Université Ibn Zohr
Faculté Polydisciplinaire
Ouarzazate, Maroc

جامعة ابن زهر
الكلية متعددة التخصصات
ورزازات، المغرب

Correction des
Travaux Dirigés de Thermodynamique II *
Proposés par : H. Chaib
Filière : SMP, **Semestre** : 3, **Année** : 2018/2019, **Série** : 06

Exercice 1

1. Les états finaux du système sont :
   - la glace seulement si $T_\mathrm{f} < 0\,°\mathrm{C}$;
   - l'eau liquide avec de la glace si $T_\mathrm{f} = 0\,°\mathrm{C}$;
   - l'eau liquide seulement si $T_\mathrm{f} > 0\,°\mathrm{C}$.
2. Dans le cas où $T_\mathrm{f} = 0\,°\mathrm{C}$, alors le système contient une quantité d'eau liquide dont la masse m'_e est comprise entre 0 et $m_\mathrm{e} + m_\mathrm{g}$ et une quantité de glace dont la masse m'_g est aussi comprise entre 0 et $m_\mathrm{e} + m_\mathrm{g}$. Alors :
$$0 \leqslant m'_\mathrm{e} = m_\mathrm{e} + \Delta m \leqslant m_\mathrm{e} + m_\mathrm{g} \tag{1}$$
et
$$0 \leqslant m'_\mathrm{g} = m_\mathrm{g} - \Delta m \leqslant m_\mathrm{e} + m_\mathrm{g} \tag{2}$$
soit :
$$-m_\mathrm{e} \leqslant \Delta m \leqslant m_\mathrm{g} \tag{3}$$
3. Le calorimètre adiabatique, dont la masse équivalente en eau est négligeable, contient une masse d'eau liquide égale à m_e à la température T_e et une masse de glace égale à m_g à la température T_g. Alors, les quantités de chaleur échangées sont :
   - celle échangée par la masse d'eau liquide m_e quand elle passe de la température T_e à la température T_f :
$$Q_\mathrm{e} = m_\mathrm{e} c_\mathrm{e} (T_\mathrm{f} - T_\mathrm{e}) \tag{4}$$
   - celle échangée par la masse de glace m_g quand elle passe de la température T_g à la température T_f :
$$Q_\mathrm{g} = m_\mathrm{g} c_\mathrm{g} (T_\mathrm{f} - T_\mathrm{g}) \tag{5}$$
   - celle échangée, sous forme de chaleur latente, par la masse Δm au cours de la transformation d'état à la température T_f :
$$Q_\mathrm{L} = +\Delta m L \tag{6}$$

   NB : Pour cette transformation, on distingue deux cas :

*La version électronique de ces travaux dirigés et des épreuves relatives à la même matière sont disponibles, avec leurs corrections, sur le site Web : http://www.fpo.ma/chaib/teaching/.

- ✓ Si $\Delta m > 0$, alors c'est de la glace qui se transforme en eau liquide. Cependant, la quantité de glace transformée reçoit de la chaleur et par suite $Q_{\mathrm{L}} = \Delta m L > 0$.
- ✓ Si $\Delta m < 0$, alors c'est de l'eau liquide qui se transforme en glace. Cependant, la quantité d'eau liquide transformée cède de la chaleur et par suite $Q_{\mathrm{L}} = \Delta m L < 0$.

La quantité de chaleur Q échangée par tout le système s'écrit :

$$Q = Q_{\mathrm{e}} + Q_{\mathrm{g}} + Q_{\mathrm{L}} \tag{7}$$

Cette quantité de chaleur est nulle car le système est adiabatique. Il en résulte :

$$m_{\mathrm{e}} c_{\mathrm{e}} (T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{e}}) + m_{\mathrm{g}} c_{\mathrm{g}} (T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{g}}) + \Delta m L = 0 \tag{8}$$

soit :

$$\Delta m = -\frac{m_{\mathrm{e}} c_{\mathrm{e}} (T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{e}}) + m_{\mathrm{g}} c_{\mathrm{g}} (T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{g}})}{L} \tag{9}$$

ou encore, en tenant compte que $T_{\mathrm{f}} = 0$:

$$\Delta m = \frac{m_{\mathrm{e}} c_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} + m_{\mathrm{g}} c_{\mathrm{g}} T_{\mathrm{g}}}{L} \tag{10}$$

