Université Ibn Zohr
Faculté Polydisciplinaire
Ouarzazate, Maroc

جامعة ابن زهر
الكلية متعددة التخصصات
ورزازات، المغرب

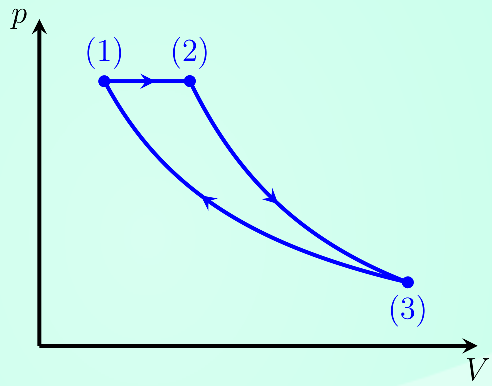
Correction des Travaux Dirigés de Thermodynamique II*

Proposés par : H. Chaib

Filière : SMP, **Semestre** : 3, **Année** : 2018/2019, **Série** : 02

Exercice 1

1. Représentation du cycle dans le diagramme (p, V) (figure ci-dessous).



2. (a) Pour l'état (2), on a :

$$p_2 = p_1 \tag{1}$$

La forme enthalpique du premier principe de la thermodynamique, permet d'écrire :

$$\Delta H_{12} = W_{12} + Q_{12} = C_\mathrm{p}(T_2 - T_1) \tag{2}$$

où $C_\mathrm{p} = \frac{7}{2}nR$ car il s'agit d'un gaz parfait diatomique et W_{12} représente le travail technique. Or $W_{12} = \int_{p_1}^{p_2} V\,\mathrm{d}p = 0$, puisqu'il s'agit d'une transformation isobare, alors :

$$Q_{12} = C_\mathrm{p}(T_2 - T_1) \tag{3}$$

d'où :

$$T_2 = \frac{Q_{12}}{C_\mathrm{p}} + T_1 \tag{4}$$

et

$$V_2 = \frac{nRT_2}{p_2} \quad \text{avec} \quad n = \frac{m}{M} \tag{5}$$

A.N. : $n = 125\,\mathrm{mol}$, $p_2 = 90\,\mathrm{bar}$, $V_2 = 39{,}68\,\mathrm{l}$ et $T_2 = 343{,}62\,\mathrm{K}$.

*La version électronique de ces travaux dirigés et des épreuves relatives à la même matière sont disponibles, avec leurs corrections, sur le site Web : http://www.fpo.ma/chaib/teaching/.

(b) Pour l'état (3), on a :

$$T_3 = T_1 \tag{6}$$

car la transformation (3)-(1) est une transformation isotherme. La transformation (2)-(3) est une transformation polytrope d'indice η, alors $pV^{\eta} = Cte$, or $p = \frac{nRT}{V}$ alors :

$$TV^{\eta-1} = Cte \tag{7}$$

soit :

$$T_2 V_2^{\eta-1} = T_3 V_3^{\eta-1} \tag{8}$$

d'où :

$$V_3 = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\eta-1}} V_2 \tag{9}$$

et

$$p_3 = \frac{nRT_3}{V_3} \tag{10}$$

A.N. : $p_3 = 66{,}05\,\mathrm{bar}$, $V_3 = 50{,}82\,\mathrm{l}$ et $T_3 = 323\,\mathrm{K}$.

3. (a) La variation de l'énergie interne de la transformation (1)-(2), permet d'écrire :

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = C_{\mathrm{V}}(T_2 - T_1) \tag{11}$$

soit :

$$U_2 = U_1 + C_{\mathrm{V}}(T_2 - T_1) \tag{12}$$

où $C_{\mathrm{V}} = \frac{5}{2}nR$ car il s'agit d'un gaz parfait diatomique.
La transformation (3)-(1) est isotherme, alors $\Delta U_{31} = 0$ et par conséquent :

$$U_3 = U_1 \tag{13}$$

A.N. : $U_1 = U_3 = 250\,\mathrm{J}$ et $U_2 = 303{,}57\,\mathrm{kJ}$.

(b) L'enthalpie de l'état (1) s'écrit :

$$H_1 = U_1 + p_1 V_1 = U_1 + nRT_1 \tag{14}$$

La variation de l'enthalpie de la transformation (1)-(2), permet d'écrire :

$$\Delta H_{12} = H_2 - H_1 = C_{\mathrm{p}}(T_2 - T_1) \tag{15}$$

Alors :

$$H_2 = H_1 + C_{\mathrm{p}}(T_2 - T_1) \tag{16}$$

La transformation (3)-(1) est isotherme, alors $\Delta H_{31} = 0$ et par suite :

$$H_3 = H_1 \tag{17}$$

A.N. : $H_1 = H_3 = 585{,}68\,\mathrm{kJ}$ et $H_2 = 660{,}68\,\mathrm{kJ}$.

