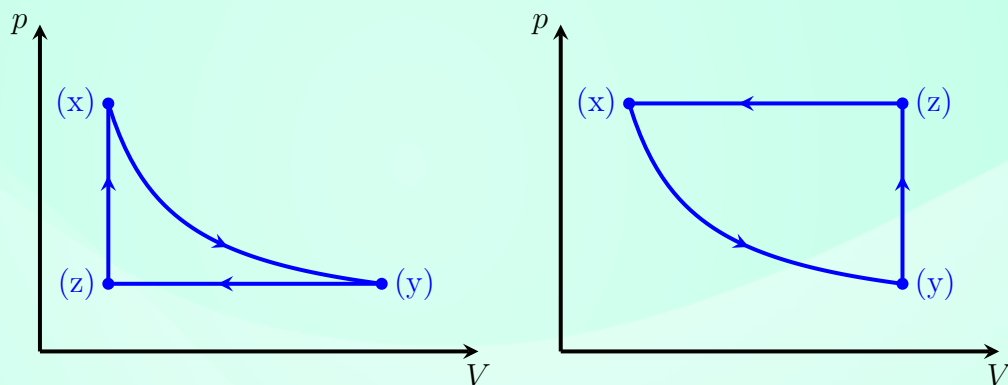


Correction des  
Travaux Dirigés de Thermodynamique II\*  
Proposés par : H. Chaib  
Filière : SMP, Semestre : 3, Année : 2018/2019, Série : 04

Exercice 1

1. Avec une détente isotherme, une compression isobare et une compression isochore, il n'y a que deux configurations possibles pour former un cycle thermodynamique<sup>1</sup> (figure ci-dessous).



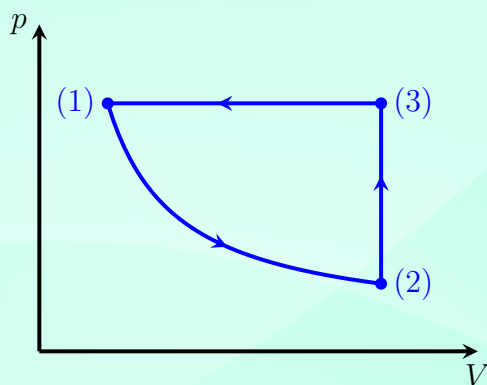
Parmi ces deux configurations, c'est la deuxième configuration qui possède une compression isochore suivie d'une compression isobare. Par contre la première configuration ne satisfait pas à ce critère car il possède une compression isobare suivie d'une compression isochore.

Dans la deuxième configuration, l'état le plus comprimé est l'état (x) car il est caractérisé par la plus grande pression et le plus petit volume. Donc l'état (x) représente l'état (1) du cycle en question. Il s'ensuit que l'état (y) représente l'état (2) et l'état (z) représente l'état (3). Cependant, le cycle de la machine en question est représenté sur la figure ci-dessous.

\*La version électronique de ces travaux dirigés et des épreuves relatives à la même matière sont disponibles, avec leurs corrections, sur le site Web : <http://www.fpo.ma/chaib/teaching/>.

<sup>1</sup>On désigne par cycle thermodynamique le cycle d'une machine thermique qui peut être une machine thermo-dynamique ou bien une machine dynamo-thermique. Il est important de noter que :

- le mot thermodynamique (sans -) est général ; par contre
- le mot thermo-dynamique (avec -) est spécifique aux machines motrices ; et
- le mot dynamo-thermique (avec -) est spécifique aux pompes à chaleur y compris les machines frigorifiques.



