2)$$

A.N. : $n = 0,25$ mol et $h_1 = 0,624$ m.

2. Selon le premier principe de la thermodynamique, on peut écrire :

$$dU = C_V dT = \delta W + \delta Q \quad (3)$$

soit :

$$\delta Q = C_V dT - \delta W = C_V dT + p dV \quad (4)$$

Or pour un gaz parfait $C_V = \frac{nR}{\gamma-1}$, alors :

$$\delta Q = \frac{nR}{\gamma-1} dT + nRT \frac{dV}{V} \quad (5)$$

d'où :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{nR}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \quad (6)$$

3. On a :

$$p_2 = p_0 + \frac{F}{S^*} \quad (7)$$

soit :

$$p_2 = p_1 + \frac{F}{S^*} \quad (8)$$

alors :

$$\tau = \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{F}{S^* p_1} \quad (9)$$

*La version électronique de ces travaux dirigés et des épreuves relatives à la même matière sont disponibles, avec leurs corrections, sur le site Web : <http://www.fpo.ma/chaib/teaching/>.

Les parois sont perméables à la chaleur donc $T_2 = T_0 = T_1$ et par conséquent :

$$V_2 = \frac{nRT_2}{p_2} = \frac{nRT_1}{p_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2} = \frac{V_1}{\tau} \quad (10)$$

Or $V_2 = h_2 S^*$ et $V_1 = h_1 S^*$, alors d'après la dernière équation on obtient :

$$h_2 = \frac{h_1}{\tau} \quad (11)$$

A.N. : $\tau = 2$ et $h_2 = 0,312$ m.

4. Cette transformation se fait à pression constante, alors :

$$\delta W = -p dV = -p_2 dV \quad (12)$$

soit :

$$W = -p_2 \int_{V_1}^{V_2} dV \quad (13)$$

d'où :

$$W = -p_2(V_2 - V_1) \quad (14)$$

$$W = -p_2 S^*(h_2 - h_1) = -\tau p_1 S^*(h_2 - h_1) \quad (15)$$

A.N. : $W = 623,55$ J.

5. Selon la question 2, on a :

$$dS = \frac{nR}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \quad (16)$$

alors :

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (17)$$

or $T_2 = T_1$, alors :

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (18)$$

d'où :

$$\Delta S = nR \ln \frac{h_2}{h_1} \quad (19)$$

A.N. : $\Delta S = -1,441$ J K⁻¹.

6. La température finale du système est identique à sa température initiale ($T_2 = T_1$), alors on a :

$$\Delta U = W + Q = C_V \Delta T = 0 \quad (20)$$

ce qui implique :

$$Q = -W \quad (21)$$

Cependant, la quantité de chaleur échangée par le milieu extérieur est :

$$Q' = -Q = W \quad (22)$$

d'où la variation d'entropie du milieu extérieur est :

$$\Delta S' = \frac{Q'}{T_0} = \frac{W}{T_0} \quad (23)$$

A.N. : $\Delta S' = 2,079$ J K⁻¹.

7. La variation d'entropie ΔS_g de l'ensemble constitué du gaz et du milieu extérieur s'écrit :

$$\Delta S_g = \Delta S + \Delta S' \quad (24)$$

A.N. : $\Delta S_g = 0,638 \text{ J K}^{-1}$.

Cette quantité représente l'entropie créée au cours de la transformation ou aussi l'entropie globale. On note que l'entropie créée est nulle pour une transformation réversible et strictement positive pour une transformation irréversible.