4. Selon la question 2, la valeur de Δm est physiquement acceptable si :

$$-m_{\mathrm{e}} \leqslant \Delta m \leqslant m_{\mathrm{g}} \tag{11}$$

soit :

$$-m_{\mathrm{e}} \leqslant \frac{m_{\mathrm{e}} c_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} + m_{\mathrm{g}} c_{\mathrm{g}} T_{\mathrm{g}}}{L} \leqslant m_{\mathrm{g}} \tag{12}$$

ou, en divisant tout les membres par m_{e} :

$$-1 \leqslant \frac{c_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} + \frac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{e}}} c_{\mathrm{g}} T_{\mathrm{g}}}{L} \leqslant \frac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{e}}} \tag{13}$$

ou encore :

$$-L \leqslant c_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} + \frac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{e}}} c_{\mathrm{g}} T_{\mathrm{g}} \leqslant \frac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{e}}} L \tag{14}$$

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} -L \leqslant c_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} + \dfrac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{e}}} c_{\mathrm{g}} T_{\mathrm{g}} \\ c_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} + \dfrac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{e}}} c_{\mathrm{g}} T_{\mathrm{g}} \leqslant \dfrac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{e}}} L \end{cases} \tag{15}$$

soit :

$$\begin{cases} -(L + c_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}}) \leqslant \dfrac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{e}}} c_{\mathrm{g}} T_{\mathrm{g}} \\ \dfrac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{e}}} (c_{\mathrm{g}} T_{\mathrm{g}} - L) \leqslant -c_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} \end{cases} \tag{16}$$

les deux quantités $c_{\mathrm{g}} T_{\mathrm{g}}$ et $c_{\mathrm{g}} T_{\mathrm{g}} - L$ sont négatives car $T_{\mathrm{g}} < 0$. Alors :

$$\begin{cases} -\dfrac{L + c_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}}}{c_{\mathrm{g}} T_{\mathrm{g}}} \geqslant \dfrac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{e}}} \\ \dfrac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{e}}} \geqslant -\dfrac{c_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}}}{c_{\mathrm{g}} T_{\mathrm{g}} - L} \end{cases} \tag{17}$$

soit :

$$-\frac{c_\mathrm{e}T_\mathrm{e}}{c_\mathrm{g}T_\mathrm{g}-L} \leqslant \frac{m_\mathrm{g}}{m_\mathrm{e}} \leqslant -\frac{L+c_\mathrm{e}T_\mathrm{e}}{c_\mathrm{g}T_\mathrm{g}} \tag{18}$$

Alors, les valeurs de $\frac{m_\mathrm{g}}{m_\mathrm{e}}$ pour lesquelles la valeur de Δm trouvée est physiquement acceptable sont celles qui se trouvent dans l'intervalle $\left[\frac{c_\mathrm{e}T_\mathrm{e}}{L-c_\mathrm{g}T_\mathrm{g}}, \frac{L+c_\mathrm{e}T_\mathrm{e}}{-c_\mathrm{g}T_\mathrm{g}}\right]$.

5. Soit m_g la masse du glace qu'il faut ajouter dans une quantité de masse m_e de l'eau liquide pour la faire geler complètement. Dans ce cas $\Delta m = -m_\mathrm{e}$. Selon la question 3, on peut écrire :

$$-m_\mathrm{e} = \frac{m_\mathrm{e}c_\mathrm{e}T_\mathrm{e}+m_\mathrm{g}c_\mathrm{g}T_\mathrm{g}}{L} \tag{19}$$

soit :

$$-m_\mathrm{e}L - m_\mathrm{e}c_\mathrm{e}T_\mathrm{e} = m_\mathrm{g}c_\mathrm{g}T_\mathrm{g} \tag{20}$$

d'où :

$$m_\mathrm{g} = -\frac{m_\mathrm{e}L+m_\mathrm{e}c_\mathrm{e}T_\mathrm{e}}{c_\mathrm{g}T_\mathrm{g}} \tag{21}$$

A.N. : $m_\mathrm{g} = 18{,}137\,\mathrm{kg}$.

