Université Ibn Zohr
Faculté Polydisciplinaire
Ouarzazate, Maroc

جامعة ابن زهر
الكلية متعددة التخصصات
ورزازات، المغرب

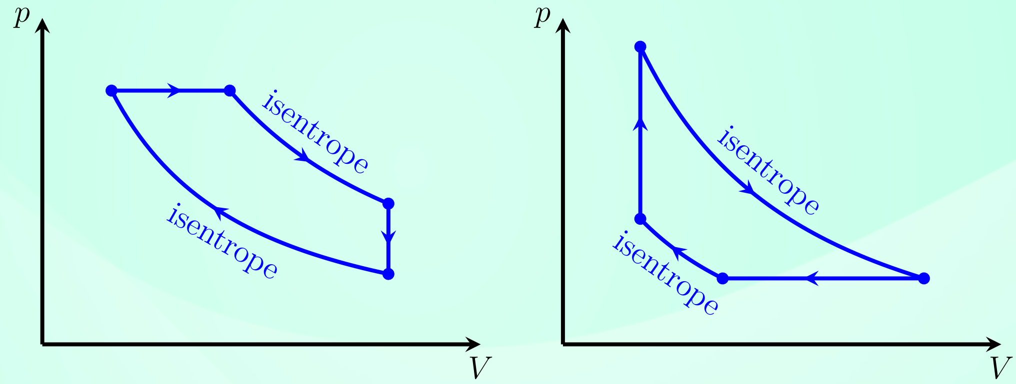
Correction des Travaux Dirigés de Thermodynamique II*

Proposés par : H. Chaib

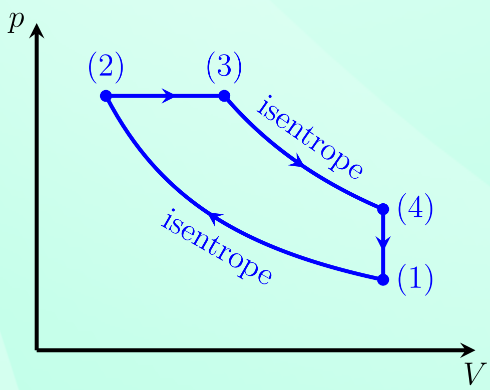
Filière : SMP, **Semestre** : 3, **Année** : 2018/2019, **Série** : 03

Exercice 1

1. Avec deux transformations isentropes, une transformation isobare et une transformation isochore, il y a seulement deux configurations possibles pour former un cycle thermodynamique (figure ci-dessous).



Parmi ces deux configurations, c'est la première configuration qui possède un état dont le volume est strictement inférieur aux volumes des autres états. Par contre la deuxième configuration ne satisfait pas à ce critère car elle possède deux états dont le volume est minimal. Cependant, en tenant en considération que l'état (2) possède le plus petit volume et qu'il s'agit d'un cycle moteur, dont le sens d'évolution est celui de rotation des aiguilles d'une montre, on aboutit au cycle de la machine en question (figure ci-dessous).



*La version électronique de ces travaux dirigés et des épreuves relatives à la même matière sont disponibles, avec leurs corrections, sur le site Web : http://www.fpo.ma/chaib/teaching/.

2. Les quantités de chaleur mises en jeu au cours de ce cycle sont celles échangées lors des transformations isobare (2)-(3) et isochore (4)-(1) car les deux autres transformations sont isentropes ($Q_{12} = Q_{34} = 0$). Alors, pour la transformation isobare (2)-(3) :
$$Q_{23} = \Delta H_{23} = C_{\mathrm{p}}(T_3 - T_2) \tag{1}$$
et pour la transformation isochore (4)-(1) :
$$Q_{41} = \Delta U_{41} = C_{\mathrm{V}}(T_1 - T_4) \tag{2}$$