4. Pour la transformation isobare (1)-(2), on a :

$$\delta W_{12} = V\,\mathrm{d}p = 0 \tag{18}$$

soit :

$$W_{12} = 0 \tag{19}$$

Pour la transformation polytrope (2)-(3), on a :

$$\delta W_{23} = V\,\mathrm{d}p = \frac{p_2^{1/\eta} V_2}{p^{1/\eta}}\,\mathrm{d}p \tag{20}$$

soit :

$$W_{23} = p_2^{1/\eta} V_2 \int_{p_2}^{p_3} \frac{\mathrm{d}p}{p^{1/\eta}} \tag{21}$$

d'où :

$$W_{23} = \frac{p_2^{1/\eta} V_2}{1 - \frac{1}{\eta}} \left(p_3^{1-\frac{1}{\eta}} - p_2^{1-\frac{1}{\eta}} \right) \tag{22}$$

or $p_2^{1/\eta} V_2 = p_3^{1/\eta} V_3$, il vient :

$$W_{23} = \frac{\eta}{\eta - 1} \left(p_3 V_3 - p_2 V_2 \right) \tag{23}$$

Pour la transformation isotherme (3)-(1), on a :

$$\delta W_{31} = V\,\mathrm{d}p = p_1 V_1 \frac{\mathrm{d}p}{p} \tag{24}$$

soit :

$$W_{31} = nRT_1 \ln \frac{p_1}{p_3} \tag{25}$$

En fin, le travail utile s'écrit :

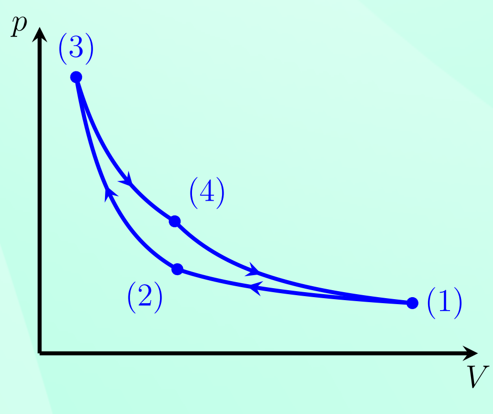
$$W_\mathrm{u} = W_{12} + W_{23} + W_{31} \tag{26}$$

A.N. : $W_{12} = 0\,\mathrm{J}$, $W_{23} = -107{,}14\,\mathrm{kJ}$, $W_{31} = 103{,}86\,\mathrm{kJ}$ et $W_\mathrm{u} = -3{,}28\,\mathrm{kJ}$.

5. En effet, le cycle de la machine en question évolue dans le sens des aiguilles d'une montre et par suite il s'agit d'une machine thermo-dynamique (c.-à-d. machine thermique motrice) qui fournit du travail. Ainsi, le travail utile W_u de cette machine est négatif.

Exercice 2

1. Les états (1) et (3) sont les états extrêmes du cycle de Carnot en question. La pression de l'état (1) est inférieure à celle de l'état (3) donc l'état (1) est située en bas par rapport à l'état (3) sur le diagramme de Clapeyron. Pour déterminer les positions des deux autres états, on considère le fait que le sens d'évolution du cycle moteur de Carnot est celui des aiguilles d'une montre (figure ci-dessous).



2. Selon l'équation d'état des gaz parfaits, on peut écrire :
$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} \tag{27}$$
avec :
$$n = \frac{p_3 V_3}{RT_3} \tag{28}$$
d'où :
$$V_1 = \frac{T_1 p_3}{T_3 p_1} V_3 \tag{29}$$
A.N. : $n = 0{,}230\,\mathrm{mol}$ et $V_1 = 5{,}602\,\mathrm{l}$.
3. Les transformations (1)-(2) et (3)-(4) sont des isothermes, alors :
$$T_2 = T_1 \quad \text{et} \quad T_4 = T_3 \tag{30}$$
Les transformations (2)-(3) et (4)-(1) sont des isentropes, alors :
$$p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma \quad \text{ou} \quad T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \tag{31}$$
soit :
$$V_2 = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_3 \tag{32}$$
et :
$$p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} \tag{33}$$
$\gamma = \frac{C_\mathrm{p}}{C_\mathrm{V}} = \frac{5}{3}$ pour un gaz parfait monoatomique.
De même :
$$p_4 V_4^\gamma = p_1 V_1^\gamma \quad \text{ou} \quad T_4 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \tag{34}$$
soit :
$$V_4 = \left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1 \tag{35}$$
et :
$$p_4 = \frac{nRT_4}{V_4} \tag{36}$$
A.N. : $V_2 = 2{,}385\,\mathrm{l}$, $p_2 = 2{,}349\,\mathrm{bar}$, $V_4 = 2{,}349\,\mathrm{l}$ et $p_4 = 4{,}257\,\mathrm{bar}$.
4. Étant donné que pour une transformation isotherme, la variation de l'énergie interne U est nulle, alors pour la transformation isotherme (1)-(2), la quantité de chaleur est donnée par :
$$Q_{12} = -W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} \tag{37}$$
d'où :
$$Q_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{38}$$
ou encore :
$$Q_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{39}$$
De même, pour la transformation isotherme (3)-(4), la quantité de chaleur est donnée par :
$$Q_{34} = p_3 V_3 \ln \frac{V_4}{V_3} \tag{40}$$
A.N. : $Q_{12} = -478{,}47\,\mathrm{J}$ et $Q_{34} = 854{,}06\,\mathrm{J}$.