2. On constate que la machine en question est une machine dynamo-thermique car son cycle évolue dans le sens trigonométrique.
3. Le présent cycle est caractérisé par les pressions extrêmes  $p_{\min} = 2$  bar et  $p_{\max} = 20$  bar, et les volumes extrêmes  $V_{\min} = 1$  dm<sup>3</sup> et  $V_{\max} = 9,5$  dm<sup>3</sup>. Cependant, d'après la figure ci-dessus, il s'avère que :
- pour l'état (1) :  $p_1 = p_{\max}$  et  $V_1 = V_{\min}$  ;
  - pour l'état (2) :  $p_2 = p_{\min}$  et  $V_2 = V_{\max}$  ;
  - pour l'état (3) :  $p_3 = p_{\max}$  et  $V_3 = V_{\max}$ .
- A.N.** :  $p_1 = p_3 = 20$  bar,  $p_2 = 2$  bar,  $V_1 = 1$  dm<sup>3</sup> et  $V_2 = V_3 = 9,5$  dm<sup>3</sup>.
4. La variable d'état  $T$  est une fonction des variables indépendantes  $p$  et  $V$ . Alors, sa différentielle  $dT$  peut s'écrire :

$$dT = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_V dp + \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV \quad (1)$$

Or, d'après les définitions des coefficients thermoélastiques  $\alpha$  et  $\beta$ , à savoir :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (2)$$

on peut écrire :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = \frac{1}{\alpha V} = \frac{p}{nR} \quad (3)$$

et

$$\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_V = \frac{1}{\beta p} = \frac{V - nb}{nR} \quad (4)$$

alors, en remplaçant  $\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p$  et  $\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_V$  dans l'équation (1) par leurs expressions, on obtient :

$$dT = \frac{V - nb}{nR} dp + \frac{p}{nR} dV \quad (5)$$

- Pour  $V = Cte$ , l'équation (5) s'écrit :

$$dT = \frac{V - nb}{nR} dp \quad (6)$$

Son intégration permet d'écrire :

$$T = \frac{V - nb}{nR} p + f(V) \quad (7)$$

où la constante d'intégration  $f(V)$  est une fonction qui peut éventuellement dépendre de  $V$  mais elle ne dépend pas de  $p$ .

- Pour  $p = Cte$ , l'équation (5) s'écrit :

$$dT = \frac{p}{nR} dV \quad (8)$$

Son intégration permet d'écrire :

$$T = \frac{p}{nR}V + g(p) \quad (9)$$

où la constante d'intégration  $g(p)$  est une fonction qui peut éventuellement dépendre de  $p$  mais elle ne dépend pas de  $V$ .

Cependant, pour  $p$  et  $V$  quelconques, on peut écrire :

$$\frac{V - nb}{nR}p + f(V) = \frac{p}{nR}V + g(p) \quad (10)$$

soit :

$$-\frac{nbp}{nR} + f(V) = g(p) \quad (11)$$

ou encore :

$$f(V) = g(p) + \frac{nbp}{nR} = Cte \quad (12)$$

On pose  $Cte = T_0$ , alors :

$$g(p) = -\frac{nbp}{nR} + T_0 \quad \text{et} \quad f(V) = T_0 \quad (13)$$

d'où l'équation d'état du gaz en question :

$$T = \frac{p(V - nb)}{nR} + T_0 \quad (14)$$

ou aussi :

$$p(V - nb) = nR(T - T_0) \quad (15)$$

5. En considérant la transformation isotherme (1)-(2), on peut écrire :

$$p_1(V_1 - nb) = p_2(V_2 - nb) \quad (16)$$

d'où :

$$nb = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{p_1 - p_2} \quad (17)$$

**A.N.** :  $nb = 5,556 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ .

6. Déterminons maintenant les travaux et les quantités de chaleur mis en jeu au cours des différentes transformations :

- (a) Pour la détente isotherme, c.-à-d. la transformation (1)-(2), on a :

$$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = -nR(T_1 - T_0) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V - nb} \quad (18)$$

soit :

$$W_{12} = -p_1(V_1 - nb) \ln \frac{V_2 - nb}{V_1 - nb} \quad (19)$$

On a aussi :

$$Q_{12} = -W_{12} \quad (20)$$

car pour cette transformation, qui est isotherme :

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \frac{6}{2}nR(T_2 - T_1) = 0 \quad (21)$$