3. (a) En considérant la transformation isobare (2)-(3), on a $T_3 > T_2$ car $\frac{T_3}{V_3} = \frac{T_2}{V_2}$ et $V_3 > V_2$. Alors, la quantité de chaleur Q_{23} est positive. En considérant la transformation isochore (4)-(1), on a $T_1 < T_4$ car $\frac{T_1}{p_1} = \frac{T_4}{p_4}$ et $p_1 < p_4$. Alors, la quantité de chaleur Q_{41} est négative. Cependant, la quantité de chaleur fournie au système est :
$$Q_{\mathrm{f}} = Q_{23} \tag{3}$$

   (b) Le travail utile du cycle est donné par :
$$W_{\mathrm{u}} = \sum_i W_i = -\sum_i Q_i \tag{4}$$
   soit :
$$W_{\mathrm{u}} = -(Q_{23} + Q_{41}) \tag{5}$$

   (c) L'efficacité thermique η du cycle s'écrit :
$$\eta = \left|\frac{W_{\mathrm{u}}}{Q_{\mathrm{f}}}\right| \tag{6}$$
   Le travail utile W_{u} est négatif car il s'agit d'un cycle moteur. Alors :
$$\eta = \frac{-W_{\mathrm{u}}}{Q_{\mathrm{f}}} = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} \tag{7}$$
   soit :
$$\eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} \tag{8}$$

4. En remplaçant, dans la dernière expression, les quantités de chaleur Q_{23} et Q_{41} par leurs expressions, il vient :
$$\eta = 1 + \frac{C_{\mathrm{V}}(T_1 - T_4)}{C_{\mathrm{p}}(T_3 - T_2)} \tag{9}$$
soit :
$$\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{\gamma(T_3 - T_2)} \tag{10}$$

5. En divisant le dénominateur et numérateur de la fraction du membre de droite de l'expression précédente par T_2, il vient :
$$\eta = 1 + \frac{\frac{T_1}{T_2} - \frac{T_4}{T_2}}{\gamma(\frac{T_3}{T_2} - 1)} \tag{11}$$

En prenant en considération que la transformation (1)-(2) est isentrope, alors :

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \tau_{12}^{1-\gamma} \tag{12}$$

En prenant en considération que la transformation (3)-(4) est isentrope et que $V_4 = V_1$, alors :

$$\frac{T_4}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} \cdot \frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} \frac{V_3}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} \tag{13}$$

soit :

$$\frac{T_4}{T_2} = \tau_{13}^{1-\gamma}\tau_{13}^{-1}\tau_{12} = \tau_{13}^{-\gamma}\tau_{12} \tag{14}$$

En prenant en considération que la transformation (2)-(3) est isobare, alors :

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_3}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \tau_{13}^{-1}\tau_{12} \tag{15}$$

L'expression de η s'écrit alors :

$$\eta = 1 + \frac{\tau_{12}^{1-\gamma} - \tau_{13}^{-\gamma}\tau_{12}}{\gamma(\tau_{13}^{-1}\tau_{12} - 1)} \tag{16}$$

ou encore, en divisant le dénominateur et numérateur de la fraction du membre de droite de cette expression par τ_{12} :

$$\eta = 1 - \frac{\tau_{12}^{-\gamma} - \tau_{13}^{-\gamma}}{\gamma(\tau_{12}^{-1} - \tau_{13}^{-1})} \tag{17}$$

d'où :

$$\eta = 1 - \frac{\tau_{12}^{-\alpha} - \tau_{13}^{-\alpha}}{\gamma(\tau_{12}^{-\beta} - \tau_{13}^{-\beta})} \tag{18}$$

avec $\alpha = \gamma$ et $\beta = 1$.

Exercice 2

1. Pour un gaz parfait, on a :

$$\gamma = \frac{C_\mathrm{p}}{C_\mathrm{V}} \quad \text{et} \quad C_\mathrm{p} - C_\mathrm{V} = nR \tag{19}$$

