



Correction de l'Épreuve de Thermodynamique II *

Responsable : H. Chaib

Filière : SMP, Semestre : 3, Année : 2015/2016

Date : 21-01-2016 à 10:15, Durée : 90 min

Problème 1

1. Les quantités de chaleur mises en jeu au cours de ce cycle sont celles échangées lors des transformations isochores (2)-(3) et (4)-(1) car les deux autres transformations sont isentropes ($Q_{12} = Q_{34} = 0$). Soit :

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = C_V(T_3 - T_2) \quad (1)$$

et

$$Q_{41} = \Delta U_{41} = C_V(T_1 - T_4) \quad (2)$$

2. (a) En considérant la transformation isochore (2)-(3), on a $T_3 > T_2$ car $\frac{T_3}{p_3} = \frac{T_2}{p_2}$ et $p_3 > p_2$. Alors, la quantité de chaleur Q_{23} est positive. De même, pour la transformation isochore (4)-(1), on a $T_1 < T_4$ car $\frac{T_1}{p_1} = \frac{T_4}{p_4}$ et $p_1 < p_4$. Alors, la quantité de chaleur Q_{41} est négative. Cependant, la quantité de chaleur fournie au système est :

$$Q_f = Q_{23} \quad (3)$$

- (b) Le travail utile du cycle est donné par :

$$W_u = \sum_i W_i = - \sum_i Q_i \quad (4)$$

soit :

$$W_u = -(Q_{23} + Q_{41}) \quad (5)$$

- (c) L'efficacité thermique η du cycle s'écrit :

$$\eta = \left| \frac{W_u}{Q_f} \right| \quad (6)$$

Le travail utile W_u est négatif car il s'agit d'un cycle moteur. Alors :

$$\eta = \frac{-W_u}{Q_f} = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} \quad (7)$$

soit :

$$\eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} \quad (8)$$

*. La version électronique de l'énoncé et celle de la correction de cette épreuve seront publiés en ligne, quelques heures après la date affichée ci-dessus, sur le site Web : <http://www.fpo.ma/chaib/teaching/>.

3. En remplaçant, dans la dernière expression, les quantités de chaleur Q_{23} et Q_{41} par leurs expressions, il vient :

$$\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} \quad (9)$$

4. L'expression précédente peut s'écrire également :

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (10)$$

En prenant en considération que les transformations (1)-(2) et (3)-(4) sont isentropes et que $V_4 = V_1$ et $V_3 = V_2$, alors :

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{1}{\tau_{12}^{\gamma-1}} \quad (11)$$

et

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{1}{\tau_{12}^{\gamma-1}} \quad (12)$$

On constate que :

$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\tau_{12}^{\gamma-1}} \quad (13)$$

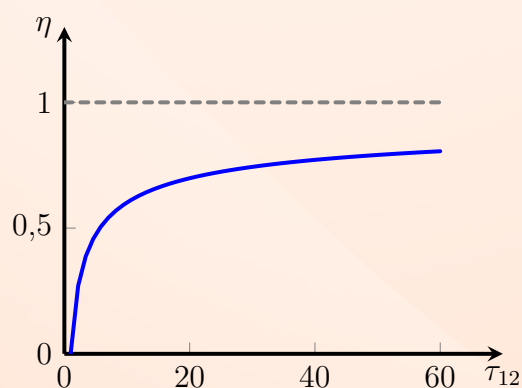
d'où :

$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \frac{1}{\tau_{12}^{\gamma-1}} \quad (14)$$

On en déduit alors :

$$\eta = 1 - \frac{1}{\tau_{12}^{\gamma-1}} \quad (15)$$

5. Le volume de l'état (1) est toujours supérieur à celui de l'état (2) et par conséquent τ_{12} varie entre 1 et l'infini. On note que l'indice adiabatique du gaz en question, qui est assimilable à un gaz parfait diatomique, est $\gamma = 1,4$. La figure ci-dessous montre l'évolution de η en fonction de τ_{12} .



6. D'après l'expression de η montrée dans la question 5, on peut écrire :

$$\tau_{12} = (1 - \eta)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (16)$$

A.N. : $\tau_{12} = 9,882$.

Problème 2

1. D'après le premier principe de la thermodynamique, on peut écrire :

$$dU = \delta Q + \delta W = C_V dT + l dV - p dV \quad (17)$$

soit :

$$dU = C_V dT + (l - p) dV \quad (18)$$

En portant l'expression de δQ dans la relation définissant l'entropie (c.-à-d. $dS = \frac{\delta Q}{T}$), on obtient :

$$dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{l}{T} dV \quad (19)$$

2. D'après la relation liant les dérivées croisées de la forme différentielle totale dU , on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (20)$$

3. De même, la relation liant les dérivées croisées de la forme différentielle totale dS permet écrire :

$$\left(\frac{\partial \left(\frac{C_V}{T} \right)}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial \left(\frac{l}{T} \right)}{\partial T} \right)_V \quad (21)$$

soit :

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_V - \frac{l}{T^2} \quad (22)$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_V - \frac{l}{T} \quad (23)$$

4. D'après les expressions trouvées dans les deux questions précédentes, on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_V - \frac{l}{T} \quad (24)$$

soit :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{l}{T} \quad (25)$$

d'où, la première relation de Clapeyron :

$$l = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (26)$$

5. La pression p du gaz en question peut s'écrire :

$$p = \frac{nRT}{V - nb} \quad (27)$$

Alors :

$$l = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = T \frac{nR}{V - nb} \quad (28)$$

soit :

$$l = p \quad (29)$$

6. D'après la question 2, on a :

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 0 \quad (30)$$

On constate alors que C_V est indépendant de V .

7. Dans le présent cas où $l = p$, la forme différentielle dU s'écrit :

$$dU = C_V dT \quad (31)$$

Étant donné que C_V est indépendante de T , alors :

$$U = C_V T + U_0 \quad (32)$$

8. La forme différentielle dS s'écrit, dans ce cas :

$$dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{p}{T} dV \quad (33)$$

soit :

$$dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{nR}{V - nb} dV \quad (34)$$

Par intégration, on obtient :

$$S = C_V \ln T + nR \ln(V - nb) + S_0 \quad (35)$$

Problème 3

1. La vapeur d'eau n'est pas assimilable à un gaz parfait car sa température change au cours de cette détente de Joule-Gay-Lussac.
2. La variation de l'énergie interne ΔU lors d'une détente de Joule-Gay-Lussac est nulle quelque soit la nature du gaz (c.-à-d. parfait ou réel). Alors :

$$U' = U \quad (36)$$

A.N. : $U' = 55 \text{ kJ}$.

3. On a, d'après la définition de l'entropie échangée :

$$\delta S_e = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}} \quad (37)$$

Pour une transformation de Joule-Gay-Lussac, $Q = 0$ car les parois sont adiabatiques, alors :

$$S_e = \frac{Q}{T_{\text{ext}}} = 0 \quad (38)$$

A.N. : $S_e = 0 \text{ J K}^{-1}$.

4. Étant donné que l'entropie échangée S_e est nulle, alors :

$$\Delta S = S_e + S_c = S_c \quad (39)$$

d'où :

$$S_c = \Delta S = S' - S \quad (40)$$

A.N. : $S_c = 0,17 \text{ kJ K}^{-1}$.