5. On sait que la variation de l'énergie interne, qui est une fonction d'état, sur un cycle fermé est nulle :
$$\Delta U = \sum_i W_i + \sum_i Q_i = 0 \tag{41}$$
soit :
$$W_\mathrm{u} = \sum_i W_i = -\sum_i Q_i \tag{42}$$
c'est à dire :
$$W_\mathrm{u} = -(Q_{12} + Q_{34}) \tag{43}$$
A.N. : $W_\mathrm{u} = -375{,}59\,\mathrm{J}$.

Exercice 3

1. Selon l'équation d'état des gaz parfaits, on peut écrire :
$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} \quad \text{et} \quad V_3 = \frac{nRT_3}{p_3} \tag{44}$$
A.N. : $V_1 = 0{,}249\,\mathrm{m}^3$ et $V_3 = 0{,}116\,\mathrm{m}^3$.

2. La transformation (2)-(3) est une transformation isobare donc $p_2 = p_3$; la transformation (1)-(2) est une transformation isotherme donc $T_2 = T_1$. Cependant, selon l'équation d'état des gaz parfaits, il vient :
$$V_2 = \frac{nRT_2}{p_2} \tag{45}$$
La transformation (4)-(1) est une transformation isobare donc $p_4 = p_1$; la transformation (3)-(4) est une transformation isotherme donc $T_4 = T_3$. Cependant, selon l'équation d'état des gaz parfaits, il vient :
$$V_4 = \frac{nRT_4}{p_4} \tag{46}$$
A.N. : $p_2 = 5\,\mathrm{bar}$, $V_2 = 0{,}050\,\mathrm{m}^3$, $T_2 = 300\,\mathrm{K}$, $p_4 = 1\,\mathrm{bar}$, $V_4 = 0{,}582\,\mathrm{m}^3$ et $T_4 = 700\,\mathrm{K}$.

3. Pour les transformations (1)-(2) et (3)-(4), qui sont des transformations isothermes, les travaux volumétriques mis en jeu s'écrivent :
$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = -nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} \tag{47}$$
soit :
$$W_{12} = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{48}$$
et
$$W_{34} = -\int_{V_3}^{V_4} p\,\mathrm{d}V = -nRT_3 \int_{V_3}^{V_4} \frac{\mathrm{d}V}{V} \tag{49}$$
soit :
$$W_{34} = -nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} \tag{50}$$

Pour les transformations (2)-(3) et (4)-(1), qui sont des transformations isobares, les travaux mis en jeu s'écrivent :

$$W_{23} = -\int_{V_2}^{V_3} p\,\mathrm{d}V = -p_2 \int_{V_2}^{V_3} \mathrm{d}V \tag{51}$$

soit :

$$W_{23} = -p_2(V_3 - V_2) \tag{52}$$

et

$$W_{41} = -\int_{V_4}^{V_1} p\,\mathrm{d}V = -p_4 \int_{V_4}^{V_1} \mathrm{d}V \tag{53}$$

soit :

$$W_{41} = -p_4(V_1 - V_4) \tag{54}$$

A.N. : $W_{12} = 40{,}14\,\mathrm{kJ}$, $W_{23} = -33{,}26\,\mathrm{kJ}$, $W_{34} = -93{,}67\,\mathrm{kJ}$ et $W_{41} = 33{,}26\,\mathrm{kJ}$.

4. Les transformations (1)-(2) et (3)-(4) sont des transformations isothermes, alors les variations des énergies internes ΔU_{12} et ΔU_{34} sont nulles. Cependant, les quantités de chaleur échangées s'écrivent :

$$Q_{12} = -W_{12} \quad \text{et} \quad Q_{34} = -W_{34} \tag{55}$$

Les transformations (2)-(3) et (4)-(1) sont des transformations isobares et par suite les travaux techniques correspondants sont nuls. Il s'ensuit :

$$Q_{23} = \Delta H_{23} = C_\mathrm{p}(T_3 - T_2) \tag{56}$$

et

$$Q_{41} = \Delta H_{41} = C_\mathrm{p}(T_1 - T_4) \tag{57}$$

avec $C_\mathrm{p} = \frac{7}{2}nR$ car il s'agit d'un gaz parfait diatomique.
A.N. : $Q_{12} = -40{,}14\,\mathrm{kJ}$, $Q_{23} = 116{,}40\,\mathrm{kJ}$, $Q_{34} = 93{,}67\,\mathrm{kJ}$ et $Q_{41} = -116{,}40\,\mathrm{kJ}$.