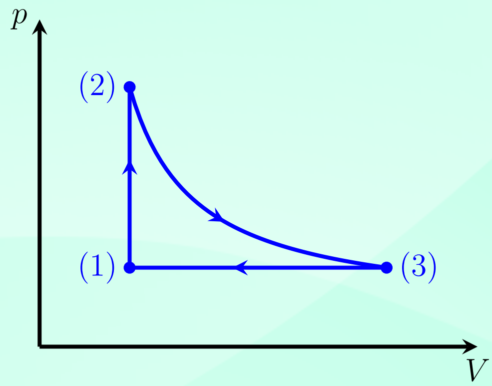
soit :

$$C_\mathrm{p} = \gamma C_\mathrm{V} = C_\mathrm{V} + nR \tag{20}$$

Il en découle :

$$C_\mathrm{V} = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_\mathrm{p} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \tag{21}$$

2. Représentation du cycle sur le diagramme de Clapeyron (figure ci-dessous).



3. À partir de la définition du travail utile, on peut écrire :

$$W_u = \sum_i W_i = -\sum_i Q_i \tag{22}$$

soit :

$$W_u = -(Q_{12} + Q_{31}) \tag{23}$$

car la quantité de chaleur Q_{23} échangée au cours de la transformation isentrope (2)-(3) est nulle (c.-à-d. $Q_{23} = 0$). Cependant, pour la transformation isochore (1)-(2), on peut écrire :

$$\delta Q = \mathrm{d}U = C_V \,\mathrm{d}T \tag{24}$$

car le travail mis en jeux est nul (c.-à-d. $\delta W = -p\,\mathrm{d}V = 0$). Alors :

$$Q_{12} = \int_{T_1}^{T_2} C_V \,\mathrm{d}T = C_V(T_2 - T_1) \tag{25}$$

Pour la transformation isobare (3)-(1), on a :

$$\delta Q = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}U + \mathrm{d}(pV) = \mathrm{d}H \tag{26}$$

soit

$$\delta Q = C_p \,\mathrm{d}T \tag{27}$$

et par conséquent :

$$Q_{31} = \int_{T_3}^{T_1} C_p \,\mathrm{d}T = C_p(T_1 - T_3) \tag{28}$$

d'où :

$$W_u = -(C_V(T_2 - T_1) + C_p(T_1 - T_3)) \tag{29}$$

ou encore :

$$W_u = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) + \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_1) \tag{30}$$

4. L'efficacité thermique de ce cycle est donné par :

$$\eta = \left| \frac{W_{\text{utile}}}{Q_{\text{fournie}}} \right| \tag{31}$$

Selon le diagramme ci-dessus, on peut constater que $T_1 < T_2$ (car $T_1 = \frac{p_1}{p_2}T_2$ et $p_2 > p_1$) et que $T_1 < T_3$ (car $T_1 = \frac{V_1}{V_3}T_3$ et $V_3 > V_1$). Il en résulte que $Q_{12} > 0$

et $Q_{23} < 0$ c'est à dire $Q_{\text{fournie}} = Q_{12}$. Sachant que $W_{\text{u}} < 0$, puisqu'il s'agit d'une machine thermo-dynamique, alors :

$$\eta = \left|\frac{W_{\text{u}}}{Q_{12}}\right| = -\frac{W_{\text{u}}}{Q_{12}} \tag{32}$$

soit :

$$\eta = \frac{C_{\text{V}}(T_2 - T_1) + C_{\text{p}}(T_1 - T_3)}{C_{\text{V}}(T_2 - T_1)} \tag{33}$$

ou aussi :

$$\eta = 1 - \gamma\frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1} \tag{34}$$

5. Pour la transformation isobare (1)-(3), on a $\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_3}{V_3}$ d'où :

$$T_1 = \frac{V_1}{V_3}T_3 = \tau_{31}^{-1}T_3 \tag{35}$$

Pour la transformation isentrope (2)-(3), on a $T_2V_2^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1}$ d'où :

$$T_2 = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_3 = \tau_{31}^{\gamma-1}T_3 \tag{36}$$

car $V_2 = V_1$.