Exercice 2

1. Pour une transformation adiabatique réversible, l'entropie créée est nulle (c.-à-d. $S_c = 0$). Pour la transformation adiabatique en question, l'entropie créée (qui s'appelle aussi entropie globale) s'écrit :

$$S_c = \Delta S + \Delta S_{\text{ext}} \quad (25)$$

où $\Delta S = S_2 - S_1$ représente la variation de l'entropie du système et $\Delta S_{\text{ext}} = -\frac{Q}{T_{\text{ext}}}$ représente la variation de l'entropie du milieu extérieur (qui s'appelle aussi entropie échangée avec le milieu extérieur). Cette dernière est nulle, car il n'y a pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur. Alors :

$$S_c = S_2 - S_1 \quad (26)$$

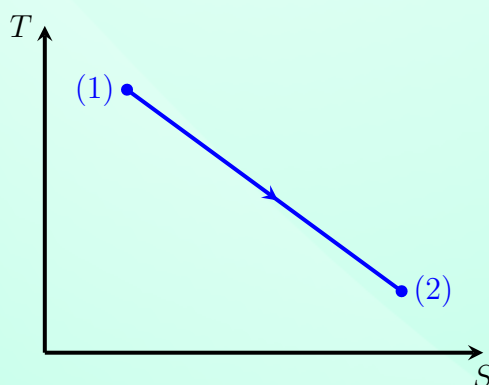
D'après le tableau, l'entropie créée au cours de la transformation en question n'est pas nulle (car $S_2 \neq S_1$) et par conséquent la transformation est irréversible.

2. La détente est adiabatique, alors la quantité de chaleur échangée $Q = 0$ et par conséquent :

$$W = \Delta U = U_2 - U_1 \quad (27)$$

A.N. : $W = -10,69 \text{ kJ}$.

3. La nouvelle transformation est représentée sur le diagramme (T, S) par une évolution linéaire (figure ci-dessous).



Alors, elle est régie par une équation de la forme :

$$T = \alpha S + \beta \quad (28)$$

où la pente α de cette évolution et l'ordonnée β à l'origine des abscisses sont données par :

$$\alpha = \frac{T_2 - T_1}{S_2 - S_1} \quad \text{et} \quad \beta = T_1 - \alpha S_1 \quad (29)$$

Selon la définition de l'entropie, on peut écrire :

$$dS = \frac{\delta Q'}{T} \quad (30)$$

alors :

$$\delta Q' = T dS \quad (31)$$

ce qui implique :

$$Q' = \int_{S_1}^{S_2} T dS \quad (32)$$

soit, en remplaçant T par son expression :

$$Q' = \int_{S_1}^{S_2} (\alpha S + \beta) dS = \left[\frac{\alpha}{2} S^2 + \beta S \right]_{S_1}^{S_2} \quad (33)$$

d'où :

$$Q' = \frac{\alpha}{2} (S_2^2 - S_1^2) + \beta(S_2 - S_1) \quad (34)$$

Le travail mis en jeu au cours de cette transformation s'écrit :

$$W' = \Delta U - Q' \quad (35)$$

soit :

$$W' = U_2 - U_1 - Q' \quad (36)$$

A.N. : $Q' = 2,865 \text{ kJ}$ et $W' = -13,555 \text{ kJ}$.

4. La transformation est considérée comme étant polytrophe de coefficient η , alors :

$$p_1 V_1^\eta = p_2 V_2^\eta \quad (37)$$

ce qui implique :

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\eta \quad (38)$$

d'où :

$$\eta = \frac{\ln \frac{p_1}{p_2}}{\ln \frac{V_2}{V_1}} \quad (39)$$

A.N. : $\eta = 1,238$.

5. Pour une transformation polytrophe, on a :

$$\delta W^* = -p dV = -\frac{p_1 V_1^\eta}{V^\eta} dV \quad (40)$$

soit :

$$W^* = -p_1 V_1^\eta \int_{V_1}^{V_2} V^{-\eta} dV \quad (41)$$

d'où :

$$W^* = -\frac{p_1 V_1^\eta}{1-\eta} (V_2^{1-\eta} - V_1^{1-\eta}) \quad (42)$$

ou encore :

$$W^* = -\frac{1}{1-\eta} (p_2 V_2 - p_1 V_1) \quad (43)$$

A.N. : $W^* = -13,275 \text{ kJ}$.