**A.N.** :  $W_{12} = -4,349 \text{ kJ}$  et  $Q_{12} = 4,349 \text{ kJ}$ .

(b) Pour la compression isochore, c.-à-d. la transformation (2)-(3), on a :

$$W_{23} = 0 \quad (22)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} Q_{23} = \Delta U_{23} &= U_3 - U_2 = \frac{6}{2}nR(T_3 - T_2) \\ &= \frac{6}{2}nR(T_3 - T_0) - \frac{6}{2}nR(T_2 - T_0) \end{aligned} \quad (23)$$

soit :

$$Q_{23} = \frac{6}{2}(p_3(V_3 - nb) - p_2(V_2 - nb)) \quad (24)$$

ou encore, puisque  $V_3 = V_2$  :

$$Q_{23} = \frac{6}{2}(p_3 - p_2)(V_2 - nb) \quad (25)$$

**A.N.** :  $W_{23} = 0$  kJ et  $Q_{23} = 51$  kJ.

(c) Pour la compression isobare, c.-à-d. la transformation (3)-(1), on a :

$$W_{31} = -p_1 \int_{V_3}^{V_1} dV = -p_1(V_1 - V_3) \quad (26)$$

On a aussi :

$$Q_{31} = \Delta U_{31} - W_{31} \quad (27)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta U_{31} &= U_1 - U_3 = \frac{6}{2}nR(T_1 - T_3) \\ &= \frac{6}{2}nR(T_1 - T_0) - \frac{6}{2}nR(T_3 - T_0) \end{aligned} \quad (28)$$

c.-à-d. :

$$\begin{aligned} \Delta U_{31} &= \frac{6}{2}(p_1(V_1 - nb) - p_3(V_3 - nb)) \\ &= \frac{6}{2}p_1(V_1 - V_3) \end{aligned} \quad (29)$$

d'où :

$$Q_{31} = \frac{6}{2}p_1(V_1 - V_3) - W_{31} \quad (30)$$

**A.N.** :  $W_{31} = 17$  kJ et  $Q_{31} = -68$  kJ.

7. La machine thermique en question est une machine dynamo-thermique, c.-à-d. une pompe à chaleur. Cette machine peut donc être utilisée soit comme système de refroidissement soit comme système de chauffage. Cependant, son efficacité thermique dépend de son mode d'utilisation :

(a) En cas d'utilisation comme système de refroidissement :

$$\eta = \left| \frac{Q_f}{W_f} \right| = \left| \frac{Q_{12} + Q_{23}}{W_{31}} \right| \quad (31)$$

car la quantité de chaleur fournie  $Q_f = Q_{12} + Q_{23}$  et le travail fourni  $W_f = W_{31}$ .

**A.N.** :  $\eta = 3,256$ .

(b) En cas d'utilisation comme système de chauffage :

$$\eta' = \left| \frac{Q_c}{W_f} \right| = \left| \frac{Q_{31}}{W_{31}} \right| \quad (32)$$

car la quantité de chaleur cédée  $Q_c = Q_{31}$  et le travail fourni  $W_f = W_{31}$ .

**A.N.** :  $\eta' = 4$ .

**Exercice 2**

1. D'après le premier principe de la thermodynamique, on a :

$$dU = \delta Q + \delta W \quad \text{avec} \quad \delta Q = T dS \quad \text{et} \quad \delta W = -p dV \quad (33)$$

La forme différentielle de l'énergie interne  $U$  s'écrit donc :

$$dU = T dS - p dV \quad (34)$$

Ceci montre que les variables naturelles de l'énergie interne  $U$  sont  $S$  et  $V$ .

Sachant que  $H = U + PV$ ,  $F = U - TS$  et  $G = H - TS$ , on peut facilement montrer que :

$$dH = T dS + V dp, \quad dF = -S dT - p dV \quad \text{et} \quad dG = -S dT + V dp \quad (35)$$

Ainsi, les variables naturelles de l'enthalpie  $H$  sont  $S$  et  $p$ , celles de l'énergie libre  $F$  sont  $T$  et  $V$  et celles de l'enthalpie libre  $G$  sont  $T$  et  $p$ .