6. La nouvelle expression de l'efficacité thermique du cycle s'écrit :

$$\eta = 1 - \gamma\frac{(1 - \tau_{31}^{-1})T_3}{(\tau_{31}^{\gamma-1} - \tau_{31}^{-1})T_3} \tag{37}$$

soit :

$$\eta = 1 - \gamma\frac{1 - \tau_{31}^{-1}}{\tau_{31}^{\gamma-1} - \tau_{31}^{-1}} \tag{38}$$

ou encore :

$$\eta = 1 - \gamma\frac{\tau_{31} - 1}{\tau_{31}^{\gamma} - 1} \tag{39}$$

7. Le rendement ρ du cycle s'écrit :

$$\rho = \frac{\eta}{\eta_{\text{Carnot}}} \tag{40}$$

Puisque $\gamma > 1$ et $\tau_{31} > 1$, alors d'après les équations (35) et (36), on a $T_2 > T_3 > T_1$ et par conséquent $\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \tau_{31}^{-\gamma}$. Donc :

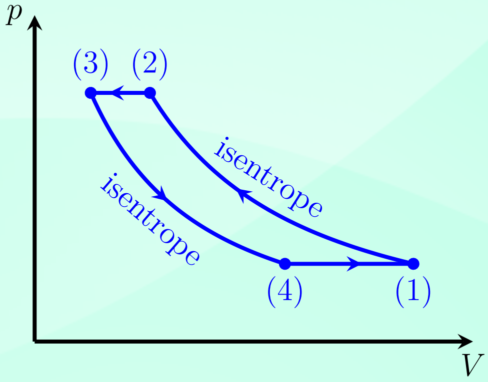
$$\rho = \frac{1}{1 - \tau_{31}^{-\gamma}}\left(1 - \gamma\frac{\tau_{31} - 1}{\tau_{31}^{\gamma} - 1}\right) \tag{41}$$

soit aussi :

$$\rho = \frac{\tau_{31}^{\gamma}}{\tau_{31}^{\gamma} - 1}\left(1 - \gamma\frac{\tau_{31} - 1}{\tau_{31}^{\gamma} - 1}\right) \tag{42}$$

Exercice 3

1. Représentation du cycle sur le diagramme de Clapeyron (figure ci-dessous).



2. Pour un gaz parfait, on a :

$$\gamma = \frac{C_\mathrm{p}}{C_\mathrm{V}} \quad \text{et} \quad C_\mathrm{p} - C_\mathrm{V} = nR \tag{43}$$

soit :

$$C_\mathrm{p} = \gamma C_\mathrm{V} = C_\mathrm{V} + nR \tag{44}$$

Il en découle :

$$C_\mathrm{V} = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_\mathrm{p} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \tag{45}$$

A.N. : $C_\mathrm{V} = 66{,}51\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ et $C_\mathrm{p} = 99{,}77\,\mathrm{J\,K^{-1}}$.

3. La transformation (1)-(2) est une transformation isentrope (adiabatique réversible), alors les grandeurs thermiques p et T des états (1) et (2) vérifient l'égalité suivante :

$$p_1^{1-\gamma} T_1^{\gamma} = p_2^{1-\gamma} T_2^{\gamma} \tag{46}$$

d'où :

$$T_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_1 \tag{47}$$

De même en considérant la transformation (3)-(4), qui est aussi une transformation isentrope, on montre que :

$$T_4 = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_3 \tag{48}$$

où $p_3 = p_2$ et $p_4 = p_1$.
A.N. : $T_2 = 394{,}9\,\mathrm{K}$ et $T_4 = 197{,}5\,\mathrm{K}$.

4. Pour une transformation isobare ($p = Cte$), on a :

$$\delta Q = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}U + \mathrm{d}(pV) = \mathrm{d}H \tag{49}$$

soit :

$$\delta Q = C_\mathrm{p}\,\mathrm{d}T \tag{50}$$

Alors, pour les deux transformations (2)-(3) et (4)-(1), qui sont des transformations isobares, on peut écrire :

$$Q_{23} = \int_{T_2}^{T_3} C_\mathrm{p}\,\mathrm{d}T = C_\mathrm{p}(T_3 - T_2) \tag{51}$$

et

$$Q_{41} = \int_{T_4}^{T_1} C_\mathrm{p}\,\mathrm{d}T = C_\mathrm{p}(T_1 - T_4) \tag{52}$$

A.N. : $Q_{23} = -10{,}369\,\mathrm{kJ}$ et $Q_{41} = 7{,}036\,\mathrm{kJ}$.