6. L'erreur relative entre W et W^* est donnée par :

$$\left| \frac{W^* - W}{W} \right| = 24,18 \% \quad (44)$$

Celle entre W' et W^* est donnée par :

$$\left| \frac{W^* - W'}{W'} \right| = 2,066 \% \quad (45)$$

7. De ces résultats, il apparaît que le modèle polytrophe utilisé n'est pas assez efficace pour décrire la première détente puisqu'il donne une description du travail mis en jeu avec une erreur relative de 24,18 %. En revanche, il peut décrire la deuxième transformation d'une manière efficace car l'erreur relative faite sur le calcul du travail, qui est de 2,066 %, est relativement faible.

Exercice 3

1. La transformation (1)-(2) est une transformation isentrope, alors on peut écrire :

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad (46)$$

d'où le volume V_2 s'écrit :

$$V_2 = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1 \quad (47)$$

et la pression p_2 s'écrit :

$$p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} \quad (48)$$

avec $n = \frac{p_1 V_1}{RT_1}$.

La transformation (2)-(3) est une transformation isotherme, alors $T_3 = T_2$ et on a $V_3 = V_1$. Enfin, la pression p_3 est donnée par :

$$p_3 = \frac{nRT_3}{V_3} \quad (49)$$

A.N. : $p_2 = 12,7 \text{ bar}$, $V_2 = 157,49 \text{ cm}^3$, $T_2 = 300 \text{ K}$, $p_3 = 4 \text{ bar}$, $V_3 = 500 \text{ cm}^3$ et $T_3 = 300 \text{ K}$.

2. La variation d'entropie de la transformation isentrope (1)-(2) est nulle (c.-à-d. $\Delta S_{12} = 0$). Pour la transformation isotherme (2)-(3), on a $\delta Q = -\delta W = p dV$. Alors :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{p dV}{T} = nR \frac{dV}{V} \quad (50)$$

d'où :

$$\Delta S_{23} = nR \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V_3}{V_2} \quad (51)$$

Pour la transformation isochore (3)-(1), on a $\delta W = 0$ et par conséquent $\delta Q = dU = C_V dT$. Alors :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = C_V \frac{dT}{T} \quad (52)$$

d'où :

$$\Delta S_{31} = C_V \int_{T_3}^{T_1} \frac{dT}{T} = C_V \ln \frac{T_1}{T_3} \quad (53)$$

avec $C_V = \frac{nR}{\gamma-1}$.

A.N. : $\Delta S_{12} = 0$, $\Delta S_{23} = 0,77 \text{ J K}^{-1}$ et $\Delta S_{31} = -0,77 \text{ J K}^{-1}$.

3. La quantité de chaleur Q_{31} échangée par le gaz au cours de la transformation (3)-(1) s'écrit :

$$Q_{31} = \int_{T_3}^{T_1} C_V dT = C_V(T_1 - T_3) \quad (54)$$

Alors, la quantité de chaleur échangée par le milieu extérieur (c.-à-d. avec la source froide de température T_1) au cours de cette transformation est $Q_{31}^* = -Q_{31}$ et la variation de son entropie est :

$$\Delta S_{31}^* = \frac{Q_{31}^*}{T_1} = -\frac{C_V(T_1 - T_3)}{T_1} \quad (55)$$

soit :

$$\Delta S_{31}^* = C_V \frac{T_3 - T_1}{T_1} \quad (56)$$

Alors, l'entropie créée S_c s'écrit :

$$S_c = \Delta S_{31} + \Delta S_{31}^* \quad (57)$$

d'où :

$$S_c = C_V \ln \frac{T_1}{T_3} + C_V \frac{T_3 - T_1}{T_1} \quad (58)$$

A.N. : $S_c = 0,341 \text{ J K}^{-1}$.