2. Le système est bivariant car son état peut être caractérisé par deux variables indépendantes seulement. On effet, les fonctions d'état  $U(S, V)$ ,  $H(S, p)$ ,  $F(T, V)$  ou  $G(T, p)$ , qui permettent de décrire l'état du système, sont toutes des fonctions à deux variables indépendantes.
3. En utilisant l'égalité de Schwartz associé à la différentielle totale exacte  $dU$ , on aboutit à la relation de Maxwell relative à l'énergie interne :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \quad (36)$$

En utilisant l'égalité de Schwartz associé à la différentielle totale exacte  $dH$ , on aboutit à la relation de Maxwell relative à l'enthalpie :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p \quad (37)$$

En utilisant l'égalité de Schwartz associé à la différentielle totale exacte  $dF$ , on aboutit à la relation de Maxwell relative à l'énergie libre :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad (38)$$

En utilisant l'égalité de Schwartz associé à la différentielle totale exacte  $dG$ , on aboutit à la relation de Maxwell relative à l'enthalpie libre :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (39)$$

4. D'après les expressions de  $\delta Q$  données dans l'énoncé, on peut écrire :

$$dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{l}{T} dV \quad \text{et} \quad dS = \frac{C_p}{T} dT + \frac{h}{T} dp \quad (40)$$

Étant donné que ces formes différentielles sont des différentielles totales exactes, alors :

$$\frac{l}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \quad \text{et} \quad \frac{h}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \quad (41)$$

Ces expressions peuvent s'écrire, en tenant compte des relations de Maxwell relatives à l'énergie libre et à l'enthalpie libre établies ci-dessus, comme suit :

$$l = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad \text{et} \quad h = -T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (42)$$

Ces deux relations sont, respectivement, la première et la deuxième relation de Clapeyron.

5. En se plaçant dans le cas de volume constant (c.-à-d.  $dV = 0$ ), on peut écrire, selon les expressions de  $\delta Q$  données dans l'énoncé :

$$C_V dT = C_p dT + h dp \quad (43)$$

soit :

$$C_p - C_V = -h \frac{dp}{dT} \quad (44)$$

Le taux d'accroissement  $\frac{dp}{dT}$  évalué à volume constant peut être identifié avec  $\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$ . Alors :

$$C_p - C_V = -h \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (45)$$

En remplaçant ensuite  $h$  par son expression établies ci-dessus, on obtient la relation de Mayer :

$$C_p - C_V = T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (46)$$

6. En tenant compte de deux relations de Clapeyron et des définitions des coefficients thermoélastiques, on peut facilement remarquer que la relation de Mayer peut s'écrire :

$$C_p - C_V = l\alpha V \quad \text{et} \quad C_p - C_V = -h\beta p \quad (47)$$

Sachant que  $\beta p = \frac{\alpha}{\chi_T}$ , d'après la fameuse relation liant les coefficients thermoélastiques, il vient :

$$l = \frac{C_p - C_V}{\alpha V} \quad \text{et} \quad h = -\frac{(C_p - C_V) \chi_T}{\alpha} \quad (48)$$

7. Sachant que, d'après les définitions de coefficients thermoélastiques,  $\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \alpha V$  et  $\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \beta p$ . Alors, la relation de Mayer peut s'écrire :

$$C_p - C_V = T\alpha V\beta p \quad (49)$$

Or  $\beta p = \frac{\alpha}{\chi_T}$ , alors :

$$C_p - C_V = \frac{TV\alpha^2}{\chi_T} \quad (50)$$

8. Le fait que  $\left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$  est négatif pour tous les corps qu'on connaît implique que  $\chi_T$  est toujours positif. De même pour la quantité  $C_p - C_V$  puisque  $TV\alpha^2 \geq 0$ .