5. D'après la définition du travail utile d'un cycle, on peut écrire :

$$W_\mathrm{u} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \tag{58}$$

A.N. : $W_\mathrm{u} = -53{,}52\,\mathrm{kJ}$.

6. L'efficacité thermique de ce cycle est donné par :

$$\eta = \left|\frac{W_\mathrm{utile}}{Q_\mathrm{fournie}}\right| = \left|\frac{W_\mathrm{u}}{Q_{23} + Q_{34}}\right| \tag{59}$$

A.N. : $\eta = 0{,}255$.

7. Pour les transformations (1)-(2) et (3)-(4), qui sont des transformations isothermes, les travaux techniques mis en jeu s'écrivent :

$$W'_{12} = \int_{p_1}^{p_2} V\,\mathrm{d}p = nRT_1 \int_{p_1}^{p_2} \frac{\mathrm{d}p}{p} \tag{60}$$

soit :

$$W'_{12} = nRT_1 \ln\frac{p_2}{p_1} \tag{61}$$

et

$$W'_{34} = \int_{p_3}^{p_4} V \, \mathrm{d}p = nRT_3 \int_{p_3}^{p_4} \frac{\mathrm{d}p}{p} \tag{62}$$

soit :

$$W'_{34} = nRT_3 \ln \frac{p_4}{p_3} \tag{63}$$

Pour les transformations (2)-(3) et (4)-(1), qui sont des transformations isobares, les travaux techniques mis en jeu sont nuls :

$$W'_{23} = 0 \quad \text{et} \quad W'_{41} = 0 \tag{64}$$

A.N. : $W'_{12} = 40{,}14\,\mathrm{kJ}$, $W'_{23} = 0\,\mathrm{kJ}$, $W'_{34} = -93{,}67\,\mathrm{kJ}$ et $W'_{41} = 0\,\mathrm{kJ}$.

8. Les transformations (1)-(2) et (3)-(4) sont des transformations isothermes, alors les variations des enthalpies $\Delta H'_{12}$ et $\Delta H'_{34}$ sont nulles. Cependant, les quantités de chaleur échangées s'écrivent :

$$Q'_{12} = -W'_{12} \quad \text{et} \quad Q'_{34} = -W'_{34} \tag{65}$$

Les transformations (2)-(3) et (4)-(1) sont des transformations isobares, alors les travaux techniques mis en jeu sont W'_{23} et W'_{41} sont nuls. Cependant, les quantités de chaleur échangées s'écrivent :

$$Q'_{23} = \Delta H'_{23} = C_\mathrm{p}(T_3 - T_2) \tag{66}$$

et

$$Q'_{41} = \Delta H'_{41} = C_\mathrm{p}(T_1 - T_4) \tag{67}$$

A.N. : $Q'_{12} = -40{,}14\,\mathrm{kJ}$, $Q'_{23} = 116{,}40\,\mathrm{kJ}$, $Q'_{34} = 93{,}67\,\mathrm{kJ}$ et $Q'_{41} = -116{,}4\,\mathrm{kJ}$.

9. D'après la définition du travail utile d'un cycle, on peut écrire :

$$W'_\mathrm{u} = W'_{12} + W'_{23} + W'_{34} + W'_{41} \tag{68}$$

A.N. : $W'_\mathrm{u} = -53{,}52\,\mathrm{kJ}$.

10. L'efficacité thermique de ce cycle est donné par :

$$\eta' = \left| \frac{W'_\mathrm{utile}}{Q'_\mathrm{fournie}} \right| = \left| \frac{W'_\mathrm{u}}{Q'_{23} + Q'_{34}} \right| \tag{69}$$

A.N. : $\eta' = 0{,}255$.

11. D'après la définition du rendement d'un cycle, on peut écrire :

$$\rho = \frac{\eta}{\eta_\mathrm{Carnot}} \quad \text{et} \quad \rho' = \frac{\eta'}{\eta_\mathrm{Carnot}} \tag{70}$$

où $\eta_\mathrm{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$ représente l'efficacité thermique du cycle de Carnot fonctionnant entre une source froide de température T_1 et une source chaude de température T_3.
A.N. : $\rho = 0{,}446$ et $\rho' = 0{,}446$.

12. Il apparaît que les deux modes de fonctionnement du moteur Ericsson ont la même performance car ils ont le même rendement.