5. La quantité de chaleur échangée au cours d'une transformation isentrope est nulle. Alors, pour les deux transformations (1)-(2) et (3)-(4), qui sont des transformations isentropes, on peut écrire :

$$W_{12} = \Delta U_{12} = \int_{T_1}^{T_2} C_\mathrm{V}\,\mathrm{d}T = C_\mathrm{V}(T_2 - T_1) \tag{53}$$

et

$$W_{34} = \Delta U_{34} = \int_{T_3}^{T_4} C_\mathrm{V}\,\mathrm{d}T = C_\mathrm{V}(T_4 - T_3) \tag{54}$$

Pour les deux transformations isobares (2)-(3) et (4)-(1), on peut écrire :

$$W_{23} = \Delta U_{23} - Q_{23} = C_\mathrm{V}(T_3 - T_2) - Q_{23} \tag{55}$$

et

$$W_{41} = \Delta U_{41} - Q_{41} = C_\mathrm{V}(T_1 - T_4) - Q_{41} \tag{56}$$

A.N. : $W_{12} = 8{,}442\,\mathrm{kJ}$, $W_{23} = 3{,}456\,\mathrm{kJ}$, $W_{34} = -6{,}221\,\mathrm{kJ}$ et $W_{41} = -2{,}345\,\mathrm{kJ}$.
Alors, le travail W_f fourni à la machine est la somme des travaux positifs, c.-à-d. :

$$W_\mathrm{f} = W_{12} + W_{23} \tag{57}$$

A.N. : $W_\mathrm{f} = 11{,}898\,\mathrm{kJ}$.

6. La performance d'une machine frigorifique, qui s'appelle aussi efficacité thermique, est donnée par :

$$\eta = \left|\frac{Q_\mathrm{fournie}}{W_\mathrm{fourni}}\right| \tag{58}$$

soit :

$$\eta = \left|\frac{Q_{41}}{W_\mathrm{f}}\right| \tag{59}$$

A.N. : $\eta = 0{,}591$.

7. La variation de l'entropie du gaz au cours du cycle fermé est nulle (c.-à-d. $\Delta S_\mathrm{g} = 0$).[1] Pour le milieu extérieur, constitué par les deux sources qui ont des

[1]En effet, l'échange de chaleur pour ce cycle se fait seulement au cours des deux transformations isobares. Alors, dans ce cas la variation de l'entropie du système s'écrit :

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} = C_\mathrm{p}\frac{\mathrm{d}T}{T} \tag{60}$$

Donc, pour les deux transformations (2)-(3) et (4)-(1), les variations de l'entropie du système s'écrivent :

$$\Delta S_{23} = C_\mathrm{p}\ln\frac{T_3}{T_2} \quad \text{et} \quad \Delta S_{41} = C_\mathrm{p}\ln\frac{T_1}{T_4} \tag{61}$$

Alors la variation de l'entropie du gaz au cours du cycle s'écrit :

$$\Delta S_\mathrm{g} = \Delta S_{23} + \Delta S_{41} = C_\mathrm{p}\ln\frac{T_1 T_3}{T_2 T_4} \tag{62}$$

L'application numérique nous permet de confirmer que $\Delta S_\mathrm{g} = 0$.

températures constantes, la variation de son entropie s'écrit :

$$\Delta S_{\text{ext}} = -\frac{Q_{23}}{T_3} - \frac{Q_{41}}{T_1} \tag{63}$$

En fin, l'entropie créée s'écrit :

$$S_{\text{c}} = \Delta S_{\text{g}} + \Delta S_{\text{ext}} \tag{64}$$

soit :

$$S_{\text{c}} = -\frac{Q_{23}}{T_3} - \frac{Q_{41}}{T_1} \tag{65}$$

A.N. : $S_{\text{c}} = 9{,}377\,\text{J}\,\text{K}^{-1}$.
L'entropie créée est strictement positive, alors le cycle est irréversible.