9. Sachant que  $C_p = \gamma C_V$ , alors l'expression de  $C_p - C_V$  établie ci-dessus peut s'écrire :

$$(\gamma - 1) C_V = \frac{TV\alpha^2}{\chi_T} \quad (51)$$

soit :

$$C_V = \frac{TV\alpha^2}{(\gamma - 1)\chi_T} \quad (52)$$

et par suite :

$$C_p = \frac{\gamma TV\alpha^2}{(\gamma - 1)\chi_T} \quad (53)$$

10. En se plaçant dans le cas de température constante (c.-à-d.  $dT = 0$ ), on peut écrire, d'après les expressions de  $\delta Q$  données dans l'énoncé :

$$l dV = h dp \quad (54)$$

soit :

$$\frac{dV}{dp} = \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{h}{l} \quad (55)$$

En se plaçant dans le cas d'entropie constante (c.-à-d.  $dS = 0$ ), on peut écrire, d'après les expressions de  $\delta Q$  données dans l'énoncé :

$$C_V dT + l dV = 0 \quad \text{et} \quad C_p dT + h dp = 0 \quad (56)$$

ou encore :

$$dT = -\frac{l}{C_V} dV = -\frac{h}{C_p} dp \quad (57)$$

soit :

$$\frac{dV}{dp} = \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S = \frac{h}{\gamma l} \quad (58)$$

D'après les équations (55) et (58), on peut écrire :

$$\gamma = \frac{\left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T}{\left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S} \quad (59)$$

dont on déduit la formule de Reech :

$$\gamma = \frac{\chi_T}{\chi_S} \quad (60)$$

où  $\gamma$  est l'indice adiabatique,  $\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$  est le coefficient de compressibilité isotherme et  $\chi_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S$  est le coefficient de compressibilité isentropique.

11. D'après ce qui se précède, l'indice adiabatique est donné par :

$$\gamma = \frac{\chi_T}{\chi_S} \quad (61)$$

Les capacités calorifiques sont données par :

$$C_V = \frac{TV\alpha^2}{(\gamma-1)\chi_T} \quad \text{et} \quad C_P = \frac{\gamma TV\alpha^2}{(\gamma-1)\chi_T} \quad (62)$$

Les chaleurs latentes sont données par :

$$l = \frac{C_P - C_V}{\alpha V} \quad \text{et} \quad h = -\frac{(C_P - C_V)\chi_T}{\alpha} \quad (63)$$

**A.N.** :  $C_V = 208,6 \text{ J K}^{-1}$ ,  $C_P = 238,4 \text{ J K}^{-1}$ ,  $l = 1,49 \times 10^9 \text{ J m}^{-3}$  et  $h = 5,96 \times 10^{-6} \text{ J Pa}^{-1}$ .

### Exercice 3

1. Les lois de Joule énoncent que l'énergie interne  $U$  et l'enthalpie  $H$  d'un gaz parfait ne dépendent que de sa température  $T$ . Alors, le système thermodynamique en question n'est pas un gaz parfait car son énergie interne  $U$  dépend également du volume  $V$ .
2. La capacité calorifique à volume constant  $C_V$  s'écrit :

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = aV^b \quad (64)$$

3. La forme différentielle  $dU$  s'écrit :

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \quad (65)$$

soit :

$$dU = aV^b dT + abV^{b-1}T dV \quad (66)$$

### Exercice 4

La transformation est isobare ( $p = Cte$ ), alors :

$$\delta Q = dU + p dV = dU + d(pV) = dH \quad (67)$$

d'où :

$$\delta Q = dH = C_P dT \quad (68)$$

soit :

$$\delta Q = (\alpha T + \beta) dT \quad (69)$$

Cependant, la variation d'entropie que subit le gaz s'écrit :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \alpha dT + \beta \frac{dT}{T} \quad (70)$$

Alors, pour une transformation finie entre les états (1) et (2) :

$$\Delta S_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \alpha dT + \int_{T_1}^{T_2} \beta \frac{dT}{T} \quad (71)$$

soit :

$$\Delta S_{12} = \alpha(T_2 - T_1) + \beta \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (72)$$