6. Soient m'_e et m'_g les masses finales respectives de l'eau liquide et de la glace obtenues. Ces masses s'écrivent, selon les questions 2 et 3, comme suit :

$$\begin{cases} m'_\mathrm{e} = m_\mathrm{e} + \Delta m = m_\mathrm{e} + \dfrac{m_\mathrm{e}c_\mathrm{e}T_\mathrm{e}+m_\mathrm{g}c_\mathrm{g}T_\mathrm{g}}{L} \\ m'_\mathrm{g} = m_\mathrm{g} - \Delta m = m_\mathrm{g} - \dfrac{m_\mathrm{e}c_\mathrm{e}T_\mathrm{e}+m_\mathrm{g}c_\mathrm{g}T_\mathrm{g}}{L} \end{cases} \tag{22}$$

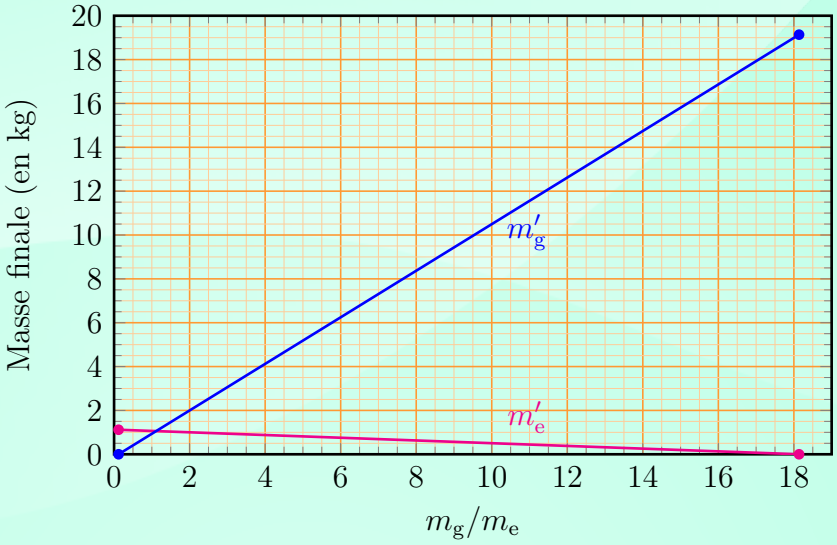
En posant $x = \frac{m_\mathrm{g}}{m_\mathrm{e}}$, il vient :

$$\begin{cases} m'_\mathrm{e} = m_\mathrm{e}\left(1 + \dfrac{c_\mathrm{e}T_\mathrm{e}+xc_\mathrm{g}T_\mathrm{g}}{L}\right) \\ m'_\mathrm{g} = m_\mathrm{e}\left(x - \dfrac{c_\mathrm{e}T_\mathrm{e}+xc_\mathrm{g}T_\mathrm{g}}{L}\right) \end{cases} \tag{23}$$

Ces deux expressions montrent alors que m'_e et m'_g évoluent linéairement en fonction de x. De plus, d'après les expressions obtenues dans la question 4, les valeurs de x pour lesquelles la valeur de Δm trouvée est physiquement acceptable sont celles comprises entre 0,119 et 18,137. Ainsi :

- Pour $x = 0{,}119$, on a $m_\mathrm{e} = 1\,\mathrm{kg}$ et $m_\mathrm{g} = 0{,}119\,\mathrm{kg}$. Dans ce cas, les masses finales obtenues sont $m'_\mathrm{e} = 1{,}119\,\mathrm{kg}$ et $m'_\mathrm{g} = 0\,\mathrm{kg}$;
- Pour $x = 18{,}137$, on a $m_\mathrm{e} = 1\,\mathrm{kg}$ et $m_\mathrm{g} = 18{,}137\,\mathrm{kg}$. Dans ce cas, les masses finales obtenues sont $m'_\mathrm{e} = 0\,\mathrm{kg}$ et $m'_\mathrm{g} = 19{,}137\,\mathrm{kg}$.

Sur la figure ci-dessous sont reportées les allures des masses finales m'_e et m'_g.


Masse finale (en kg)
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
m'_g
m'_e
m_g/m_e